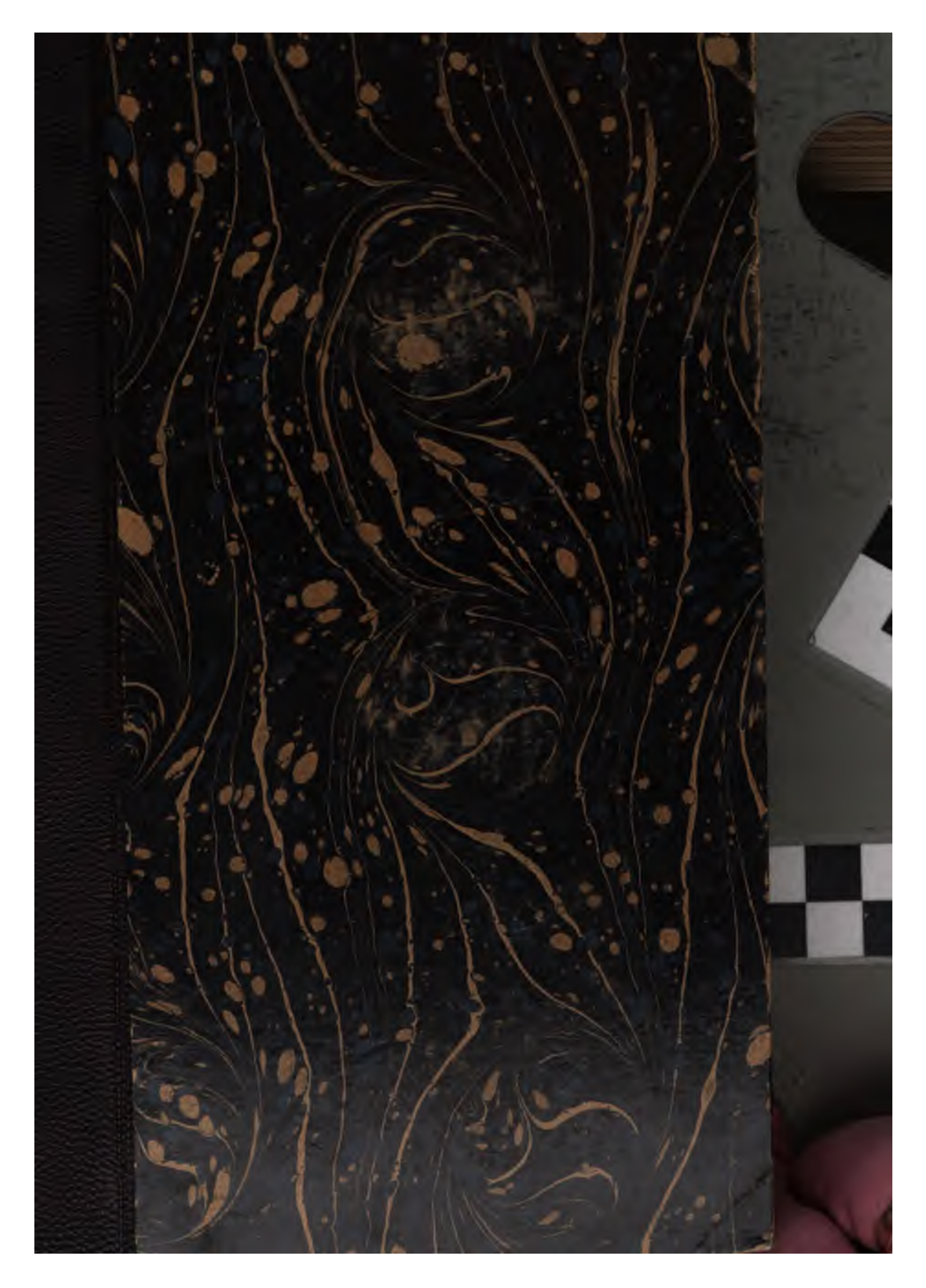


5





Inhalt.

Dynamica.

DYNAMICA.

Obwohl die Thätigkeit Leibnizens in den Jahren 1668 bis 1672 durch viele zerstreuende Geschäfte in Anspruch genommen wurde, welche ihm seine amtliche Stellung am Kurfürstlichen Hofe zu Mainz und sein besonderes Verhältniss zu dem Herrn von Boineburg auferlegten, so setzte er dennoch die wissenschaftlichen Studien keineswegs ganz bei Seite. Nicht allein war er auf eine wissenschaftlichere Behandlung der Jurisprudenz bedacht, sondern er versuchte auch mit den hervorragendsten Männern seiner Zeit durch Briefwechsel in nähere Verbindung zu treten, wobei ihm besonders die ausgebreiteten Bekanntschaften seines Gönners, des Herrn von Boineburg, in hohem Grade förderlich waren. Er richtete Briefe an Otto von Guerike, an Spinoza, an Anton Arnaud, an Oldenburg in London. Da der zuletzt genannte zur Zeit Secretär der neu gegründeten Societät in London war, so wurde er der Vermittler, dass Leibniz den ausgezeichnetsten Männern Englands, welche die Königliche Societät bildeten, bekannt ward. Um insbesondere diesem Kreise einen Beweis seiner wissenschaftlichen Studien zu geben, verfasste Leibniz die kleine Schrift, die unter dem Titel: Hypothesis physica nova, qua Phaenomenorum Naturae plerorumque causae ab unico quodam universali motu, in globo nostro supposito, neque Tychonicis, neque Copernicanis aspernando, repetuntur, im Jahre 1671 zu Mainz erschien. Sie besteht aus zwei Theilen, von denen der erste die Aufschrift hat: Theoria motus concreti seu hypothesis de rationibus phaenomenorum nostri Orbis, und der Königlichen Societät in London gewidmet ist; der zweite Theil hat den Titel: Theoria motus abstracti seu rationes motuum universales, a sensu et phaenomenis independentes, und ist der Akademie der Wissenschaften zu Paris zugeeignet*).

*) Da diese zweite Abtheilung als eine besondere Schrift einige Zeit später erschien, als die erste Abtheilung, und da von der ersten

Ebenso wie Leibniz den in der Dissertatio de Arte Combinatoria zuerst ausgesprochenen grossartigen Plan einer Allgemeinen Charakteristik nie aus den Augen verlor und sein ganzes Leben hindurch immer wieder von neuem zur Sprache gebracht hat, ebenso ist die Vorstellung über die Endursache der im Kosmos wirkenden Kräfte, die er zuerst in der Hypothesis physica niedergelegt, in späterer Zeit nie wieder von ihm aufgegeben worden. Es ist deshalb eine genaue Analyse der zuletzt genannten Schrift nothwendig, zumal Leibniz in Betreff seiner Ideen nicht immer genau verstanden worden und daher vielfachen Angriffen ausgesetzt gewesen ist.

Sogleich in den ersten Anfängen seiner wissenschaftlichen Studien hatte Leibniz erkannt, dass aus einfachen Begriffen die zusammengesetzten hergeleitet werden könnten, und dass dies ohne Zweifel ein richtiger Weg sei, neue Wahrheiten zu entdecken. Er war deshalb der Ansicht, dass man, um die Endursachen der im Weltraum wirkenden Kräfte zu erforschen, von den einfachsten Erscheinungen ausgehen müsse, die allgemein zugestanden und deren Ursprung erforscht war (ex phaenomenis manifestis et exploratis); es würden sich hieraus die complicirten Phänomene, ohne irgend welche willkürliche Hypothesen anzunehmen, herleiten lassen. Nun gehört zu den Phänomenen, die von Jedermann zugegeben werden müssen, die Rotation der Weltkörper um ihre Axe; von dieser Bewegung nimmt Leibniz seinen Ausgang. Da ausserdem die Sonne Licht aussendet, so muss derselben eine Wirkung nach aussen beigelegt werden, welche sich durch den ganzen Weltraum erstreckt. Damit eine solche Wirkung möglich ist, muss etwas vorhanden sein, was den Weltraum erfüllt; dies ist der Aether, der die atmosphärische Luft und alle Körper durchdringt. Insofern nun das von der Sonne ausgehende Licht an der Rotationsbewegung der etztern Antheil nimmt und da der Aether der Bewegung des Lich-

Abtheilung in London ein neuer Abdruck zur Vertheilung an die Mitglieder der Königlichen Societät veranstaltet wurde, so giebt es Exemplare der Hypothesis physica, die nur die erste Abtheilung enthalten. Ein solches Exemplar habe ich bei der Redaction des vorliegenden Bandes benutzt; es wurde mir durch Herrn Prof. Dr. Drobisch in Leipzig höchst zuvorkommend zur Einsicht mitgetheilt. — Die zweite Abtheilung ist hier so wiedergegeben, wie sie in Leib. op. omn. ed. Dutens Tom. II. sich findet.

tes folgt, so wird seine Bewegung eine kreisförmige sein; durch diese werden die übrigen Himmelskörper mitfortgerissen und erhalten so ihre Centralbewegung. Aus diesen seit der Schöpfung der Welt vorhandenen Bewegungen leitet Leibniz nicht allein die Copernikanische Anordnung des Kosmos her, sondern auch die Bewegung des Meeres, die Winde, die Polarität des Magneten, die Schwere und die Elasticität. Demnach lassen sich nach der Meinung Leibnizens aus einem Princip, aus der durch die Einwirkung des Sonnenlichts auf den Aether hervorgebrachten kreisförmigen Bewegung des letztern, die hauptsächlichsten Phänomene der Körperwelt erklären und zwar ohne eine hypothetische Annahme zu Grunde zu legen, was vor ihm alle Philosophen gethan hatten.

Hieraus ergiebt sich, dass Leibniz in der in Rede stehenden kleinen Schrift nicht bloss eine Grundlage für die Mechanik der Himmelskörper aufstellen will, vielmehr versucht er nach dem Vorgang der Philosophen des griechischen Alterthums eine einzige Endursache für alle vorhandenen Kräfte anzugeben. Er geht hierbei, wie er selbst sagt, von Aristoteles aus, der als die Endursache von Allem den Himmel setzt, welcher durch seine Bewegung weiter wirke*). Dies ist in Uebereinstimmung mit seinen Selbstbekenntnissen über den Gang seiner Studien; er gesteht darin, dass ein glücklicher Zufall ihm zuerst die Schriften der Alten in die Hände gespielt habe**). An diese schloss sich Leibniz also auch an im Aufbau seiner kosmischen Physik und entlehnte nichts von den Neuern. In seinem Schreiben an Honoratus Fabri***), in welchem er den Inhalt der Hypothesis physica in einer Reihe von Lehrsätzen zusammengefasst wiederholt, bemerkt er ausdrücklich, dass er die gedachte Schrift verfasst habe, bevor er das Cartesianische System vollständig gekannt hätte.

---

*) Certe omnium causam statuit (Aristoteles) coelum, coelum autem agere per motum. Et recte, setzt Leibniz hinzu, nam et Lux nihil aliud quam rei agitatio intestina, tam fortis, ut conatus ejus extrorsum tendentes ad quodlibet et ex quolibet puncto sensibili directe et reflexe oculum feriant.

**) Guhrauer, Leben Leibniz. Theil I. S. 14.

***) Es lässt sich nicht bestimmt angeben, wann dieses Schreiben verfasst ist; indess geht aus seinem Inhalte hervor, dass es sehr bald nach Leibnizens Rückkehr aus Frankreich niedergeschrieben sein muss.

Leibniz hat in reifern Jahren über die Hypothesis physica dasselbe Urtheil gefällt, wie über die Dissertatio de Arte Combinatoria; er bezeichnet beide als Erstlingsschriften und will ihren Inhalt nicht weiter in Schutz nehmen*). Dennoch aber darf nicht unerwähnt bleiben, dass in diesem jugendlichen Versuch eine Fülle bemerkenswerther Ideen sich findet; unter andern soll hier nur hervorgehoben werden die Annahme eines den ganzen Weltraum erfüllenden, alle Körper durchdringenden Aethers und die Vorstellung vom Licht, zu der man in neuerer Zeit zurückzukehren sich veranlasst gesehen hat, um eine genügendere Erklärung sämmtlicher Lichtphänomene geben zu können**); ferner die ersten Spuren des Gesetzes der Continuität und der Lehre von den Monaden — Ideen, die Leibniz in späterer Zeit zur Grundlage seiner philosophischen Speculation gemacht hat***). —

Es ist bekannt, dass Leibniz während seines Aufenthalts in

---

*) Ein ausführliches Urtheil Leibnizens über die Hypothesis physica findet sich in der Abhandlung: Specimen Dynamicum pro admirandis Naturae legibus circa Corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad suas causas revocandis, P. I. Ebenso spricht er sich aus zwei Jahre früher in einem Briefe an Foucher (Journal des Sçavans 16. Mars 1693): Il est vrai que j'avois fait deux petits discours il y a vingt ans: l'un de la théorie du mouvement abstrait, où je l'avois considéré hors du systême, comme si c'étoit une chose purement mathématique; l'autre de l'hypothèse du mouvement concret et systématique, tel qu'il se rencontre effectivement dans la nature. Ils peuvent avoir quelque chose de bon, puisque vous le jugez ainsi, Monsieur, avec d'autres. Cependant il y a plusieurs endroits sur lesquels je crois être mieux instruit présentement, et entre autres, je m'explique tout autrement aujourd'hui sur les indivisibles. C'étoit l'essai d'un jeune homme qui n'avoit pas encore approfondi les Mathématiques. Les loix du mouvement abstrait que j'avois données alors, devroient avoir lieu effectivement, si dans le corps il n'y avoit autre chose que ce qu'on y conçoit selon Descartes et même selon Gassendi. Mais comme j'ai trouvé que la nature en use tout autrement à l'égard du mouvement, c'est un de mes argumens contre la notion reçue de la nature du corps.

**) Lux est motus aetheris ad sensum rectilineus celerrimus in quodlibet punctum sensibile circum circa propagatus.

***) Quaelibet atomus erit infinitarum specierum quidam velut mundus et dabuntur mundi in mundis in infinitum.

Paris (1672 bis 1676) Hugens's Umgang und Freundschaft genoss und dass er durch ihn veranlasst wurde, der höheren Mathematik ernstlicher als bisher seine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Da nun Hugens auf den Gebieten der Optik und Dynamik die tiefsten Studien und die ausgezeichnetsten Entdeckungen gemacht hat und da namentlich von ihm zur Erklärung der Phänomene des Lichts ein Aether angenommen wurde, den das Licht in wellenförmige Bewegung versetzt, so ist man wohl zu der Annahme berechtigt, dass Leibniz in den oben erwähnten Vorstellungen durch Hugens nicht allein bestärkt*), sondern auch ganz besonders angeregt wurde, der Behandlung der Dynamik ein anhaltendes Studium zu widmen**). Sein Interesse an diesem Gegenstande nahm zu, seitdem er erkannte, wie innig die Dynamik mit den tiefsten philosophischen Speculationen in Verbindung stand, und so ist es zu erklären, dass nicht nur in Leibnizens Correspondenzen mit Mathematikern und Philosophen die Dynamik nach seiner Auffassung eine hervorstechende Rolle spielt, sondern auch unter den von ihm selbst herausgegebenen Abhandlungen eine nicht geringe Anzahl dieser Disciplin gewidmet ist. Ausserdem ist ein zwar nicht ganz vollendetes, aber ziemlich umfangreiches besonderes Werk über Dynamik unter seinen nachgelassenen Manuscripten vorhanden, das hier zum ersten Mal gedruckt erscheint.

Aus den einleitenden Worten zu dem „Schediasma de resistentia medii" ergiebt sich, dass Leibniz noch während seines Aufenthalts zu Paris der Königlichen Akademie der Wissenschaften daselbst Mittheilungen über seine dynamischen Studien gemacht hatte. Da ihn der Gegenstand unausgesetzt beschäftigte, so benutzte er auf seiner Rückreise nach Deutschland die Muse, die ihm die Ueberfahrt von London nach Amsterdam gewährte, um seine Gedanken über die Grundbegriffe der Bewegung in Ordnung zu bringen. Es findet sich nämlich unter seinen nachgelassenen Manuscripten eine

*) Dies geht namentlich aus dem Brief an Honoratus Fabri hervor, der nach Leibnizens Rückkehr aus Frankreich geschrieben ist.

**) Siehe den Brief Leibnizens an Hugens, der hier zu der Abhandlung: Tentamen de motuum coelestium causis, als Beilage angefügt ist. Derselbe enthält Leibnizens Antwort auf den Brief XII. in der Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens. Er wurde, nachdem diese Correspondenz längst gedruckt war, unter den Leibnizischen Manuscripten aufgefunden.

umfangreiche Abhandlung in dialogischer Form, überschrieben: Pacidius Philalethi, deren Inhalt Leibniz in der folgenden von ihm selbst am Rande des Manuscripts hinzugefügten Bemerkung angiebt: Consideratur hic natura mutationis et continui, quatenus motui insunt. Supersunt adhuc tractanda tum subjectum motus, ut appareat cuinam ex duobus situm inter se mutantibus ascribendus sit motus, tum vero motus causa seu vis motrix; ausserdem findet sich daselbst noch die weitere Notiz: Scripta in navi qua ex Anglia in Hollandiam trajeci, 1676 Octobr. Diese Abhandlung indess zeigt die offenbaren Spuren einer Vorstudie; sie durfte deshalb in der vorliegenden Sammlung nicht aufgenommen werden. Es erhellt dies namentlich aus den einleitenden Worten, die hier mitgetheilt werden sollen: Cum nuper apud illustres viros asseruissem, Socraticam disserendi methodum qualis in Platonicis dialogis expressa est, mihi praestantem videri: nam et veritatem animis familiari sermone instillari et ipsum meditandi ordinem, qui a cognitis ad incognita procedit, apparere, dum quisque per se, nomine suggerente vera respondet modo apte interrogetur: rogatus sum ab illis ut specimine edito rem tantae utilitatis resuscitare conarer, quae ipso experimento ostendit indita mentibus scientiarum omnium semina esse. Excusavi me diu, fassus difficultatem rei majorem quam credi possit; facile enim esse dialogos scribere, quemadmodum facile est temere ac sine ordine loqui, sed oratione efficere, ut ipsa paulatim e tenebris eniteat veritas et sponte in animis nascatur scientia, id vero non nisi illum posse qui secum ipse accuratissime imerit, antequam alios docere aggrediatur. Ita resistentem me hortationibus arte circumvenerunt amici: sciebant diu me de motu cogitasse atque illud argumentum habere paratum. Forte advenerat juvenis familia illustris, caeterum curiosus ac discendi avidus, qui cum in tenera aetate nomen militiae dedisset successibusque egregiis inclaruisset, maturescente cum annis judicio elementa Geometriae attigerat, ut vigori animi artem atque doctrinam jungeret. Is Mechanicam scientiam sibi deesse quotidie sentiebat et in scriptoribus hujus artis plerisque non nisi pauca et vulgaria de elevandis ponderibus et quinque potentiis quas vocant tradi, at fundamenta scientiae generalioris non constitui, sed nec de ictu ac concursu, de virium incrementis ac detrimentis, de medii resistentia, de frictu, de arcubus tensis et vi quam Elasticam vocant, de cursu ac undulationibus liquidorum, de solidorum re-

sistentia aliisque hujusmodi quotidianis argumentis certa satis praecepta tradi querebatur. Hunc mihi adduxere amici atque ita instruxere, ut paulatim irretitus in colloquii genus laberer, quale toties laudaveram, quod illis ita successit, ut consumtis frustra tergiversationibus accenso omnium studio tandem obsequi decreverim *). —

*) Hieraus ergeben sich denn auch die Gründe, weshalb Leibniz die beiden Platonischen Dialoge Theätet und Phädon abgekürzt ins Lateinische übertragen hat. Er bezweckte lediglich dadurch, in der dialogischen Schreibart Gewandtheit zu erlangen, die ihm dann weiter dazu dienen sollte, über schwierige Gegenstände sich selbst klar zu werden. Diese beiden Uebersetzungen sind von Graf Foucher de Careil aus dem Leibnizischen Nachlass herausgegeben und noch dazu mit einer französischen Version begleitet worden (Nouvelles lettres et opuscules inédits de Leibniz, Paris 1857). Der genannte Herausgeber will daraus den Schluss ziehen, dass diese Uebersetzungen ein sicheres Zeichen seien, dass in der Platonischen Philosophie die Keime der Leibnizischen zu suchen wären (ils servent à prouver que Leibniz s'est inspiré de Platon, et qu'il y a des rapports entre leurs systèmes, und in einer Note S. XIII der Einleitung: Ce — die Uebertragung des Phädon — fut en 1676, au mois de mars. Cette date est indiquée par Leibniz en tête du Phédon. Elle prouve que ses études platoniciennes furent antérieures au développement de son système, et qu'elles font partie des sources de sa philosophie. Obwohl hier eine bestimmte Zeit angegeben ist, so meint doch Graf Foucher, Leibniz habe die Uebersetzung des Phädon „peu de temps après son retour de France" geschrieben; es scheint ihm unbekannt zu sein, dass Leibniz im October des Jahres 1676 nach Hannover kam).

Leibniz hat sich öfters der dialogischen Schreibart bedient; ausser der bereits oben erwähnten Abhandlung finden sich unter seinen mathematischen Papieren zwei andere sehr umfangreiche, auf diese Weise abgefasste Schriftstücke: das eine dynamischen Inhalts hat die Ueberschrift: Phoranomus seu de Potentia et Legibus Naturae; das andere betrifft die ersten Elemente der Arithmetik. Bekanntlich sind auch die „Nouveaux Essays sur l'entendement humain" in dieser Form geschrieben. Da in den letztern ein gewisser familiärer Ton des Ausdrucks herrscht, so wie es eben die Natur des Dialogs verlangt, und nicht die gehaltene, durchgearbeitete Darstellung der Abhandlung, so hat man daraus schliessen wollen, dass Leibniz absichtlich seine Philosophie bald esoterisch bald exoterisch vorgetragen habe. Mir scheint diese Unterscheidung nicht sehr glücklich gemacht zu sein; man hat das, was die Form betrifft, auf den Inhalt übertragen. Leibniz besass das feinste Gefühl für die Sprache; je nachdem er die eine oder die andere Form der Darstellung wählte, verstand er den Gedanken darnach umzuge-

Nach Deutschland zurückgekehrt fand Leibniz in den neu gegründeten Actis Eruditorum Lipsiensium die beste Gelegenheit, die Ergebnisse seiner dynamischen Studien zu veröffentlichen. Er begann mit der Abhandlung: Demonstrationes novae de resistentia solidorum, die im Jahre 1684 erschien und deren Inhalt einige Jahre später die Veranlassung wurde zur Anknüpfung der Correspondenz zwischen Jacob Bernoulli und Leibniz. Es folgten im Jahre 1685 der Aufsatz: Demonstratio geometrica Regulae apud Staticos receptae de momentis gravium in planis inclinatis etc., und im Jahre 1686: Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservari etc., in welcher letztern Leibniz den ersten Angriff auf das Princip der Cartesianischen Dynamik machte und als falsch nachwies. Die Folge davon war ein langandauernder Streit mit den Anhängern des Cartesius. Da hierdurch Leibniz veranlasst wurde, in einem grössern Werke seine Ideen über die Begründung der Dynamik im Zusammenhang darzustellen, so wird weiter unten ausführlich davon die Rede sein.

Im Jahre 1689 erschienen in den Actis Eruditorum die Abhandlungen: De resistentia medii, und: Tentamen de motuum coelestium causis. Die letztere, die hier in nähere Betrachtung zu ziehen ist, wurde von Leibniz während seiner italienischen Reise in Rom geschrieben, nachdem er daselbst in den ihm zugekommenen Actis Erudit. die Inhaltsanzeige von Newton's Principia mathematica philosophiae naturalis, von deren Erscheinen er damals zuerst Kenntniss erhielt, gelesen hatte. Sein Scharfblick liess ihn sogleich erkennen, dass durch die Gravitationshypothese, welche die Basis des genannten Werkes bildet, im Grunde nichts beigebracht wird zur Erklärung der Mechanik des Himmels, denn sie ist bereits im dritten Kepplerschen Gesetz enthalten; auch meinte er, dass die ausschliesslich mathematische Behandlung, wie sie sich durchgehends im Newtonschen Werke findet, den Gegenstand nicht ausreichend erschöpfe. Leibniz hielt sich demnach berufen, in

---

stalten. Das beweisen die Abhandlungen, die er über denselben Gegenstand in verschiedener Sprache geschrieben hat; die französisch abgefassten bewegen sich durchaus in leichterer Form, so wie es die Natur dieser Sprache verlangt, dagegen herrscht in den lateinisch geschriebenen die gehaltene Ausdrucksweise.

Betreff dieser hochwichtigen Frage, die ihn seit dem Beginn seiner wissenschaftlichen Studien beschäftigt hatte, in einem kurzen Umriss, wie es eben an einem fremden Orte, entfernt von seinen Papieren und sonstigen Hülfsmitteln geben mochte, seine Ansichten zusammenzustellen. Sie waren der Hauptsache nach noch dieselben, die er in der Hypothesis physica zu Grunde gelegt hatte; auch hatte er, was die Methode anlangt, nämlich zur Erklärung der Gesetze der Natur von vollständig zugestandenen und erforschten Phänomenen den Ausgang zu nehmen, seine Meinung nicht geändert. Leibniz ging deshalb von der durch die Beobachtungen festgestellten Thatsache aus, dass die planetarische Bewegung elliptisch ist; da nun eine solche elliptische Bewegung einen Punkt voraussetzt, von dem eine Kraftäuserung ausgeht, die nach dem Quadrat der Entfernung abnimmt, ein solcher Punkt aber in der Sonne gegeben ist, von welcher das Licht durch den ganzen Weltraum sich verbreitet, so glaubte Leibniz die richtige Grundlage zur Erklärung der Mechanik des Himmels gefunden zu haben, insofern er annahm, dass das von der Sonne ausgehende Licht eben jene nach dem Quadrate der Entfernung abnehmende Kraft sei, welche den im Kosmos vorhandenen Aether in Bewegung setze, wodurch dann weiter die planetarischen Bewegungen um die Sonne hervorgerufen werden, und zwar um so mehr, als bereits die Eigenschaft des Lichtes nachgewiesen war, dass die Stärke der Erleuchtung nach den Quadraten der Entfernung abnimmt. Dadurch war denn auch für die Leibnizische Basis, welche dem Lichte eine solche Kraftäusserung beilegte, der Vorwurf, den man der Gravitationshypothese machte, dass nämlich ihre Annahme sich auf keine andere Weise rechtfertigen liesse, beseitigt. Es bedarf hier kaum der Erwähnung, dass die Gravitationshypothese Newton's und die durch ihn zur Geltung gebrachte einseitig mathematische Behandlung der Gesetze des Weltalls allgemein angenommen worden ist; Leibnizens Versuch dagegen, die himmlischen Bewegungen mit Hülfe einer metaphysischen Grundlage zu erklären, wurde noch bei seinen Lebzeiten vielfach bekämpft und gerieth zuletzt ganz in Vergessenheit. Und dennoch verharrte Leibniz bei der Behauptung, dass die Gravitationshypothese Newton's unzulänglich sei, ebenso wie sein Lehrer und Freund Hugens*). Er unterwarf nicht nur,

---

*) Sieh. den Briefwechsel zwischen Leibniz und Hugens, Bd. II.

nachdem er Newton's Werke genau studirt hatte, den oben genannten, unter sehr ungünstigen Verhältnissen ausgearbeiteten ersten Entwurf einer sorgfältigen Revision — es ist dies die hier zum ersten Mal gedruckte zweite Bearbeitung der Abhandlung: Tentamen de motuum coelestium causis — sondern er schrieb noch in der spätern Zeit seines Lebens als Erwiderung auf den Angriff den David Gregory in seinem Werk: Astronomiae physicae et geometricae elementa, Oxon. 1702, gegen die Leibnizische Theorie der himmlischen Bewegungen gerichtet hatte, eine ausführliche Erläuterung seiner Ansicht über die Mechanik des Himmels. Es ist dies die Abhandlung, die unter dem Titel: Illustratio Tentaminis de motuum coelestium causis, hier zum ersten Mal gedruckt erscheint; die Herausgeber der Acta Eruditorum verweigerten, angeblich wegen des grossen Umfangs, die Aufnahme in die gedachte Zeitschrift, weshalb Leibniz sich genöthigt sah, ein Excerptum daraus im Jahre 1706 zu veröffentlichen. —

Bisher ist nur der Theil der Leibnizischen Dynamik zur Sprache gekommen, der sich auf die Mechanik des Himmels bezieht; es bleibt noch übrig zu betrachten, wie Leibniz die allgemeinen Principien der Dynamik aufgefasst hat. Dazu ist zunächst nöthig, sein Verhältniss zur Philosophie des Cartesius zu untersuchen und namentlich zu prüfen, ob Leibniz jemals ein Cartesianer gewesen ist, worüber, besonders auf Grund einiger von Erdmann aus dem Leibnizischen Nachlass publicirten kleinern Aufsätze in neuester Zeit viel hin und her gestritten worden ist. In Uebereinstimmung mit seinen Selbstbekenntnissen kann der, der mit dem philosophischen und mathematischen Bildungsgang Leibnizens vertraut ist, ohne grosse Schwierigkeit nachweisen, dass Leibniz niemals ein entschiedener Anhänger der cartesianischen Philosophie gewesen ist, denn so oft er Cartesius nahe tritt oder über ihn zu sprechen kommt, sei es in Bezug auf Mathematik oder Philosophie, immer verhält er sich, und zwar von der frühesten Zeit an, critisirend und geht über Cartesius hinaus; kurz, Leibniz stand, wie er so oft von sich erzählt, in der Philosophie auf eigenen Füssen. Dies erhellt namentlich aus einem Schriftstück, welches von Leib-

S. 57. — Leibniz ist oft getadelt worden, als habe er nicht für werth gehalten, Newton's Principia zu lesen; durch den hier als Beilage mitgetheilten Brief an Hugens wird diese Behauptung als irrig zurückgewiesen.

niz im spätern Lebensalter (Mai 1702) niedergeschrieben hier zum ersten Mal veröffentlicht wird *). Er bespricht darin auf das Eingehendste nicht nur sein Verhältniss zu Descartes, sondern auch die Grundlagen seiner Philosophie überhaupt, so dass dies Dokument vielleicht vollständiger als ein bisher bekanntes die Beziehungen der Leibnizischen Philosophie zu den frühern philosophischen Systemen in den allgemeinsten Umrissen darlegt. Zugleich geht daraus hervor, dass Leibniz zum Aufbau seiner Philosophie von dynamischen Principien den Ausgang nahm. Er begann mit der Speculation über die Natur des Körpers. Leibniz wies nach, dass nicht, wie Cartesius meinte, die Natur des Körpers lediglich in der Ausdehnung bestehe, denn die Ausdehnung ist kein ursprüngliches, absolutes Attribut des Körpers, sondern nur ein relatives, insofern dabei Bezug genommen wird auf das was ausgedehnt wird. Indem nun Leibniz weiter ging und sich die Frage vorlegte, worin das Wesen des Körpers bestehe, so fand er dass ausser der Materie noch etwas anderes im Körper vorhanden sein müsse; er bezeichnet es als „τὸ δυναμικὸν seu principium mutationis et perseverantiae insitum", also das, was gegenwärtig die Inertie oder das Beharrungsvermögen genannt wird. Diese „potentia in corpore", wie Leibniz es auch nennt, ist doppelter Art: passiv und activ; jene bildet die Materie oder Masse, diese die Entelechie oder Form. Die passive Kraft ist die Undurchdringlichkeit oder der Widerstand, den ein Körper leistet; sie ist im Körper überall dieselbe und seiner Grösse proportional. Die active Kraft ist nicht allein das, was schlechthin Kraft genannt wird, sondern sie schliesst auch den „conatus" ein, worin namentlich das Wesen der Entelechie besteht. Die active Kraft ist doppelter Art: primitiv und derivativ, d. h. substantiell und accidentell. Die erstere bildet in Verbindung mit der Materie die Substanz des Körpers; die zweite ist der „conatus" oder die Tendenz zu einer bestimmten Bewegung. Diese Tendenz, die in der Summe immer dieselbe bleibt, ist von der Bewegung selbst, deren Quantität sich ändert, unterschieden. Zwischen der derivativen Kraft und dem in Bewegung Setzen (Actio) findet eben der Unterschied statt, wie zwischen dem Augenblicklichen und Successiven; die Kraft ist schon im ersten Augenblick vorhanden, die „Actio" bedarf der Zeit und ist deshalb gleich dem

*) Sieh. die Beilage zu dem Brief Leibnizens an Honoratus Fabri.

Produkt aus den Kräften in die Zeit. Es kommt mithin bei der „Actio" der Körper, die Kraft und die Zeit in Betracht. Diese metaphysische Grundlage der Dynamik hatte Cartesius ebenso wenig als seine Schüler begriffen, und daher kam es, dass sie die Kraft, welche die Bewegung hervorbringt, mit der Bewegung selbst identificirten; sie meinten, die Kräfte verhielten sich zu einander im zusammengesetzten Verhältniss der Massen und der Geschwindigkeiten oder dass die Kraft der Quantität der Bewegung d. h. dem Produkt aus der Masse und der Geschwindigkeit gleich zu setzen sei, während Leibniz zeigte, dass die Kräfte sich zu einander verhielten wie die Produkte der Massen und der Quadrate der Geschwindigkeiten. Mit diesem Ergebniss trat Leibniz zunächst öffentlich hervor in dem Aufsatz: Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservari, qua et in re mechanica abutuntur (Act. Erudit. an. 1686). Die Folge davon war ein langer hartnäckiger Kampf mit den Cartesianern, der zuerst in den Nouvelles de la République des lettres geführt wurde, später als Denis Papin als Kämpfer für Cartesius auftrat, in den Actis Eruditorum sich fortsetzte. Mit dem letztern kam Leibniz dadurch in eine sehr lebhafte Correspondenz, die anfangs lediglich über den in Rede stehenden Punkt sich bewegte. Um dem Hin- und Herreden ein Ende zu machen und den Streit auf ein bestimmtes Ziel hinzuleiten, beschloss Leibniz die Gründe, die für und gegen seinen Satz aufgestellt wurden, in streng logische Form zu bringen*). So gelang es ihm seinen Gegner zum Schweigen zu bringen. Ein solches Dokument, das in lateinischer Sprache abgefasst und von ihm zur Veröffentlichung bestimmt war, befindet sich unter seinen nachgelassenen Papieren; es ist hier als Beilage zu den Abhandlungen, die Leibniz gegen Papin schrieb, abgedruckt. Vielleicht entwarf Leibniz auch um diese Zeit, nach Beendigung seines Streites mit Papin, die bisher noch nicht gedruckte Abhandlung: Essay de Dynamique sur les loix du mouvement, où il est monstrè, qu'il ne se conserve pas la même Quantité de Mouvement, mais la même Force absolue, ou bien la même Quantité

---

*) Unter den Leibnizischen Papieren findet sich ein Auszug aus der Correspondenz mit Papin, worin der Streit bis zum 13. Syllogismus fortgeführt ist.

de l'Action Motrice. — Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass es Leibniz, selbst nachdem er den Streit mit den Cartesianern durchgekämpft hatte, ganz besonders darum zu thun war, den oben angeführten Satz über das Mass der Kräfte zur allgemeinen Anerkennung zu bringen; in seinen Correspondenzen mit Joh. Bernoulli, dem Marquis de l'Hospital und anderen bedeutenden Männern seiner Zeit wird sehr ausführlich darüber gehandelt. Er war sich sehr wohl bewusst, dass seine Dynamik die Grundlage seiner Philosophie bildete und dass demnach, falls die letztere zur Geltung kommen sollte, zuerst die Principien seiner Dynamik zur Anerkennung gebracht werden müssten.

Noch ist des grossen selbstständigen Werkes über Dynamik zu gedenken, zu dessen Abfassung Leibniz während seiner Reise durch Italien veranlasst wurde. Das Nähere darüber erzählt er selbst in einem Briefe an Joh. Bernoulli (Bd. III. S. 259 f.): „Cum Romae essem anno 1689 et cum Auzouto, eruditissimo Gallo, qui inter Academiae Scientiarum Regiae velut conditores fuit, multum de his disputarem, meditationes meas in ordinem redigens libellum adumbravi, in quo demonstrantur haec omnia, de vi scilicet tam absoluta, quam directiva, et conservando progressu centri gravitatis, aliaque his non inferiora. Eum transiens per Florentiam amico, in Mathematicis egregio, petenti reliqui edendum, et ille redegit in mundum omnia studiose; sed cum finis libro adhuc deesset, quem summittere in me receperam, per me stetit hactenus, quominus editio sequeretur; nondum enim colophonem adjeci, partim quod multa nova subinde nascerentur, quae mererentur addi, partim quod his, quos videbam mea non ut par erat accepisse, nollem velut obtrudere pulchras veritates." Der hier erwähnte Freund ist der Freiherr von Bodenhausen, der unter dem angenommenen Namen eines Abbé Bodenus als Erzieher der Söhne des Herzogs von Toskana am Hofe zu Florenz lebte. Wahrscheinlich hatte derselbe bestimmt, dass nach seinem Tode alle seine mathematischen Papiere an Leibniz übersandt werden sollten; so geschah es denn, dass das Original nebst der davon genommenen sorgfältigen Abschrift wieder in Leibnizens Hände gelangte. Aus einigen Randbemerkungen, die im Originalmanuscript sich finden, ist zu schliessen, dass Leibniz anfangs die Absicht hatte, das ganze Werk einer Revision zu unterwerfen und zum Druck vorzubereiten; indess andere Arbeiten nahmen seine Zeit zu sehr in Anspruch, und er zog

es vor, die Principien seiner Dynamik in kürzerer Fassung in den Actis Eruditorum zu veröffentlichen. So ist wahrscheinlich die Abhandlung: Specimen dynamicum pro admirandis Naturae Legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis etc. entstanden. Eine Fortsetzung derselben, die von Leibniz in Aussicht gestellt wurde, ist nicht erschienen; sie fand sich aber in seinem Nachlass vor und folgt hier als zweiter Theil der eben genannten Abhandlung.

HYPOTHESIS
PHYSICA NOVA

QUA

PHAENOMENORUM NATURAE PLERORUMQUE CAUSAE AB UNICO QUODAM UNIVERSALI MOTU, IN GLOBO NOSTRO *SUPPOSITO*, NEQUE TYCHONICIS, NEQUE COPERNICANIS ASPERNANDO, REPETUNTUR,

AUTORE

G. G. L. L.

MOGUNTIAE
TYPIS CHRISTOPHORI KUECHLERI,
ANNO
M. DC. LXXI.

ILLUSTRI SOCIETATI

REGIAE BRITANNICAE

COGNITIONIS HUMANAE

LOCUPLETATRICI.

Nisi compertum haberem, malle Vos ex variis orbis partibus nova industriae in cogitatis experimentisque, quam eloquentiae in re amplissima, et tot aliis dicta, id est, laudibus Vestris, quibus audiendis prius quam merendis fessi estis, tentamenta ad Vos transmitti; non posset hoc pietatis officium, quod omne Vobis literarium nomen debet debebitque, sine piaculo praetermitti: nunc quod mavultis accipite. Intellexeram ex Oldenburgero Vestro, viro eximio, conjecturas quasdam meas de faciliore ac simpliciore aliqua, quam passim tradi solet, causarum naturalium explicandarum Hypothesi Vobis fortasse non ingratas fore. Hanc ergo spem secutus sistere hoc quicquid est et Vobis dicare volui, non ut rem aliquo pretio censendam, sed ut Canonem quendam, quem utcunque exiguum, significandae recognitioni, quam maximis Vestris de publico meritis omnes debent, sufficere ICtis nostris placet.

Theoria motus concreti,

seu

Hypothesis de rationibus phaenomenorum nostri Orbis.

1. Supponantur initio Globus Solaris, Globus Terrestris et spatium intermedium, massa, quod ad Hypothesin nostram attinet, quiescente, quam aetherem vocabimus, quantum satis est (omnimodam enim plenitudinem Mundi status, quem sentimus, per alibi demonstrata, non fert) plenum.

2. Necesse est igitur esse quendam motum ante omnia tum in globo solari, tum in globo terrestri. Cum enim globi isti duo habere debeant partes cohaerentes, ne ad quemlibet levissimum rei quantulaecunque impactum dissolvantur aut perforentur, nulla autem sit cohaesio quiescentis (per dicta in abstracta motus Theoria th. 20 quam suo loco dabimus), motus in iis aliquis supponendus est: quae fortasse unica ac prima demonstratio est necessarii motus terrae. Quanquam, ut §. quoque 35 infra admonebitur, ad summam Hypotheseos nostrae nihil referat, an circulatio terrae admittatur, cum Circulatio Lucis seu aetheris circa terram qua potissimum utimur vid. §. 9, facile se omnibus approbare, ni fallor, possit.

3. Supponamus igitur, si placet, tum in globo solis tum in globo terrae motum circa proprium centrum, nam alios eidem aetheri interspersos magnos parvosque globos circa suum centrum motos, in quibus eadem, quae in terra nostra, fieri proportione possunt, id est, non planetas tantum quos videmus, sed et innumerabiles quosdam velut mundulos parvos, quos non videmus, nunc non consideramus.

4. Sed in sole simul et alius motus supponendus est, quo agat extra se, unde causa in mundo motus in se non

redeuntis derivetur: motus enim circa proprium Centrum extra se non agit: nam quod praeclari Viri Torricellius et Hobbius statuere, sola solis gyratione circa proprium Centrum totum aetherem cum planetis circa solem ferri, fermentare, lucem efficere, imo rem ita motam projicere sibi imposita per tangentem, tenuiora magis, crassiora minus, unde cum similis sit et in terra motus, sequatur crassiora in tenuium rejectorum locum succedere, ac proinde gravia esse, admittere non possum: sequetur enim ut lapis ad terram, ita terram ceterosque planetas ad solem tendere; nec dici potest distantia minui efficaciam, cum contra in hac hypothesi ob majorem majoris radii circulum augeatur. Neque hic ad experientiam provocare licet liquidi quiescentis sola solidi in ipso circa proprium centrum gyratione commoti, ut baculi in vase motus circa suum centrum aquam totam commovet, cum ostensum sit in abstracta motus Theoria, pleraque repercussionum phaenomena non oriri ex liquidis motus notionibus, sed habere longe alias ab oeconomia et motu systematis insensibili causas, quemadmodum gravitas, attractio, flexorum restitutio, aliaque id genus: speciatim vero baculus aquam ideo secum commovet, quia ea ei gravitate sua atque intestino motu innititur, quod de aethere dici non potest, in quo alia praeter solem causa motus nulla esse supponitur, cum liquida nostra jam tum, etiam remoto baculo, sint in perpetuo motu. Ut taceam gyrationes circa proprium centrum, quas nos instituere solemus, plerumque valde vacillare. Ut igitur sol radiare seu agere in omnes partes possit, necesse est quendam in ejus partibus motum esse, a motu totius circa proprium centrum distinctum. Et concessis cum Copernico pluribus Orbibus magnis, eadem est proportionalis sui solis cuique ratio erit.

5. Is motus partium solis (seu rei cujuslibet radiantis) non potest recta extrorsum tendere, alioquin dudum omnes avolassent: supponendus est ergo motus partium praeter gyrationem totius, varie circularis, aut alioquin in se rediens, ex quarum concursu, quoties bisecabilis est, quaedam per rectam lineam extrorsum expellantur per problem. 7 Theoriae motus abstracti. Et tot quidem, ut non possit dari punctum sensibile circa solem ad tellurem usque et ultra, ad quod non quolibet instanti sensibili radius aliquis solis, id est, aetheris agitatio per emissam a sole recta linea partem (etsi non pars ipsa) perveniat. Quae res ob divisibilitatem cujuslibet continui in partes quantumvis par-

vas in infinitum non est difficilis explicatu. Ceterum ex his, ut obiter admoneam, necessario demonstrari potest, impossibile esse, ut sol luxerit ab aeterno, nisi sit unde perpetuo reparetur.

6. Hi jam lucis radii agent in globum terrestrem. Supponatur autem globus terrestris initio fuisse totus homogeneus, atque ita neque tam rarus, ut aër est, neque tam crassus, ut terra est, sed ut scriptura quoque sacra innuit, naturae ad aquam accedentis. Idque nec Helmontius abnuerit, qui aquam ponit principium rerum, ac terram aquae sedimentum facit.

7. Hic globi status radiis solis (et ante solem lucis primigeniae post in solem collectae, ad hypothesin enim nostram perinde est) ingruentibus mirifice mutabitur: cum enim per abstractam motus doctrinam th. 19 nulla sit corporis cohaesio eodem tempore in tota facie, globus terrae pulsatus, ubi non cohaeret, dehiscet, aetheremque admittet: nam in statu naturali, qualis supponitur primus, seu in abstracto, nulla est globi rotantis homogenei cohaesio, nisi in lineis aequatori parallelis. Igitur omnes paralleli sensibiles, eorumque concentrici abire poterunt a se invicem, et luce plerisque ingruente dehiscent. Porro tot ictibus pleraque centrorsum ibunt, major materiae pars in fundum collecta terram dabit, aqua supernatabit, aër emicabit: intrusus Aether (is enim fortasse est ille Spiritus Domini, qui super aquis ferebatur, easque digerebat, ex eis ventilatione sua crassiora praecipitabat, tenuiora sublimabat, cujusque ablatione omnia in pulverem inertem, incohaerentem, mortuum rediguntur) et intus omnia pervadet, passimque in bullas intercipietur, ex conatu erumpentis irrumpentisque recto, et motum intercipientis circulari velut fusione conflatas; et de caetero summum, ut ante, maximo sui velut oceano, tenebit. Haec non ita capienda sunt, quasi re ipsa sic ortum globum nostrum esse necesse sit, quanquam cum scripturae sacrae traditis mirifice consentiant, sed sufficit, quam causam initii fingi, eam continuationis (velut perpetui initii) intelligi posse, et proinde hypothesin originis, saltem in causis praesentibus percipiendis, imaginationis adjumentum esse.

8. Caeterum similem aliorum globorum (praesertim cum quilibet magnus Orbis suum solem habere videatur) originem non est hujus loci declarare; pertinent talia ad doctrinam de systemate

mundi; quemadmodum id quoque, qua ratione ex rotatione solis circa proprium centrum concurrente ejus actione rectilinea in terram oriatur motus terrae circa solem, et ex motu terrae circa proprium centrum, concurrente ejus lucem solarem reflectentis actione rectilinea in lunam, motus lúnae circa terram; quae de ceteris planetis eadem probabilitate dicere licet: nam et Torricellio dudum visum est, motus globorum a se invicem derivari. Cometae sive meteora sint, id est corpora transitoria, sive globi constantes (quorum utrum verius, experimentis recursus dijudicandum), poterit tamen forte ex caeterorum globorum in eos actione explicari motus: lux autem illa caudata soli aversa pene scyphi vitrei liquore pleni exemplo declarationem recipit.

9. Terra vero nostra, ut ad hanc redeamus, etsi radiis lucis dehiscens in partes heterogeneas abierit, ubique tamen subtilissimo aethere penetratur. Is aether proportionatam sibi subtilitate partium radiorum lucis actionem potissimum recipit. Cum igitur terra agatur circa proprium centrum ab occidente versus orientem ex hypothesi, subtilissimus aether terram circumdans contrario motu non tantum retardationis, sed et obtinentiae, lucem secutus, movebitur ab oriente versus occidentem, cujus etiam in Oceano vestigia deprehenduntur.

10. Atque hic est ille universalis motus in globo nostro terr-aqu-aëreo, a quo potius, quam atomorum figuris aut ramentorum ac vorticum varietatibus, res sunt repetendae.

11. Principio autem ex fluidi aestuatione et fusione per lucem seu calorem ortae sunt bullae innumerabiles ac magnitudine crassitieque variantes. Nam quoties subtilia perrumpere per densa conantur, et est quod obsistat, formantur densa in cavas quasdam bullas, motumque partium internum ac proinde consistentiam seu cohaesionem (per nostram de motu Theoriam theor. 17) nanciscuntur. Quod ex primis illis abstractisque principiis speciatim deducere proclive est. Idem ex officinis vitrariis constat, ubi ex motu ignis circulari et spiritus recto, vitra, simplicissimum artificialium genus, parantur; similiter ex motu terrae circulari, lucis recto, natae sunt bullae.

12. Hae jam bullae sunt semina rerum, stamina specierum, receptacula aetheris, corporum basis, consistentiae causa,

et fundamentum tantae varietatis, quantam in rebus, tanti impetus, quantum in motibus admiramur: hae si abessent, omnia forent arena sine calce, avolaretque gyratione densorum expulsus aether, ac terram nostram mortuam damnatamque relinqueret. Contra a bullis, gyratione circa proprium centrum firmatis, omnia solidantur et continentur. Quae ratio est etiam, quod fornicata, ea quam admiramur firmitate polleant, cur vitra rotunda in experimentis elasticis subsistant, alterius figurae dirumpantur.

13. Et sane qui rem accurate intuebitur, nihil verius comperiet. Tota aqua innumerabilium bullarum congeries, aër nil nisi aqua subtilis est: aërem enim in eo ab aethere distinguo, quod aër est gravis, aether circulatione sua causa gravitatis. Unde aër, et quidquid in eo natat, ut nubes, ut projecta, gyrantur cum terra, uti aqua cum vase; mare etiam litoribus non clausum, ut oceanus, qui terram includit potius quam ut ei includatur, cum fundo. Quanquam, ut dixi, non desit retardatio aliqua, seu motus in contrariam partem, ex quo, accedente fortissima Oceani sub Tropicis commotione, rarefactione, attractione, per lucem solarem, quam contrà motum terrae, facilius quam terra, quia levior, sequitur, repetita item aliquoties quotidie (nam aqua semel allisu dispersa spatio, ut se in cumulum recolligat, indiget) Oceani in litus Americae nobis citimum illisione aliisque particularibus illisionibus et absorptionibus: tum Luna aërem, cum plena luce micat, sub se rarefactione leviorem ac minus prementem, aquam ergo sub se intumescentem reddente; et contra, cum nova est, aërem sub se tenebris densiorem et magis prementem, aquam ergo versus litora intumescentem faciente: denique in aequinoctiis directa oppositione motus lucis seu aetheris ad motum terrae (nam tunc fons lucis seu motus solis opticus est in aequatore) omnia a motu aetheris pendentia acuente: his, inquam, concurrentibus causis, aestus quotidiani, in noviluniis ac pleniluniis (eodem contrariarum causarum effectu) maxime vero aequinoctiis aucti, currentium universalium et particularium, denique ventorum flatorum, caeterorumque aquae aërisque motuum ordinariorum phaenomena non difficulter deducuntur. Ignem hic non numero, nam flamma est tantum exhalatio ignita, scintilla fuligo ignita, ignis ipse nil nisi aetheris aërisque erumpentis et displosi collectio.

14. At quid de Terra? Non est dubitandum, totam ex bullis constare, nam basis terrae Vitrum est, Vitrum bulla

densa. Et constat fluxione, id est, aestuatione ab aethere collecto seu igne se rebus insinuante commota, postremum esse exitu, primum fine ac natura rei, vitrificationem. Quid mirum igitur, globo terrestri ab actione lucis transformato ac fluente, densa seu terrestria in vitrum, aquam aëremque in tenuiores bullas abiisse? neque tunc, ut in homogeneo, nondum firmatis rebus, ea, qua nunc, contra torrentem constituti systematis, in mutando, vi opus erat. Cum in statu libero seu naturali quantacunque a quantuliscunque facile moveantur, in statu praesenti systematico atque, ut sic dicam, civili, non nisi proportionata ad sensum a proportionatis.

15. Porro has bullas, haec vitra varie intorta, figurata, glomerata esse, facile cogitatu est, ad tantum rerum apparatum producendum, de quo mox in origine specierum, nunc totius systematis affectionem, id est gravitatem praeoccupemus: ac merito quidem, cum gravitas plerorumque in globo nostro extraordinariorum motuum causa, aut certe clavis sit, eorum etiam, qui in speciebus privatim exeruntur, et danda sit Physico opera, ut ad mechanicas rationes, quippe simplicissimas, quoad ejus fieri potest, omnia reducantur.

16. Gravitas oritur ex circulatione aetheris circa terram, in terra, per terram, de cujus causa supra §. 9 et 10. Is porro maxime aquam et aërem penetrat, quippe porosiores. Unde terra in aqua, nisi cum plus aetheris superficiarii continet, quam ipsa aqua, aqua in aëre descendit.

17. Nimirum quidquid ab Homogeno divulsum est (nam conjuncta ob gravitationem insensibilem in omnes partes mutuo se tollentem sensibiliter non gravitant) positumque in loco plus aetheris, minus terrae habente, jam circulationem aetheris impedit et turbat, et quanto magis elevatur, tanto turbat magis, quia totus aether circumterraneus, per se homogeneus, est instar oceani aut aëris variis rivis, sinubus, lacubus, fretis, euripis omnia percurrens. Omne autem heterogeneum circulationem homogenei liquidi turbat, quia etsi pars una partem liquidi abripientem sequi conetur, altera tamen ob diversam consistentiae seu divisibilitatis rationem sequi non potest. Quae etiam ratio est, cur in liquoribus soluta paullatim dejiciantur emicentque in Cristallos, et cur conclusa et digesta paullatim fermentent, add. infr. §. 59.

18. Haec jam ratio est, cur et aër, et aqua, et terra in aethere gravitent: nam circulatione ejus dejiciuntur. Cum enim

turbent circulationem, expellentur; non sursum, nam eo magis turbabunt (quia superficies sphaericae crescunt in duplicata ratione diametrorum, non in eadem cum diametris ratione; ac proinde sectionum quoque in idem corpus agentium inaequalitas major evenit), ergo deorsum, id est descendent. Hinc porro incrementum impetus ob novam ubique inter descendendum in qualibet aetheris liberi aut liberioris, quam rei illius ratio fert, parte impressionem; hinc caetera mechanica ac statica phaenomena communi more modoque deducentur.

19. Potentiae enim duo sunt Augmenta mechanica: impetus a lapsu, et distantia a linea directionis. Tertium est physicum, quod soleo Nisum vocare, qualis est a motu musculorum, de quo infra §. 58. Distantia autem a linea directionis auget potentiam, quia ex nostra de motu Theoria, theor. 24, omnis potentia in corporibus pendet a celeritate, cum res quantacunque continua moveri possit a quantulacunque celerius mota; jam in omnibus machinis fundamentalibus, vecte seu statera, cuneo (quatenus in cuneo non concurrit vis elastica, de quo alias), axe in peritrochio, cochlea, trochlea compertum est, semper in aequilibrantibus tanto celerius ascendere pondus, quam descendit onus, et contra, quanto onus est pondere majus, eamque esse linearum eodem tempore confectarum rationem, quae est ratio distantiarum a linea directionis.

20. Supersunt tamen nonnulla etiam in motibus vulgaribus phaenomena, prima specie contemnenda, at solutu difficilia, si acutius introspicias. Exempli gratia, cur dura duris impacta resiliant, cur quaedam flexa se tanta vi restituant, cur si ingeniosissimorum virorum Hugenii Wrennique experimenta universalia sunt, corpus impactum quiescenti, quasi permutatione facta, ipsum in ejus loco consistat, motum vero suum in alterum transferat; par est ratio de Concurrentibus duobus. Talia enim et multa alia id genus, abstractis motuum rationibus, nisi globi nostri oeconomia accedat, consentanea non sunt.

22. Cujus rei specimen in Reflexione ac refractione haberi satis illustre potest. In ore omnium est, angulum incidentiae et reflexionis esse aequales, et favent utique experimenta tum phoronomica, tum optica; blanditur ipsa theorematis compendiosa et bella speciositas, quae maximis etiam Viris imposuit persuasitque posse propositionem universaliter ex abstracta motus natura demonstrari. Credidi ego quoque, donec

seria ac severa inquisitione adhibita omnem operam ludi animadverti. Examinavi demonstrationes Digbaei, Cartesii, Hobbii (at quantorum Virorum!) deprehendique plus valuisse dulcedinem sententiae, quam rigorem demonstrationis. Interea tamen negari non potest, sensu satis firmari, ac proinde inter observationes potius quam theoremata referendam propositionem. Ratio igitur hujus constantiae, si non ex Theoria motus abstracti, saltem ex Hypothesi motus concreti, seu Oeconomia rerum praesenti reddenda est. Intererat mundi rem sic institui: nam si absque hac reflexionis lege esset, visus auditusque existere non possent. Credibile est, nonnunquam hanc angulorum aequalitatem inde oriri, quod et si appareat, non est tamen rectus impingentium motus; in alteram igitur partem circulum vel ellipsin continuant, ac proinde evenit, ut Angulus reflexionis et incidentiae sint aequales, quia uterque est angulus contractus unius ejusdemque arcus ab utroque latere. Vide theor. mot. abstract. th. 8, 9. Porro si perpendicularis sit ad sensum impactus, ita acute sibi junguntur duo arcus, impactus et repercussionis, ut eadem linea ad sensum esse videatur. Quod nullis experimentis refutari potest, quia plerique motus, qui recti apparent, reapse curvi sunt, sed ita insensibiliter ut omnia phaenomena perinde eveniant ac si revera recti essent. Sed est adhuc alia ratio frequentior et oeconomiae rerum congruentior, aequalitatem anguli incidentiae et reflexionis universaliter explicandi. Nimirum quod passim de omnibus corporibus absolute assumitur, aliud sibi impingens repercutere aut refringere, id quidem non nisi de Elasticis seu post compressionem vel dilatationem se restituentibus verum est. Sed admirando Creatoris sive artificio sive ad vitam necessario beneficio, omnia corpora sensibilia ob aetheris circulationem per *hypothesin nostram* sunt Elastica; igitur omnia corpora sensibilia reflectunt aut refringunt. Nullum vero corpus per se consideratum, nisi perpetua aetheris ventilatione animaretur, reflecteret vel refringeret, saltem iis quae vulgo feruntur legibus. Nam si corpus motum impingat in quiescens, totum perforabit sine ulla refractione, etsi impingens arenacei grani magnitudine, recipiens mille leucarum crassitie esset; sin et recipiens moveatur, et ictus in centrum motus dirigatur, idque in eadem linea, fortior vincet tardiorem, aut si aequales sunt, sequetur quies: sin impactus sit eccentricus, retento priori motui accedet novus circa proprium centrum. Si in diver-

sis lineis concurrant seu angulum faciant motu aequiveloce, movebuntur ambo linea angulum bisecante, aut, si non est bisecabilis, quiescent, quae omnia demonstrare ad abstractam motus Theoriam pertinent. At corporum sensibilium alia plane facies: omnia enim dura sunt motu quodam intestino in se redeunte; omnia discontinua sunt, unde caeteris paribus plus efficit moles; omnia Elastica sunt, seu compressa ac mox sibi relicta, ab aetheris gyratione in statum priorem restituuntur. Quas leges motus apparentis qui confundit cum regulis veri, ei similis est, qui quantum ad demonstrationes inter mechanica et geometrica nihil interesse credit: et tamen hactenus a nullo eorum, qui de motu philosophati sunt, res tanti ad solidas de Deo ac mente demonstrationes obtinendas momenti (ne quis laboriosam de primis istis abstractisque motus legibus inquisitionem fructu carere putet) satis, quod sciam, est observata. Restat, demonstremus, supposito sensibilium elatere, leges reflexionis ac refractionis consequi. Ac quod reflexionem attinet, si corpus durum, seu se restituens, impingat in aliud durum, quod penetrare nequeat, comprimet tamen secundum lineam, qua incidit in ipsum corpus recipiens, continuatam: corpus vero recipiens statim reaget ea linea, qua optime potest: potest autem in impactu perpendiculari non alia, quam qua impactus factus est, ac proinde corpus impingens redibit via qua venit; at in impactu obliquo reaget ab ea plaga, in qua res ei adhuc integra, seu in quam compressio facta non est, in quam proinde etiam caetera compressa se recipere conantur, id est, linea opposita ad lineam impactus, seu cum ea divaricationem faciente; eodem igitur ad superficiem angulo in alteram plagam. Quae reactio tanto est fortior, quanto impactus fuit velocior caeteris paribus (nam tanta est celeritas restituentis, quanta comprimentis), item quanto impingens recipiensque est durius (quia tanto violentior vibratio, velut arcus subito dimissi) et, si utrumque est durum, non tantum impingens repellitur a recipiente, sed et a se ipso, veluti nos pedibus tellure repulsa saltum facimus: concurrente igitur utriusque tam forti, atque aliquoties reciprocata chordarum instar pulsarum vibratione, aërem etiam inter utrumque corpus interceptum, non minus quam cuique corpori intestinum, comprimente ac rursum discutiente, sonum tam fortem, tam varium; denique omnibus ab aetheris gyratione, quantum licet, in priorem statum restitutis, reflexionem tam vehementem sequi, mi-

rum non est, ut sperem adeo physicam reflexionis rationem nunc demum redditam esse. Delineationem res meretur, sed ab hoc schediasmate alienam, suo tempore non defuturam. Refractio mixta quaedam Reflexioni penetratio est: unde partim transmissio, partim deflexio; et tantum accedit deceditque obliquitati, quantum medii resistentiae seu densitati. Cujus rei haec ratio est, quia Corporum sensibilium solus propemodum aether revera per se movetur, estque motus πρῶτον δεκτικὸν, caetera per ipsum. Hinc fit, ut nullum impedimentum motui objici possit, quin propagetur, aetheri enim omnes pori pervii sunt, et fatigatus novis semper supplementis animatur. Hinc item fit, ut etsi per abstractam motus Theoriam reactio omnis detrahat a celeritate, tamen contra in corporibus sensibilibus salva celeritate (nisi quatenus plerumque in plura se dispergens fit insensibilior) detrahat a plaga seu determinatione, quae est Lex refractionis. Abibo hinc, cum unum addidero, etiam sensu constare vesicam inflatam pavimento impactam Elatere quodam aëris impactu compressi ac se restituere conantis tam alte exilire. Quid credere ergo vetat, et caetera dura, duris impacta, quippe aëre ubique constipato inclusoque, et impactu compresso, plena, celerrima fortissimaque chordarum instar sonantium reciprocatione (etiam aliquamdiu nonnunquam durante, unde soni vibrationumque in campanis pulsatis aliquandiutina duratio) efficere repercussionem. Quod et ad caetera motuum et concursuum phaenomena transferri ac multa cum luce rebus applicari potest.

23. Hugenii Wrennique phaenomena, si comperta sunt, causam eorum ex dictis reddere, difficile non est. Quia nimirum in hoc globi statu res percussae aut projectae magis aëris aetherisque quam suo impetu abripiuntur, uti res in aqua natantes aut jacentes aqua commota abripit, idque vel ea ratione patet, quod ex abstractis motus rationibus nihil se ipsum in lineam priorem restituit, etiam sublato impedimento, quia nullus conatus sine motu durat ultra momentum; at percussa et in plano impulsa, cum in motu monticulum offendunt, obliquant cursum, quasi arte quadam, et sublato impedimento resumunt, quia scilicet impedimentum corpori tantum, non aëri aetherive objectum fuit, atque uno evanescente, alius succedit: quemadmodum igitur duo lumina ob raritatem inconfusa se penetrant, ita duo illi aetheres corporum concurrentium sua corpora deserunt, et in altera mutuo

transferuntur. Unde illa motuum plagarumque post concursum permutatio. Eadem est Causa Vibrationis pendulorum toties repetitae, et paullatim evanescentis, quod aetheris impellentis, particulari condensatione et dilatione collecti, et se restituentis impetus etiam ultra gravitatis suae conatum rem correptam effert, atque ita delapsam rursum in alterum latus attollit, ac mox dispersus et evanescens denuo ab alio aethere minus jam Elastico dejici sinit, quae res ad quietem usque reciprocatur, ut proinde pendulorum chordarumque vibrantium eadem causa sit. Hinc et Isochronismi vibrationum ratio redditur, nam quanto altior lapsus, tanto fortior; ergo tanto major compressio; ergo cum altitudine minuitur compressio; compressio autem est causa restitutionis, restitutio celeritatis relabendi. Altitudo ergo et celeritas, seu vis et spatium simul minuuntur. Jam si tanto minus est spatium spatio, quanto minor vis vi seu celeritas celeritate, motus erit isochronus, seu eodem tempore absolvetur. Idem igitur aether ex re in quiescentem vel occurentem impingente transfertur in quiescentem vel occurrentem et deserit impingentem, unde illa divaricatio seu permutatio viarum aut celeritatum Hugenio-Wrenniana, de qua pluribus exemplo lucis in Theor. mot. problem. 11, quae si duplex sit, suos quaeque radios per idem foramen, eodem tempore inconfusos mittit. Porro ex dictis intelligi potest, cur motus violentus initio aut fine sit debilis, in medio fortis, seu cur aliquamdiu crescat, mox rursus decrescat. Pone, lapidem aut glandem plumbeam a me vel pulvere pyrio projici; initio crescet celeritas, quia qui motus projecto est violentus, projicienti est naturalis, musculi enim mei instar arcus tensi relaxantur et se magna vi in statum naturalem restituunt: par est pulveris pyrii ratio, cujus compressa substantia ostio ab igne aperto erumpit. Jam motus naturalis rei se restituentis continuo crescit, idem ergo motus se continue accelerans projecto imprimitur, quem id tamdiu exercet, quamdiu ad superandum aërem satis forte est; at ubi aër se recollegit, et reagere ac restituere se incepit, motus iste restitutionis in aëre est similiter naturalis et acceleratus, ac proinde decrementum impetus projecti cum incremento reagentis acceleratur. Caeterum, ut pergamus, habet et hoc difficultatem, si abstractas motuum rationes intuearis, quod experientia docente, res major praeponderat minori, et longe fortior est impetus a re magna, quam parva; cum tamen in libero

naturae statu in contiguis nihil referat ad motum quanta sit longitudo, in continuis per Theor. mot. 23, 24. ne hoc quidem quanta sit crassities aut latitudo. Sed sciendum est, Corpora sensibilia continua et contigua videri potius, quam esse: unde cum pars majoris prima impetum adversarii minoris suamet internecione fregit, altera discontinua, etiam a novi aëris aetherisque allapsu animata, recentibus viribus superveniens, facile vincit. At in continuis omnium partium impetus simul consumitur. Unde beneficio divisionis res non contemnendae in mechanicis geri possunt, quod me usu ipso aliquando demonstraturum confido.

24. Ex gravitate porro per accidens sequitur levitas minus gravium, totaque doctrina Hydrostatica ab Archimede primum constituta. Cur lignum levius aqua? quia in ligno plus aetheris quam terrae. At cur ideo lignum in aqua ascendit, aqua minor in majore, etsi ipsa levior, non ascendit? quia, aqua etsi gravitet in aqua, tamen ob contrarium in quolibet puncto sensibili a qualibet et in quamlibet rectam curvamque lineam in liquidis gravitationem cylindrorum imaginariorum innumerabilibus modis assignabilium, mutuo tollitur gravitatio, aut disponitur liquidum paralleliter ad horizontem. Ergo heterogeneum in aquam delatum, cum tantum aquae attollat, quantum spatii capit, faciet cylindrum, in quo est, aliis pondere inaequalem, et proinde subsidet, si ea gravius est, sin levius, attolletur. Similiter si quid detur aere vicino levius, in aëre attolletur usque dum ad regionem aëris altiorem et subtiliorem et proinde se leviorem pervenerit, ubi pendebit: quae etiam ratio est, cur nubes in aëre pendeant, et fumus ascendat. Si quid ergo arte humana parari queat aëre levius, spes est perveniri ad artem volandi posse. Parabitur acutissimi Lanae, tum et Vossii sententia, si detur vas concavum tam grande, ut aër intus conclusus continenti seu vasi per se sumpto praeponderet: aëre igitur, noto jam artificio, exhausto et hermetice sigillato vase (pone vitrum esse) erit totum vas aëre aequalis spatii levius. Jam quicquid liquido aequalis spatii levius est, in eo ascendit: ascendet ergo datum vas in aëre. Et ut rem ad calculos vocemus (Lanae enim minores sunt), esto bulla vitrea tam exigua, ut aqua contenta et vitrum continens circiter aequi ponderent; hujus semidiametrum velut mensuram magnitudinis appellemus (a), pondus sive vitri sive aquae, quod per hypothesin idem est, velut mensuram ponderis destinati appellemus (b). Denique ex doctissimi

Boylii et aliorum observationibus supponamus, aërem esse aqua millies leviorem. Jam esto bulla vitrea vitro aeque crasso constans millies major priore, seu cujus semidiameter sit 1000 a, erit superficies sphaerica seu vitrum continens in duplicata ratione radii majus vito bullae mensurantis ac proinde ponderabit 1000,000 b. Et aqua bullae hujus erit in triplicata ratione radii major aqua bullae mensurantis ac proinde ponderabit 1000,000,000 b. Ergo si bulla haec non sit aqua, sed aëre plena, cum aër sit millies levior aqua ex hypothesi, ponderabit tantum 1000,000 b. Et proinde aequiponderabit vitro bullae. Exhausta jam bulla aëre, quantum possibile est, tantum circiter ponderabit, quantum aër paris spatii. Et si sumatur bulla radii 1500 a, et exhauriatur, notabiliter erit levior, quam aër paris spatii, et proinde in eo ascendet. Si major sit proportio aëris ad aquam, tanto major fiat bulla. Sed an bullae tantae magnitudinis commode fieri, et penitus et sine ruptura exhauriri, et durare possint, ego in me non susceperim.

25. Inter species igitur gravitatis est et aërostatica, ex qua dependet totus ille syphonum, antliarum, baroscopiorum apparatus, et si Elater accedat, de quo mox §. 27; quicquid stupendi aëre compresso exhaustoque patratur. Nimirum gravia in suspenso manent, gravia sursum attolluntur, non metu Vacui, alioquin possent attolli in infinitum, quod experientia refutat, sed quousque nondum habetur aequilibrium cylindri aërei totius atmosphaerae. Nam aqua in antlia non sequente, sequetur cylindrum aëreum pistillo antliae latitudine aequalem vel comprimi vel eo usque attolli debere in liquidum aetherem ex sphaera sua, quanta est antliae longitudo. Quia tantum spatii in antlia, aëre (etsi subeat subtilissimus aether) vacuum aut certe valde exhaustum relinquitur. Par est Baroscopii ratio.

26. At unde tanta vi aër exhaustus in vasa irrumpit? Quaero eodem modo, si in media aqua vas clausum statuas, mox vasto foramine aperies, cur irrumpet aqua? nisu propriae gravitatis. Ergo eodem et aër. Aqua tamen tardius et non sine resistentia irrumpit, quia aër ei expellendus est, cui difficilis exitus patet. At aër irrumpens in locum se vacuum, aethere vi illuc intruso plenum, non tantum non impeditur ab aethere, sed et juvatur, quia aether praeter morem suum illuc collectus in locum, in circulatione sua impeditur, et exire, etsi pori pateant, non potest, nam etsi vacuum detur, magnum tamen vacuum non datur:

locus igitur ei ab aëre desertus replendus est. Concurrent ergo GRAVITAS Cylindri aërei, et ELATER seu vis aetheris se in debitam sibi circulationem dispergentis.

27. Par est ratio de aëre compresso et collecto, ut sclopetis pneumaticis onerandis contingit, nam ea res non potest explicari gravitate aëris; est igitur explicanda Elatere, seu explicandi sese appetitu. Is explicandi se conatus non est ab aëre, sed ab aethere: nam cum aër constipatur, multis ictibus ei aether exprimitur, prorsus ut corporibus in mortario succus. Apertura rursum facta aether circulationis prius disturbatae, nunc in ordinem redeuntis celeritate, maxima rursum vi subintrat, aëremque in pristinam raritatem dispergit. At cur ita turbatur circulatio? quia aëre exhausto aether colligitur in justo majorem quantitatem in vase; aëre compresso, aether expressus in justo majorem quantitatem extra vas. At illa justo major quantitas aetheris impedit aetheris Circulationem circa centrum terrae, ubi propior est centro circulatio, quia quanto propior est centro circulatio, ut apud nos, tanto circuli sunt minores, tanto igitur omnia arctiora esse debent. Hinc quorsumcunque transtuleris vas exhaustum vel distentum, etiam si mille leucis abieris (add. infr. §. 48) a loco exhaustionis, si eodem tantum in circulo seu eadem circiter distantia a centro terrae maneas, perseverabit (imo si ad centrum propius accedas, augebitur) Conatus aetheris circulum suum in debitam densitatem restituendi. Nec refert, quod a nobis circa vas exhaustum nulla sentitur constrictio aëris aetherisve, hoc enim fit eandem ob causam quae efficit, ne urinatores sentiant pondus maris, et nos aetheris motum, ob mutuam in liquido partim resistentiam seu conatum utrinque sublatum, qui et in fornicato opere lapides, et in genere in rebus bullas continet. Neque vero abnuerim, quod diligentissimo Boylio probabile videtur, partes aëris velleris instar aut spirarum habere, ut compressae se restituant, dummodo illud ex abstracta motus Theoria teneatur, nihil utcunque flexum sese propria vi restituturum. Neque tanta vis esset in Elatere aëris, quantam in natura hactenus cognitarum potentiarum certe maximam sentimus, si comprimerentur tantum villosae aëris partes, neque aucta compressione vel exhaustione augeretur perpetuo impetus, nisi ipse systematis status turbaretur.

28. Exhalationum contra naturalem gravitatem sursum levatarum haec ratio est: Mare, ut ingeniose Becherus sentit, par-

tem suam bituminosiorem et graviorem per fundum spongiosum perpetuo distillat ad centrum terrae seu interius quoddam globi nostri receptaculum vel aestuarium universale. Ibi digesta ac velut fermentata haec sulphurea et bituminosa massa, vapores, id est, rariora, ac leviora proinde, quam illius orbis centro vicinioris, atque adeo densioris, status ac circulatio fert, emittit per terram, ex quibus aquei, quippe subtiliores, leves, vacui, altius exeunt, et partim in fontes resolvuntur, limo apto velut alembico capti, vel aperto exitu abeunt in aëre, et meteora constituunt.

29. Quanquam eos et subtilem quandam unctuositatem seu sulphur etiam in aëre usque secum vehere non negem. Et pars unctuosior vel a lapidibus vel a terra illa superiore hortensi intercepta, illic in metalla, hic accedente solis sublimatione in herbas, arbores, fructus, semina abit. Fontes plerosque a cisternis illis supermontanis et submontanis nivium aut pluviarum collectarum oriri cum Hobbio, Derkennio et in omni eruditionis genere versatissimo Vossio non dubito; nonnullos tamen vaporibus subterraneis deberi, ab his etiam omnes aquarum virtutes minerales, imo et ceteras specificas simplicium vires repetendas Chemicis, fratri Basilio, Groschedelio, Helmontio, omnino assentiendum putem cum sol et aër, agentia et patientia universalia, solo terrae subjectae statu, si lucem jam propiorem et rectam, jam obliquiorem et remotam addas, varientur.

30. Hactenus de totius globi phaenomenis, nunc ad specierum apparentias veniendum est, quae tamen fere e phaenomenis globi oriuntur. Porro specierum phaenomena sunt vel qualitates sensibiles, vel motus, etsi omnes qualitates istae sint insensibiles motus. Qualitates sensibiles sunt aut visus, aut auditus, aut odoratus, aut gustus, aut tactus. Qualitates visus sunt lux et colores. Lux est motus aetheris ad sensum rectilineus celerrimus in quodlibet punctum sensibile circum circa propagatus. Vide supra §. 7 et infra §. 56, nec sufficit propensio ad motum Cartesiana, quia omnis propensio ad motum, quam non sequitur motus, non durat ultra momentum, adde supra §. 23 et infra §. 57; porro lux est vel primigenia illa in sole, de qua §. 4 et 5, vel secundo-genita, eaque aut originalis, aut imitata: Originalis est in igne apud nos genito qui fit aethere innumerabilium bullarum rupturis acervatim disploso, de quo mox; Imitata est in speculis, tum in rebus, quae diuturna apricatione radios colli-

gum, in Lapide Bononiensis, cicindelae. Quaedam digestione fermentationem seu motum intestinum, atque inde, si satis fortis, vel lucem, seu ignem solo visu sensibilem, ut ligna putrida; vel etiam ignem communem, ut foenum madidum accumulatum facit, producunt.

31. Colores Emphatici experimento prismatis, reales observatione caeci apud maximae diligentiae virum, Robertum Boylium, posteritati relicta, egregie illustrantur. Ajebat ille, asperrimam superficiem albi nigrique, glaberrimam rubri (quod aliquando varians caeruleum praetulerit) a se tactu deprehendi: nigrum tamen albo asperiorem, ceteros colores, prout ab extremis abeunt, fere asperitate decrescere. Si ita est, crediderim alba lucis magis convexitatem, nigra concavitatem obvertere: unde illa reflectent, haec abdent lucem, et facies nigri minus planitiei, plus aculeorum habebit. Coctio item rubedinem faciet, quia inaequalitates abradit. Sed haec obiter; nostrum enim est hoc loco motus potius quam qualitates ad sua principia revocare. Tenebrarum nullum proprium effluvium esse, sed apparere tantum distantia vel hiatu inter partes sensorii a luce affectas notato, vel hinc concluseris, quod nullis speculis aut lentibus colliguntur. Adde hoc: ubi multum humoris aquei, multum nigroris, quia is totus alcalisatus seu vacuus, de quo infra, ergo perspicuus, ergo lucem admittens, non reflectens; adde et colores in plerisque non a sola reflexione, sed etiam a subtili quadam luce seu igne proprio immixto, non minore, quam odorum effluvia, perpetuitate disploso, etsi raro in tenebris sine alia luce oculos movente, fortasse variari nonnunquam posse.

32. Sonus non consistit in motu aëris, aërem enim voco illam rem, cujus gravitas in Baroscopio sentitur, quae comprimi, exhauriri, ponderari potest. Jam constat, exhaustis utcunque et clausis vasis campanulam intus pulsatam extrinsecus audiri. Consistit ergo in motu aetheris, sed moderato et in circulos abeunte, ut lapide aquae injecto videmus, cum lux consistat in forti et recto partis subtilioris. At odor in aëre consistit: cum enim aër sit aqua subtilis, fit ut allapsu suo non minus subtiles salium partes solvat, quam aqua crassas. Ut igitur sapore percipimus salia crassa in aqua, ita odore subtilia in aëre soluta, ut proinde nares sint os illud, quo aërem gustamus. Sal autem, ne de voce quaestio sit hoc loco (infra enim

longe alio sensu vox usurpatur) voco cum Gebero, quicquid liquore aliquo solubile est.

33. Sciendum est autem, nullam ejus generis solutionem, quae sine reactione fit, centralem esse. Centralis enim solutio fit bullarum centralium apertura, unde actio et transformatio, de quo mox; superficiaria contra non nisi bullarum superficiariarum apertura, centralium disgregatione, quod re liquida proportionata sese poris insinuante contingit, unde mox alio dissimili superveniente praecipitatio: superficiariae autem bullae sola fusione crassa, et sensibili, et externa, sed debili fiunt, unde metalla soluta reduci possunt igne in corpus, centrales insensibili quadam et interna, et, quamdiu clavem non reperimus nec naturae arcana excussimus, lenta, sed firma fusione formantur, quamquam et natura saepe species similares in instanti producat.

34. Caloris eadem est causa, quae lucis, solo subtilitatis discrimine. Utrumque et oritur a motu intestino in se redeunte, subtiliora sui ejaculante, vid. sup. §. 7, et eum facit. Unde et raritas et congregatio homogeneorum. Contra frigus, quod constringit, oritur a motu quodam forti, et recto, sed crasso, unde obtundente, non penetrante, ac proinde non solvente, sed constringente. Dura autem aut alioqui densata et conferta sunt pleraque frigida, ut marmor, metallum, mercurius, quia pori sunt angusti, per quos transit aër seu ventus: unde ventus frigefaciens constringitur colligiturque, prorsus quemadmodum in civitatibus angiportus plurimum semper frigoris habere solent. Unum addo ad majorem rei lucem, impressionem calidi et frigidi differre, ut in eadem hasta punctura praeacuto spiculo facta, a rudi capuli lignei ad perforandum impactura. Caeteras innumerabiles qualitatum tactus varietates ingredi, non est hujus temporis, cum pleraeque a superficiaria magis, quàm centrali rerum constitutione oriantur, fontes tamen explicandi attigemus infra §. 59. Transeamus ad corporum motus extraordinarios seu physicos, qui ex gravitate seu principiis mechanicis, quantum sensu apparet, non oriuntur.

33.*) Hos obiter partior in sympathicos et antipa-

*) Die doppelte Zählung der §§. 33 und 34 findet sich in der Originalausgabe; sie muss beibehalten werden, um die Citation der §. nicht zu verwirren.

thicos. Sympathici sunt verticitas et attractio. Illa est in linea circulari, haec in recta; illa ad certum globi punctum circa centrum suum, haec ad certam rem. Verticitas est non in magnete tantum, sed et in plerisque rebus, etsi impari gradu, nam alia aliis magis aetheri pervia, ac poris suis motui ejus proportionata sunt, magnes ferrumque prae caeteris, ob frigoris amorem nativum diuturnumque in fodina versus polos situm. Sed is Boreae amor ad directionem tam constantem tamque universalem, nisi causa universalis ubique praesens, id est circulatio aetheris accedat, sufficere non potest: verticitas igitur, seu ut librata inter polos globi nostri extrema sua constituant, videtur fieri a motu aetheris ab oriente in occidentem, supra §. 9, 10, qui prohibet, ne extremitates orienti occidentive directe aut oblique obvertant, restat ergo septentrio et meridies. Quae vero in hoc verticitatis negotio particularia se phaenomena offerunt, examinare a praesenti brevitate alienum est.

34. Hoc tamen omittere non possum, cum omnis consistentia seu cohaesio corporum oriatur a motu, corporum in toto quiescentium orituram a partium motu, in se (ne avolent) redeunte, id est circulari; vel potius ob coarctationem, quandoque elliptico, per abstractam motus Theoriam; hinc corpora eum motum ita exercere, ut commodissime possint; possunt autem commodissime in eam plagam, qua motus aetheris non obstat, ergo versus polos globi terreni, quia motus aetheris non est versus polos, sed circa polos. Item porro motus partium suos corpori proprios polos polorumque diversorum et polis affrictorum antipathias constituit. Poli magnetis appellantur, quia polis terrae respondent, quamvis non sint in axe intestini motus magnetis, sed potius in aequatore: quia tamen is motus partium non est parallelus, sed fit circulis in polo se intersecantibus ad instar meridianorum, hinc nova cum polis terrae similitudo. Jam rotetur Sphaera, vel saltem Orbis aut annulus circa axem horizonti perpendicularem, et tangat in aequatore aequatorem alterius sphaerae, vel orbem saltem, aut annulum similiter rotabilem; imprimet ei motum suum, sed in contrariam plagam: nam si prior moveatur ab oriente per septentrionem in occidentem, posterior movebitur ab oriente per meridiem in occidentem, seu ab occidente per septentrionem in orientem. Sed quae in plagis contrarietas est, in motu non est, transferantur enim sphaerae vel annuli permutato situ, retento

motu, erit convenientia in plagis, motus sibi obstabunt, quia et punctum retentum unius tangit punctum oppositum alterius, nam si utriusque oppositum sumatur, rursus obstaculum cessabit. In magnete autem tot fingendi sunt annuli, quot meridiani, id est ad sensum infiniti, sed qui omnes in uno puncto motus seu affrictionis se intersecant, quod non magis difficile est, quam radii luminis transeuntes per idem foramen inconfusi; hac porro affrictione transfertur et motus, et qui, exempli gratia, parti boreali convenit, situs; et quia in opposito puncti accipientis se circuli rursus intersecant, acquiretur et ibi situs, quem habet in dante oppositum punctum puncto danti, nempe australis. Sed haec in affrictione; caeteroquin similes poli se repellunt, ratio est, quia alterutrius situs est praeternaturalis. Caeterum in ipso globo terreno credibile est, similes magneticis motus esse subtilium partium fortiori lucis sub Tropicis motu rejectarum versus polos per meridianos (quod nec a celeberrimi Kircheri sententia alienum videtur), cujus motus impressionem prae ceteris magnes et ferrum, genuina terrae soboles, receperunt. At quae inclinationis magneticae ratio, qua acus levata vel depressa poli elevationem monstrat? nulla alia, cum quilibet magnes et quaelibet acus quasi affricti censendi sint polo telluris, quam quae limaturae ferreae magneti impositae, quae alteri polo vicinior illuc inclinat, in medio posita quiescit aut vacillat. Unde referente Kirchero cum sub Lineam ventum est, acus magnetica innumerabilibus oscillationibus titubat. At quod idem addit, ultra Lineam non amplius acum inclinatione suam poli elevationem monstrare, hoc nondum satis capio; ipsa facti ratio magis pervestiganda est, ut de causa constare possit, cum certe polus magnetis, qui cis Lineam polum telluris nostrum respexit, eundem et trans Lineam respiciat, ut ajunt. Sed et illud difficile est, quod si Terrellae polus articus superi imponitur libraturque, eundem ubique meridianum terrella obvertat polo telluris, sed ita ut si polus antarcticus imponatur, punctum quod prius fuit orientale, fiat occidentale. Tentandum esset ultra Lineam an arctici an antarctici impositione, quod hic orientale punctum est, ibi quoque orientale sit; quemadmodum illud quoque, quod ex eadem ratione pendere videtur, an ferrum diu perpendiculariter pendens, quod hic partem inferiorem polo arctico, si libretur, obvertere affirmant, si trans Lineam pependerit, eandem antarctico obvertat. Quae cum non sint explorata, de ratione compendinan-

dum puto. Cum autem tam regularis tamque fortis sit in magnete motus, non est mirum, aërem, qui ei gravitate sua impingitur, ab eo rejici, eoque mediante motum ferro communicari, quod similiter dispositum impressionem facile recipit. Idque non chordae tantum tensae alteri similiter tensae sonum per aërem communicantis, sed et eo experimento constat, quod vitrum, cujus sonus pulsu exploratus est, si similis ab adstante sonus edatur, etiam non tactum resonat. Quaelibet ergo actio magnetis etiam in distans ferrum quaedam insensibilis affrictio erit. Movet ergo magnes ferrum, sed cur ad se movet seu trahit? quia ferrum expletur seu perficitur his radiationibus. ut alcali acido proportionato; his ergo sorbendis magis magisque accedit, et ita fonti ipsi seu magneti propinquat.

35. Igitur attractio ferri per magnetem facilis explicatu est, explicata tractione Electri, differunt enim subtilitate tantum, unde attractio magnetis nec frictione indiget (quamquam politura juvetur) et crassa corpora penetrat. Attractio electrica meo judicio facile explicari potest, explicata attractione qua fumus attrahit ignem. Nam, ut pueris notum, candela fumante ardenti ita supposita, ut fumus illius ad flammam hujus pertingat, descendit ignis per scalas quasi fumi, et extinctam recens candelam reaccendit, quae etiam fulguris causa esse potest. Hujus vero Electricae, et fumariae attractionis hoc solum discrimen est, quod haec ipsa forma sui, illa non nisi effectu sentitur. Descensio ignis per fumum videtur fieri eodem modo, quo ascensio aquae per antliam, vel potius irruptio aquae vel aëris in recipiens evacuatum. Nam fumus nimis displosionibus exhaustus, quod in igne jam collectum reperit, resorbet: nihil aliud enim flamma est, quam fumus ignitus, et fumus quam flumen partium volatilium (ut cinis sedimentum fixarum) exhaustarum, unde illud in fuligine alcali volatile, in cinere fixum; sed de his alias exquisitius.

36. Antipathicus motus (de sensu et apparentia loquor, nam si interiora spectes, nulla est in corporibus nec antipathia nec sympathia) est reactio, cujus subtilissimis varietatibus in natura rerum pleraque peraguntur. Reactionum solae propemodum antiquis notae: deflagratio (quo pertinet pugna ignis et aquae) et fermentatio. At Chemici nostri non tantum fortissimam illam pulveris ceraunochrysi, quemadmodum et antea sulphuris et

nitri, sed et innumerabiles alias detexere, atque ipsi agnoscunt potissimum naturae instrumentum esse reactionem.

37. Hinc jam ille veterum Chemicorum albi et rubri, seu masculi et foeminae amplexus, hinc Basilii Valentini pugiles, hinc decantata tria principia Isaaci Hollandi, fratris Basilii et Paracelsi; Gas, Blas, Archaeus Helmontii; Humor Sylvii Triumviralis, perfectum et imperfectum Glauberi, Acidum et Alcali Tachenii, acidum et salsum Travagini, quae omnia certum est recidere eodem.

38. Hinc illud Basilii:

Quae duo, quae tria sunt, eadem rediguntur ad unum,
Quod si non capias, sunt tibi tota nihil.

Sed pleraque ita intricate, ita ambigue proponuntur, ut constantes terminorum definitiones vix ac ne vix quidem hactenus impetrare licuerit. Quam variationem doctissimus Boylius in Chemista sceptico egregie exagitavit.

39. Igitur revera duarum in globo nostro rerum tantum reactio est: Exhausti et distenti, seu ut cum Democrito loquar, vacui et pleni: atque haec est unica origo omnis fermentationis, omnis deflagrationis, omnis displosionis, omnis pugnae inter ignem et aquam, acidum et alcali, sulphur et nitrum.

40. Causam non est opus diu quaerere post Hypotheses nostras praeconstitutas. Nam §. 26, 27 ratio reddita est, cur aër compressus tanta vi se restituat in libertatem; contra, cur locus aërem exhaustum tanto impetu resorbeat? Cum ergo aqua nihil sit nisi congeries bullarum innumerabilium exhaustarum, et ignis totus substantia turgeat, eae permixtae atque ipso lapsu, motu aut gravitate collisae rumpentur, et maximo impetu altera exonerabitur, altera sorbebit. Idem de omnibus aliis reactionibus dicendum est, magnitudine tantum bullarum et multitudine, et situ, et figura, et exhaustionis atque compressionis quantitate pro re nata variatis.

41. Nam si bullae sint Evanidae, et, ut sic dicam, aqueae vel aëreae, ut in imperfecte mixtis, nullum fit ex reactione mixtum sensibile, sed cuncta disperguntur. At si bullae sunt terreae seu vitreae, excitatur ipso reactionis calore fluxus quidam novus, seu fusio insensibilibus istis velut follibus inflata,

et ex dissilientium bullarum fragminibus aliae, sed dissimiles reconflantur, unde novae speciei ortus, et centralis rerum mutatio.

42. Haec jam cum Chemicorum principiis non difficulter conciliantur, quae notum est illos dividere in nucleum et corticem. Nucleus constat decantatis illis Triumviris, cortex terra mortua et phlegmate. Cortex et ipse totus componitur ex bullis, uti omnia corpora sensibilia, sed minoribus et dispersioribus, quam ut effectus sensibiles producantur: maturatur tamen paulatim, id est, subtilibus quibusdam fusionibus vel a sole vel aliunde ortis, ex bullis minoribus pluribus (quod et in aqueis sibi appropinquantibus experientia docet) fiunt pauciores majores, unde nucleus ex cortice et oritur et lente nutritur.

43. Sciendum est enim, ut praeclari illi Micrographi, Kircherus et Hookius, observavere, pleraque quae nos sentimus in majoribus, lynceum aliquem deprehensurum proportione in minoribus, quae si in infinitum progrediantur, quod certe possibile est, cum continuum sit divisibile in infinitum, quaelibet atomus erit infinitarum specierum quidam velut mundus, et dabuntur mundi in mundis in infinitum. Quae qui profundius considerat, non poterit non exstasi quadam abripi admirationis transferendae in rerum Authorem.

44. Hinc jam apparet Anaxagoreae cujusdam infinitae ὁμοιομερείας cum nostra de paucis rerum elementis sententia conciliatio: etsi enim verum esset, putredinem esse insensibilem verminationem, et situm insensibilem fruticationem, et aërem esse aquam insensibilem, et frigus esse aërem conglaciatum, et ignem esse sulphur subtile, et aquam esse nitrum subtile, et animalcula illa putrescentia rursus resolvi in alia minora, et sic, ut lubet, in infinitum; haec, inquam, etsi vera essent, uti ex parte fortasse sunt, non tamen sufficerent reddendis rerum causis, cum exemplum potius seu analogia afferatur, quam causa. Nam ubique restabit sine fine quaestio, nec minus impeditum erit, cur secundum seu subtile nitrum pugnet cum subtili sulphure, quam cur primum seu crassum cum crasso. Nos vero rationes reddidimus etiam illis, si quae sunt, in infinitum replicationibus suffecturas.

45. Sed ab Anaxagoristis, ita enim pace eorum doctissimos illos Micrographos appellare liceat, ad Chemistas nostros redeundum est. Ac de cortice quidem diximus, qui ad sensum aëre et aethere

neque vacuus neque plenus, sed fere indifferens ac proinde iners (etsi lateat semper in illo quoque virium nonnihil) terra atque aqua potissimum constat, sed nucleus sensibilibus effectibus demonstrat impraegnationem suam. Ubi facile cum illis transigi potest, qui duobus principiis contenti sunt, uti veteres chemici fere omnes sulphure et mercurio, seu masculo et foemina, vel, ut Tachenius aliique vocant, acido et alcali. Nam bulla aëre exhausta (et contra aethere distenta) est alcali, foemina, et (sensu veterum chemicorum) mercurius; bulla aëre distenta (et contra aethere exhausta) acidum, sulphur, masculus. Nam quod aethere tantum plenum est, sensibus vacuum est: jam alcali potius quam acido adscribendam vacuitatem, Glauberus, Tachenius, aliique facile, opinor, mihi assenserint. Cum ea, quae ipsi alcalia vocant, pleraque sint perspicua, tenuia, levia, fluxum et vitrificationem juvantia, ut nitrum, ut sal tartari, ut ossa; acidi sint opaca, aut potius colore saturata, densa, gravia, ut oleum sulphuris vel vitrioli, ut vinum, ut sanguis. Sed haec tamen variant, admirabili quadam rerum in se invicem implicatione, ut proinde instantia quadam in contrarium reperta conciliatio potius quaerenda, quam totius Hypotheseos eversio cogitanda sit. Unde etiam eadem res in comparatione ad diversa, modo acidum, modo alcali esse potest, acidum vacuatioribus, alcali plenioribus: et solent plerumque interiora rerum exterioribus contraria esse, et per fermentationem interiora extrorsum verti.

46. Ne igitur levi aliqua specie repugnantis experimenti commotus lector totam statim harmoniam turbet, cum tamen plerumque experimenta, ut in motu ostendi, ab intimis rerum principiis prima specie valde dissentiant, nec nisi multo oeconomiae universalis artificio, admiranda Creatoris sapientia rerum ortus involvente, concilientur; ostendum est a priori breviter, hypothesin nostram paulo plus aliquid quam hypothesin esse. Primum enim non nisi bullis atque vasis subtilissima corpuscula coërceri possunt. Duo igitur summa genera corporum esse necesse est: continentia et contenta seu contentilia (neque enim negarim quaedam extra bullas volitare, etsi forte et ipsa rursum constantia minoribus bullis, vide infra §. 60), solida et liquida, bullas et massas.

47. Massarum motus motui universali terrae, aquae, aëris, aetheris (neque enim alterius cujusdam massae grandis statuendae necessitatem reperio) conformis est: bullae aliquid proprii sibi

servant, et specierum fundamenta locant. Sunt autem bullae naturales aut violentae, seu ordinariae aut extraordinariae. Ordinariae et naturales sunt, in quibus tantum massarum aliarum, terrae, aquae, aëris, tantum item aetheris, quantum locus fert, in quo bulla sita est. At si bulla nimium aetheris habeat, aëre, aqua, terra justo vacuatior, vel contra nimium aëris, justo minus aetheris, constituuntur bullae extraordinariae et violentae.

48. Ordinariarum nulla extra ordinem actio est, et quiescunt, nisi quatenus abripiuntur motu massarum universalium. Si quid enim extraordinario quodam motu cieatur, mox statim eum amittet, cum sit ei perpetuo cum totius massae universalis torrente confligendum. At bullae extraordinariae utcunque motu universali abripiantur, quamdiu non rumpuntur tamen, motus cujusdam extraordinarii, ruptura exerendi, vim secum gestant, prorsus ut vasa aëre exhausta aut distenta huc illuc circumgestata, quandocunque aperta, aut exonerantur aëre, et sorbent aetherem, adde supra §.27.

49. Utrumque genus bullarum ordinariarum et extraordinariarum vel exhaustarum vel distentarum, in crassas et tenues, seu aqueas et terreas vitreasve dispescitur. Et quamvis ex Micrographorum observationibus dentur continuo aliae aliis minores, manebit tamen semper eadem proportio: cum aqueae aëreis comparatae sint terreae, et aëreae ad aethereas eandem proportionem habeant, et nihil prohibeat dari alium aetherem, de quo nobis nec suspicari licet, aethere illo quem ratione et experimentis colligimus tanto superiorem, quanto est aqua terra, aut aër aqua. Sed haec in computum nostrum, quia nihil inde phaenomena variantur, venire non possunt. Hinc jam apparet, bullas in universum ordinarias, exhaustas, distentas, rursus non solum in debiles et firmas, imo si lubet, medias, sed et in magnas et parvas, imo et rursum, si lubet, medias (multiplex enim hic inter extrema latitudo est) discerni. Figurarum multitudinisque varietates et sunt innumerabiles, et nihil conferunt ad summam rerum.

50. Hinc jam illa absoluta Paracelsistarum sive quinitas sive trinitas valde suspecta redditur. Nam ut de inertibus, phlegmate et terra damnata, quae fere bullis ordinariis (phlegma aqueis, terra damnata vitreis) aut extraordinariarum

nimis parvarum, vel utcunque magnarum, tamen paucarum, ordinariis involutarum, confluge constant, nihil repetam; forte tertium illud mercuriale principium est jam alcali, jam acidum volatile, add. infr. §. 60, ut proinde verear, ne quaternionem utilium principiorum habituri simus: bullas exhaustas majores, seu alcali vel sal fixum; bullas distentas majores, seu acidum vel sulphur fixum; bullas exhaustas minores, seu alcali volatile; bullas distentas minores, seu acidum volatile. Quin imo an medium detur aliquod inter fixum et volatile, quae sit etiam trium, ut vocant, regnorum varietas; experimentis, at non paucis, non quibuslibet, sed multis magnisque inter se collatis dijudicandum.

51. Neque ego hoc loco divinatione praepostera me prostituere volo, quanta enim rursus esse potest in exhaustionis constipationisque gradibus varietas? et hic certe Hypothesin condituro, nisi temerarius haberi affectat, subsistendum est; specialior enim applicatio ab experientia pendet. Credidi tamen semper admirabilem Conditoris sapientiam ita res instituisse, ut paucis multa gerantur. Unde si somniandum esset, dicerem, duorum istorum naturae instrumentorum, distenti exhaustique, ter ternas in summa varietates esse: utrumque esse minime, mediocriter, maxime exhaustum distentumque, atque horum rursus unumquodque subtile, medium, crassum. Schema hoc esto:

Bulla

debilis seu aquea	parva, levis, subtilis	Ordinaria	Exhausta	minime
Variatio continentis in crassitudine	Variatio continentis in amplitudine.	Variatio contenti in plenitudine et vacuitate aliqua vel multa	Variatio contenti in plenitudine et vacuitate majore vel minore.	mediocriter
firma, seu terrea, vel vitrea	crassa, grandis, gravis	Extraordinaria	distenta	maxime.

Bulla

debilis est . . . . imperfecte } differunt qualitate passiva.
firma „ . . . . perfecte mixti }

subtilis „ . . . . regni animalis } differunt quantitate seu mole.
media „ . . . . vegetabilis-
crassa „ . . . . mineralis }

ordinaria „ . . . . indifferens sterilis } differunt qualitate activa.
extraordinaria . . . . activa, foecunda seu seminalis }

debilis ordinaria . . . . . . plegmatis } differunt qualitate.
firma ordinaria . . . . . . terrae damnatae }

exhausta extraordinaria . . . alcali, tingibile, foemininum } semen, differunt agendi modo.
distenta extraordinaria . . . acidum, tinctum, masculinum }

distenta / exhausta { minime . . . . . salina seu obtusissima } differunt actionis gradu.
mediocriter . . . sulphurea seu media
maxime . . . . mercurialis seu activissima }

52. Igitur sunt quatuor massae grandiores seu elementa, indefinitae replicationes seu homoeomereiae; principia componentia indeterminata, ob graduum varietatem, deinde ob Analyseos per se impossibilitatem, unde plerumque ex resolvente, igne, menstruo etc. cum soluto decomposita fiunt: imo vix illa componentia haberi debent, quorum reconjunctione res regeneratur, nam haec quoque ipsa illa conjunctione destrui solent, et solutione generata sunt. Manet tamen duo principia utilia esse, tres ὡς ἐν πλάτει principiorum utilium gradus, tria regna. Regna differunt partium solutione, subtilitate et varietate; gradus evectione, et coctione, et virtute. Quanquam plerumque quae virtute aucta sunt, et subtilitate augeantur, unde et in regno animali activitas major, sed et evanescentior.

53. Methodus medendi, his ita positis si pergere conjectando licet, huc redit, ut acida alcalibus et contra, sed gradu similibus, curentur. Ergo acidum mercuriale curabitur alcali mercuriali, acidum sulphureum alcali sulphure, acidum salinum alcali salino, summum venenum frigidum seu alcalizatum summo balsamo calido vel acido, et contra: ita contraria contrariis substantia, similia similibus gradu curabuntur. Et quia fortasse tres illi mercurii, sulphuris, salis gradus rursus magnam habent latitudinem tum in se ipsis, tum inter se, et sunt alia aliis mercurialiora aut salsiora: hinc jam non quaelibet acida quibuslibet alcalibus, quaelibet distenta quibuslibet exhaustis, sed proportionata proportionatis (unde sympathicae illae, aut antipathicae, seu specificae medicamentorum quorundam vires) experientia discernendis curantur, prorsus ut duobus recipientibus vitreis, altero pleno, altero exhausto, per orificia junctis, nisi justa in pleno quantitas sit, replendo exhausto, aperto epistomio communi, ruptura sequetur. Caeterum regna sibi alimenta praebent per scalam, mineralia vegetabilibus, haec animalibus, et retro; omnia omnibus, medicinam etiam per saltum.

54. Sed haec applicatio omnis hactenus divinatoria est, et si cui displicet, nec dicta esto. Sufficit causam omnibus motibus explicandis suffecturam reddidisse, sufficit ex simplicissimis et liquidissimis et intellectu facillimis, ad hanc usque experientiae portam volatiles alioquin, et usui vitae atque analysi practicae inconciliabiles Theorias deduxisse; sufficit ea attulisse, quae sectae omnes, salvis domesticis opinionibus, ferre possunt.

55. Qui negat motum terrae, motu aetheris cum sole seu luce circa terram contentus esse potest: sed et Vacuum affirmes negesve perinde est, cum sponte fatear, quicquid aëre exhauritur, aethere repleri; prorsus an relictis inanitatulis, nihil ad hypotheseos summam. Nec Aristoteles ejusque germanus interpres cum subtilissimo Thoma Anglo illustris Digbaeus mihi indignari possunt. Illi elementa quatuor habent: terram, aquam, aërem, ignem; ego pro igne aetherem, qua nisi vocis distantia? Nam ignis Aristotelis purus, qualis sub concavo Lunae, seu supra aërem ab eo supponitur et a me conceditur (qui aetherem credo aëre superiorem), vel ipso Aristotele teste non urit: recte tamen ignis appellatur, cum ignis noster ex aetheris collecti displosique flumine fiat. Praetuli nihilominus aetheris nomen, quia ei multos alios magnosque effectus illis inobservatos adscribo. Ignis enim familiaris significatio longe alia est, et aether meus ignis communis causa potius quam materia est: quanquam contra originario vocis usu idem sit aether Graecus, quod ignis Latinus. Sed consuetudo effecit, ut corpus quoddam ipso aëre subtilius aethera nominemus.

56. Porro rarum et densum recte quidem Digbaeo summa corporum differentia est, nam et illae, quas primas Peripatetici vocant, qualitates inde deducuntur. Cum calidum sit rarefactivum, frigidum densativum, humidum rarum, siccum densum, illa activa, haec passiva: et calida motu intestino forti cum subtiles radios ejaculentur, tum aërem gravitate sua innitentem rejiciant ventilentque, quae ventilatio pariter et radiatio ad alia corpora pertingens, tum poros eorum aperit, et particulis hactenus densitate constrictis liberum similis motus aut campum praebet, aut conatum si nondum habeant imprimit, unde et congregatio homogeneorum sequitur, uti metalla scoriae varie confusa, rarefaciente ignis fluxu liberata partes dispersas naturali deinde gravitate in regulum colligunt. Sed ut rarum densumque praestet, quod exhaustum intentumque nostrum, id est vim a dilatatione aut compressione se restituendi, aliud quiddam, motus scilicet aetheris, addi debet. Nimirum viro egregio reliquiae Metaphysicarum notionum insederunt, unde illam rerum compressarum aut distractarum ac se restituentium vim, nescio cui appetitui innato adscribit, quo data materiae moles, etsi plus minusve spatii implere possit, omni tamen nisu, cum potest, redeat ad velut praescriptam sibi extensionem. Sed haec aucta magis magisque Philosophiae luce animis

sua sponte cessisse arbitror, cum certum sit, ut recte docuit cum Cartesio Hobbius, eandem molem plus minusve spatii implere non posse; etsi enim discontinuata longius latiusque extendi queat, non ideo tamen quidquid amplectitur, implet, succedente re alia in partes subtiliores motum separatum habentes, id enim est esse rariorem (quanquam ad extremum sine omni vacuo res exitum non reperiat, quia impossibile est in prorsus pleno motum ullum extra corpus suum agentem, et secundum lineam in se non redeuntem esse), subdivisa. Aristolem, ut in praefatione ad Nizolium de veris principiis et vera ratione philosophandi nuper recusum docui, conciliare longe facilius fuerit, nam ille pene nusquam dicit, quae ei a scholasticis imponuntur. Certe omnium causam statuit coelum, coelum autem agere per motum. Et recte, nam et Lux nihil aliud, quam rei agitatio intestina, tam fortis, ut conatus ejus extrorsum tendentes ad quodlibet et ex quolibet puncto sensibili directe et reflexe oculum feriant. Ab agitatione tam forti, quis calorem et rarefactionem, et in opposita globi parte contra condensationem, ab his accedente aetheris motu a lucis solaris circulatione impresso, bullas et gravitatem et elaterem et ab his caetera oriri miretur? Certe formas substantiales (demta mente) etiam Aristoteli non esse ens absolutum, sed tantum λόγον, rationem, proportionem, ἀριθμὸν, structuram partium intimam, quidquid ei scholastici imposuerint, docuere dudum Honoratus Fabri et Joh. Raeus, Viri praeter omnigenam eruditionem ingeniosae et solidae in philosophando libertatis.

57. Nobilissimi Boylii, vim Elasticam a Spiris quibusdam se restituentibus repetentis, sententiam non improbo, vim tamen illam etiam harum spirarum restitutoriam ab altiore quodam principio, id est, ut ego credo, aetheris circulatione repetendam, ipsummet, qua est ingenuitate, agniturum credo. Nam et quod aër difficilius quam aqua caeteris paribus angustias intrat, quod eam ob rationem aqua in canali angusto et longo ultra aequilibrium ascendit, quod aqua mercurium penetrat, aër non penetrat; id etsi ad partium villositates et implicamenta retuleris, reddenda tamen rursus ratio est cohaesionis implicamentorum, ultima autem cohaesionis ratio, per alibi demonstrata, est motus intestinus. Ratio ergo ultima, cur aër difficilius augusta transeat, haec est, quia aër magis elasticus magisque cohaerens non facile dissipatur, aut per partes intrat, sed volvitur, tornatur formaturque in

unum corpus. Cur ita? quia plus in eos aetheris, plus ergo motus, restitutionis, cohaesionis: aquae partes non motu, sed densitate sibi admoventur, minus ergo compressionis, restitutionis, cohaesionis; facilius ergo in partes diffluit, foramini permeando respondentes, ut vel hinc appareat, densitatem duritiei et cohaesionis causam veram non esse. Cartesii Gassendique maximorum sane virorum sectatores, et quicunque in summa illud docent, ex magnitudine, figura et motu explicandam omnem in corporibus varietatem, habent me prorsus assentientem. Credidi tamen semper, quicquid de atomis varie figuratis, de vorticibus, ramentis, ramis, hamis, de uncis, globulis tantoque alio apparatu dicatur, lusui ingenii propius, a naturae simplicitate et omnino ab experimentis remotius aut jejunius esse, quam ut manifeste connecti cum Phaenomenis possit. Praesens autem Hypothesis corpuscula vaga et dilabentia tum inter se per bullas unit, tum motus effectusque bullarum et omnino specierum ab universi systematis unico universali motu deducit, atque ita hinc a summis et abstractis orsa, illinc ab imis Chemicorum experimentis ascendens, in simplicissimo et ex totius globi nostri statu explicabili gravitatis elaterisve Phaenomeno theoriam observationi mechanice magna cum claritate et harmonia connectit. Audeo dicere ac bene confido demonstrare, rationem illius celeritatis qua arcus se restituens sagittam explodit illius impetus quo pulvis fulminans sive communis sive aureus obvia omnia prosternit, ex constitutione partium corporis, nisi universali illo ac celerrimo systematis motu advocato, explicari non posse, cum certum sit, omnem impetum oriri ex celeritate, certum etiam ex pluribus motibus tardis (nisi maxima a centro rei distantia, qualis hic nulla est) aut etiam partium insensibilium motibus insensibilibus utcunque celeribus, motum totius usque adeo celerem ac violentum oriri non posse. Equidem solet motus arctatione augeri, ut densitas corporum compressione; sed hoc ex oeconomia systematis pendet, in quo omnis motus aetheri velut suo πρώτῳ ὀρεκτικῷ, ut sic dicam, incorporatus est. Unde aucta compressione conatus intestinus se restituendi, id est aetheris ambientis solicitatio, quia in singulas partes ducenda est, proportione augetur: res ergo sine novo ac perpetuo aetheris allapsu non potest explicari. Cum illud etiam sit inter principia Phoronomiae nostrae: virtutem, conatum, motum omnem (exceptis mentibus) semel superatum cessare omnino,

nec sua sponte resurgere, sublato licet aut imminuto impedimento, vide sup. §. 23, 28. Unde nec per motum reciprocationis nisi aetheris solicitatione advocata, res explicari potest, quia nihil per viam, qua venit, sponte redit: tensa item intrinseca virtute, etiam dimissa non restituentur, etsi ea sit illorum intrinseca constitutio, ut vis aetheris restituentis in ipsis potius quam aliis operetur. Quia aër internus in duris comprimitur, mollibus elabitur, et haec ratio est, cur diu tensa tandem flaccescant, quia paulatim per subtilissimos exitus aër hinc compressus elabitur, illinc distractus, novis supplementis ad statum naturalem redit. Patiamur igitur alios a figurarum suarum varietate colorum, saporum, aliorumque id genus causas repetere: at motuum pugnarumque tam admirabilium, tum in quos vulgus incidit, tum quos in resolutione chemici deprehendere, vim incredibilem, nisi concurrente, ut sic dicam, totius atmosphaerae nisu, ut in nostra sententia, vix unquam explicabunt, quemadmodum nec chemicorum principiorum operationes, quae proinde velut πρακτικώτερα prae Atomisticis et Figuralisticis doctissimus Willisius ad explicandam fermentationem merito elegit. Idem Willisius libro de cerebro et nervis motum musculorum a displosionibus innumerabilium sclopetorum intensibilium deducit. Recte omnino et huic Hypothesi congruenter; haec autem insensibilia sclopeta quid sunt nisi bullulae jam exhaustae, jam distentae, inter se mixtae et ruptae. Unde ad re-conflanda et redoneranda perpetua respirationis velut antlia et folle opus. Figuris musculorum quomodocunque suppositis, nunquam illam vim, illum fortissimum nisum explicueris, quem quotidie in nobis ipsis experimur. Idem erit, si cum eruditissimo Lowero musculorum motum explices per fortissimam contractionem utrinque in contrarium factam; nam nec tanta vis contrahens vel restituens aliunde arcessi potest.

58. Unde constat, quae vis, origo et ratio trium illorum augendae in corporibus augendae, seu gravis per leve levandi fundamentorum: distantiae a centro, impetus a lapsu, et denique nisus a certa quadam rerum specie, ut animali, ut pulvere pyrio, ut magnete, ut veneno aliisque exerciti, quo per miraculum quasi quoddam a minimis maximae res geruntur, de quibus supra §. 20; ut enim illa a celeritate gravitationis, ita haec a vi Elateris, rursum autem et gravitas et elater a circulatione aetheris turbata oriuntur, hoc solo discrimine, quod in gravitate ef-

sciendo aether movet rem, in elatere se ipsum; in gravitate se restituit in locum suum, in elatere, quod plus est, se restituit in gradum suum statumque raritatis, de quo erat deturbatus. Nam aether circulatione sua res justo densiores aut dispergit, aut cum non potest, deprimit: ex hoc oritur gravitas, ex illo Elater. Desiderant omnes philosophi recentiores physica mechanice explicari: id hic perfecte praestatur. Quemadmodum enim omnia naturae ex hypothesi nostra, ita et omnia artis horologia et machinamenta consensu communi vel ex gravitate vel ex Elatere vel ambobus junctis pendent. Ex gravitate omnia horologia, in quibus naturalis ponderis alicujus gravitas vectibus, rotis, trochleis, cochleis tardatur; et haec quidem id commodi habent, quod durabilia et constantia et accurata esse possunt, quia naturalis ad descendendum impetus nunquam lassatur, possunt item aeque facile exhiberi in magno opere, quam modulo parvo; sed incommodum subest, quod jactari et de loco in locum transferri sine gravitatis jactura commode non possunt, quia jactatio facit, ut nonnunquam sint in plano ad horizontem inclinato, quo casu minus gravitant; unde et in mari eorum usus turbatur. Ex vi Elastica pendent horologia illa minora portatilia vi quadam tendenda: haec contrariam prioribus rationem habent, nam id commodi inest, quod sine gravitatis jactura transferri possunt huc illuc; sed contra illud incommodi, quod in loco etiam priore relicta lassantur tandem, ut arcus diu tensus, et pro vi tendentis inaequali aërisque etiam mutationibus variantur. Machinae, quas aqua profluens regit, pendent ex gravitate; quas ventus, partim ex gravitate partim Elatere aëris; quas fumus aut ignis, ex gravitate minore quam quae aëris est; quas homines aut animalia, ex Elatere. Nec facile motus naturalis aut artificialis, cujus ratio a circulatione lucis circa terram deduci non possit, reperietur.

59. Notandum etiam, posse, imo debere non raro rerum cohaesionem, sed secundariam et ortam et aliam praesupponentem a gravitate aëris oriri. Constat enim experientia, duo plana aegre divelli posse, si exacte congruunt, quia levaturo pondus atmosphaerae incumbentis vincendum est. Eadem ratio est in duobus curvis, imo in omnibus, quae se ultra quam in puncto tangunt, ut per lineam ad congruentiam superficiei non parallelam divelli nequeant, nisi pondere cylindri aërei aequalis baseos ac planum congruentiae subtensum est, superato. Quia cum duo disce-

dunt a se, ita ut primo discessu plus intervalli relinquant, quam eodem tempore aër implere possit, quia scilicet superficies ingressus initio superficie discessus minor est (quod fit, quoties contactus est plus quam in puncto) plus spatii interim aëre vacare, ac proinde plus aetheris ingredi, atque interim atmosphaeram sive levari sive comprimi necesse est, concursu quodam gravitatis et elateris, nam utrum advoces perinde est. Atque ita credibile est, in corporibus duris aut tenuibus consistentiam secundariam saepissime oriri, cum probabile sit, pleraque amplius quam punctis congruere. Sed tamen haec consistentiae ratio aliam jam priorem, ut dixi, praesupponit. Cum enim divellenda est superficies a superficie in linea non parallela ad congruentiam, manifestum est, non impulsu hoc fieri, sed *tractione*, id est, pulsione rei alterius connexae, per ansam nimirum aliamque eminentiam in contrarium curvatam. Sed haec connexio jam consistentiam supponit v. g. si duas tabulas summe politas separare aliter quam parallelo impulsu, qui facilis, voles, necesse est ex superjacente ansam ei connexam vel aliud, quo apprehendere eam possis, eminere. Quae cur connexa sit, ratio reddenda est. Non potest ergo cum Democriticis ultima consistentiae ratio a congruentia ista vel, ut nonnulli alterius scholae loquuntur, a fuga vacui (a qua tamen res minime, sed a gravitate et elatere potius oritur) peti; multo minus cum Cartesio a sola quiete, sed ex rei motu, vide sup. §. 2, 11, etsi sensibiliores consistentiae ex compositis ejusmodi in omnem faciem tabulis, non nisi superata per istum impressum gravitate et elatere aëris discessuris, non raro oriri videantur. Certe a gravitatis elaterisque principio vis *restitutiva* in corporibus, *compressorum explicatio*, diductorum *reductio* sui, ad sensum spontanea, partim per memorata, partim per memoranda duci debet. Sentimus autem hanc vim non tantum in liquidis vase clausis, ut aqua, aëre etc., sed et in iis, quae sibi ipsi vasa sunt, id est, in consistentibus ejusmodi, quae neque absolute dura neque absolute mollia sunt, sed mediam quandam rationem habent. Nam *liquidum* est, quod terminos ab alio quocunque accipit, propriis caret, summa facilitate et separabile et transfigurabile. *Durum* est, quod contra habet. *Flexibile* est medium inter liquidum et durum, quod separabile aut saltem transfigurabile est, sed non facillime. Ejusque species sunt *glomerabile*, quod etsi facillime transfigurari, non tamen et summa facilitate dissolvi potest, ut

filum lineum, sericum, aliaque id genus, quae non possunt melius, quam per catenam meris annulis constantem, quorum unus in alio sit gyrabilis, explicari. Molle, quod parumper moratur transfigurantem, non reagit tamen. Tenax, quod valde moratur transfigurantem, et ei reagit, atque adeo dimissum se restituit. Liquidi per se facilis notio est, cum partes libere sibi confusae sunt; Duri, cum instar tabularum planarum congruentium in omne sensibile punctum plagamve compositae; unde et omnino non levatur tabula a tabula, vel si parum levetur, tota levatur: similiter dura aut non flectuntur ad sensum (etsi crediderim plerisque subtilem flexionem inesse) aut flexa omnino rumpuntur. Molle et tenax gradu differunt, utriusque igitur eadem causa. Tenax vel tendibile simul seu se restituens, vel tantum simpliciter ductibile est, ut cera, pix. Simplex ductilitas consistit in perpetua per omne punctum sensibile implicatione et insertione in se invicem funiculorum, tubulorum, fistularum, scatularum, convolvulorum, vasorum, aliorumque, quae diductionem non impugnant quidem, differunt tamen, modo non nimia implicatione sistant, quam in quibusdam duritiei causam intelligere licet, ut instar filorum glomeratione confusorum, nodo facto, mox non nisi ruptura solvantur. At in simpliciter ductilibus nulla unquam confusio sequitur, eductis sibi invicem tubulis semper minoribus, sibi in omnes plagas aequaliter et concave et convexe per innumerabiles duplicaturas insertis, donec nimia diductione et nimia sequatur attenuatio, et contingat ruptura. Nec mira cuiquam haec insertio videri debet, cum omnis fere subtilis accretio fibratim per has duplicaturas perque susceptionem intimam tubiformem potius, quam appositionem extimam alimenti fiat. Tensio addit insertioni tubulorum, ut sint in eo latere, quo alium accipiunt, occlusi; in altero, quo alteri inseruntur, aperti: quo facto vicem praestabunt embolorum ad sensum infinitorum, nam etsi embolus hoc loco cavus et apertus sit, qua exhaurienti vas pneumaticum obvertitur, sufficit tamen eum obfirmatum esse, qua parte opponitur vasi: diducta jam re, his tabulis instructa, necesse est eam difficultatem in diducendo proportione sentiri, quae sentitur in embolo extrahendo, dum aërem vasis pneumaticis exhaurimus; et remittente vi diducentis rem tensam necesse est eadem vi se restituere, qua embolus inter extrahendum subito dimissus a vase resorbetur. Hac tensionis in omnes embolos insensibiles sibi con-

tinue insertos, inaequaliter tamen, pro distantia, propagatae causa, nil clarius, nil facilius, nil hypothesi nostrae consentaneum magis. Et credibile est, in corporibus, ut vim circulariter diffusam a ruptis bullis, ita in longum latumve aut profundum porrectam evenire a tubulis istis seu embolis (nam quilibet eorum antecedenti est tubulus, sequenti embolus) ultra quam status aëris aetherisve circulatio fert, vel, ut diximus, eductis; vel etiam, ut illinc eductis, ita hinc intrusis, uti in arcubus, qui a concavitate ad convexitatem vel contra flectuntur, fieri par est; ubi etiam humoris alicujus intra meatus jam interclusos illinc compressi, hinc dilatati, restituendi se conatus nonnunquam intercedere potest. Huc et lacrymae vitri, quibus similia sunt ab eruditissimo Joh. Ottio Schafhusano (qui cum doctissimo Henrico Screta studiorum socio duos mobilissimos sensus, ille visum, hic auditum nuper illustravit) observata filamenta vitri, pertinent: de quibus cum tot extent hypotheses, certum tamen est ad exhaustum vel distentum, id est circulationem aetheris, id est hypothesin nostram omnes reduci. Hobbius eas ex arcubus tensis componit, Vossius vacuum vel quasi vacuum intus esse ait, Honoratus Fabri spiritum quendam tensum (instar funiculi Francisci Lini), Huddenius aliique compressionem praeferunt: Hypothesis nostra non parvo veritatis indicio omnes conciliat. In arcu tenso hinc compressio, illinc distractio est: ubicunque aër distrahitur, aether colligitur. Cum ergo lacryma calens aquae immergitur extinguiturque ignis, qui in omni re calefacta aërem discutit expellitque, contraria aqua comprimitur, vel quod idem est, acido ignis ab alcali aquae subito absorpto, aether replendo loco attrahitur colligiturque in bullas illas ductusque totum vitrum innumerabilibus cuniculis perforantes, coëuntes tamen omnes in apice, quo lacryma in aquam postremo intravit, quorsum se ignis jam ab initio recipit, prorsus ut virgae ferreae uno extremo candente extincto alterum incalescit: omnes ergo cuniculi isti, quibus velut minis, ut vocant, totum vitri corpus suffossum est, aethere seu, ut alii vocarent, vacuo vel nihilo pleni sunt, instar vitri exhausti, instar aeolipilae, in qua calore rarefactus expulsusque aër negato obturatione foraminis post refrigerationem reditu, multum vacui, id est, justo plus aetheris collecti, intus reliquit. Hic vero nihil aeolipilae, subito refrigeratae obturataeque exemplo congruentius. Aperto igitur apice, vel alia bulla cum caeteris omnibus communicante, aetherem collectum cum magna vi exire,

vitrum intrare, canaliculos autem omnes, quippe tam subtiles fragilesque rumpi, vitrum ergo in pulverem violenter dissilientem abire necesse est. Unde patet quoque cur frigore aucto, ut si nive sepelitur, fortior, si ignis calore retractetur, debilior sit ruptura. Nam frigus, quod initio fecit loci (vasorum quippe, hoc loco, vitri, lateribus se contrahentibus et imminuentibus) subitum incrementum; ergo locum aëre vacuum, ergo aetheris collectionem, et pororum, quippe corpore contracto, obstructionem auget. Igne novo impletur locus, minuitur aether, admittitur aër, pori aperiuntur. Patet ergo hoc quoque naturae miraculum Elateri Aetheris deberi. Motus sanguinis, unde caeterae functiones animales proficiscuntur (cor enim motum debet sanguini, non, ut Cartesius putabat, sanguis, cordi) sine dubio a nitri cujusdam aërei respiratione recepti reactione petendus est. Credibile enim est, ut mare sale, ita aërem nitro quodam impraegnatum esse. Unde aër semel haustus nisi recenti misceatur, novo haustui est inutilis, idque et Drebelii experimento confirmatur, qui essentiam quandam aëris praebet, quae aëri etiam torpido et insalubri instillata, vivificam quandam refrigerationem confestim praestabat. Jam si motus vitalis a reactione est, erit ab Elatere, per superiora, ergo ab aetheris circulatione. Ab eadem esse Motum Oceani in tellure, analogum Sanguinis circulatione in corpore, supra dictum est: idem est de motu aëris seu vento. Constat ventum aqua se lapsu dispergente fieri arte posse, idem credibile est naturam saepe facere in montium cavernis; folles ventum faciunt compressione, eodem modo nubes gravidae descensu suo elidunt aërem inter se et terram. Simplex quilibet motus in aëre facit ventum, quia aërem ictu comprimit, ac proinde loco replendo alium attrahit. Ignis facit ventum, et calor quivis, quia omne rarefaciens attrahit aliquid subtilius rarefacto, replendo loco exhausto, idque ex illo toties inculcato principio Elateris. Unde ignis aëre indiget, non ad pabulum, sed tuendum locum. Hinc stati venti intra Tropicos solum sequuntur, loca clausa, fornicata templa, cavernae tempore frigido attrahunt aërem seu ventum, quia sunt aëre ambiente calidiora: tempore ambientis calido, quia tunc frigida, remittunt. Hinc stati certorum locorum ac temporum Venti: addendae in hoc negotio doctae Poulletii observationes. Vapores proprie sol non attrahit, et eorum ascensus non tam pendet ex principio Elateris, quam gravitatis, nam quod ignis, fumus, vapor, ros majalis ovi putamine

conclusus, succus in plantis sole evocante, adeoque sublimabilia aut distillabilia ascendunt, fit, quia aethere interposito ita rarefiunt, ut fiant aëre paris spatii leviora. Ipsa tamen displosionis in igne vis Elastica plurimum confert, unde cum elevatio prohibita est, ut in distillatione per descensum, nihilominus calor distillabilia a se repellit, sed regulariter alias sursum, quia ipse calor seu ignis, quippe aëre levior, ascensu suo ea abripit. Si ergo motus marium ac ventorum, vaporum, sanguinis fermentationes, reactiones, restitutiones, ab Elatere proficiscuntur, quid ultra addemus? Nam ab eodem totam fere Musicam, et omnino magnam artis Ballisticae, magnam reliquae mechanicae partem pendere, satis hinc conjici potest. Certe nervos nil aliud, quam chordas tensas esse credibile, quarum violenta adductione, musculi utrinque contracti se levant et membra secum. Hinc sensionis explicandae causa ad liquorem quendam nerveum refugere nihil necesse est, cum in re tensa pulsata conatus ad initium usque pertingat, quia et diductio ad quodlibet punctum sensibile pertinet. Utque tensa et moventur tardius, et rumpuntur facilius humectata, aëre, qui intus est, incrassato ac proinde minus dilatabili; ita idem in somno nervis evenit, ut sensio quasi obruatur. His jam in quolibet puncto sensibili, et versus quodlibet punctum sensibile, seu in quolibet angulo sensibili, et ita in corpore ad sensum continue tendibili suppositis tensionis et strictionis causis, demonstrari illa tam multa praeclara theoremata physico-mathematica possunt, quae et experienti et ratiocinanti in promptu sunt, atque in novam quandam partem Matheseos mixtae, quam Elasticam appellare licebit, coire poterunt, de decremento motus, aut incremento potentiae statum violentum rei inferentis, de incremento restitutionis ad incrementum motus gravium inverso, de vibrationibus isochronis, de restitutionibus ejusdem etiam a diversa tensione isochronis, de rupturae tempore et loco, de proportione elateris ad gravitatem, de lineis quas datum punctum in restitutione describit, et in specie de tensione lineae rectae in chorda, curvae in arcu, superficiei in tympano, solidi in vase, quaeque alia subtilissimi viri, Galilaeus, Torricellius, Honoratus Fabri, Stenonis, Joh. Alphonsus Borellus, aliique demonstraverunt aut observaverunt. Atque hic admirari licet praxin Dei in oeconomia rerum geometrisantis. Etsi enim per na-

turam rerum impossibile sit, corpus aliquod totum lucere, perspicuum, fluidum, grave, molle, tendibile, flexibile, durum, calidum etc., item motum continuum, uniformem, uniformiter acceleratum vel diminutum, rectilineum, circularem, reflexum, refractum, permutatum, exacte esse; effectum magnetis, luminis et soni ad quodlibet punctum assignabile pervenire etc., evenit tamen, ut summa ad sensum ἀκριβείᾳ haec omnia, etsi non sint ita, tamen sensu esse videantur, et quantum ad usum nostrum, perinde sit ac si essent; atque ita incredibili Dei beneficio Optica, Musica, Statica, Elastica, πληγική (seu de impetu et percussione), Myologia seu de motu musculorum, imo et Pyrotechnica et Mechanica universa, et quidquid est mixtarum ex Physica Mathematicaque scientarum, ad purarum invidiam usque, non fallentibus ad sensum (nisi per accidens) theorematibus excoli possint. Quod nisi motibus structurisque qualitatum ac motuum sensibilium causatricibus infra quodlibet punctum sensibile imminutis, et in quamlibet plagam sensibilem directis, inimitabili artificio, non poterat procurari.

60. Atque ita ostendimus etiam duritiem, etiam tensorum restitutionem ab atmosphaerae gravitate et aetheris elatere peti posse. Unum praetereundum non est, ut ad principia chemica et bullas nostras redeamus, ab ipso Helmontio, Tachenio, aliisque praeter acidum et alcali addi Archaeum seu Rectorem, qui excitet duo illa naturae instrumenta ad reactionem: et sane sentimus mustum expressum non statim, sed ubi aliquamdiu quievit, sua sponte excitatum fermentare. Is vero Archaeus nihil est aliud, quam aether interspersus; modus, quo agit, nil aliud, quam universalis circulatio aetheris, qua et digestio rerum non nisi extrinseca excitatione fermentantium promovetur, qua tum omnia, tum liquida potissimum, sunt in perpetuo intestino motu, gravia subsidunt, heterogenea separantur, paries intergerinus phlegmatis ac terrae, alcali ab acido dividens, perrumpitur, actio sequitur. Adde supra §. 18. Is tamen aether non putandus est omnino liber esse et dissolutus, cum vix quicquam tale sit in rebus, et in minimis atomis innumerabilium specierum varietas lateat; plerumque igitur erit et ipse collectus in bullas suas jam liquida jam sicca forma velatas, id est, alcali ex sensibilibus volatissimum seu mercurialissimum, perpetuis displosionibus insensibilibus activum (omnis enim bulla aethere quam aëre plenior est alcali, unde et in

lacrymis vitri igne seu acido aquae extinguentis alcali absumto; magnum in vitro manet vacuum, seu alcali, seu aetheris collectio) hic est Helmontii Archaeus, Tachenii Rector, aliorum spiritus mundi, quidam tertium principium mercuriale vocant, eique tribuunt vim illam nobilissimam formatricem seu plasticam, qualis in seminibus, in sale communi, et potissimum in Mercurio, modo separari possit; unde Mercurius in amalgamate cum metallis in illam elegantem excrescentiam arborescit. Hic liquor aethereus, hoc sal coeleste, si capi posse Helmontio credimus, credibile est exercere tantas virtutes, quantas in suo alcahest seu alcali est, ille veneratur, de quo experientiae judicium esto. Quemadmodum etiam an huic alcali volatilissimo aliud acidum volatilissimum, seu mercurialissimum perfectione et virtute respondens, solum ei per reactionem figendo par, calido innato analogum, ut illud humido radicali; igni proportionale, ut alcahest aquae; filius solis, ut illud lunae; essentia nitri (nam etsi superficiaria nitri constitutio alcalizata est, solent tamen interiora seu centralia exterioribus seu superficiariis contraria esse) ut illud salis communis, opponatur, adde supra §. 50, 53. Etsi enim possint in subtilitate et virtute dari graduum progressus in infinitum, dantur tamen summi gradus sensibiles, ita ut quod ultra est, ne virtute quidem, nedum forma sensibili ad nos pertingat; in hoc ergo limite Philosopho pariter atque Empirico subsistendum.

Conclusio.

Nunc Hypotheseos meae summam inibo: suppono globorum mundanorum gyrationem circa proprium axem, et unius solis in nostro magno orbe actionem rectilineam extra se, ceterorum non nisi quatenus lucem a sole repercutiunt. Ex his motibus primigeniis deduco systema Copernicanum in mundo, et circulationem aetheris cum luce in tellure et circa tellurem. Ex hac motus maris et ventorum, verticitatem magetis, ac denique, a quibus caetera non naturae minus quam artis machinamenta pendent, Gravitatem et Elaterem. Nam aether res densiores, quam fortissimo suo motui cuncta discutienti conveniat, cum potest (ut quando consistunt ex cumulo tantum male unito eorum quae non potest) discutit, hinc vis Elastica seu restitu-

teria non compressorum tantum, sed et per consequens dilatatorum, quia omnis dilatatio unius est compressio alterius; cum non potest (quando vasis suis separata circulatione firmatis continentur) dejicit, hinc gravitas. Speciatim ex motu recto a sole, et curvo a terra, oriuntur gyrationes certarum rerum globi nostri circa centrum particulare, seu bullae, nonnunquam etiam annuli, tubuli aliaque vasa ad rem pertinentia, a quibus consistentia rerum et specierum varietas. Ex vasis plenitudine variantibus, circulatione aetheris accedente, oritur in rebus diversitas gravitatis: unde jam omnia Phaenomena ponderum, item Hydrostatica, Aërostatica. Ex bullis ruptis et in alias aetheris circulatione transfusis, item (salvo vase) ex embolis attractis vel repulsis oritur Vis Elastica aetheris, seu conatus se restituendi in gradum raritatis vel densitatis praesenti aetheris sphaerae et structurae partium rei congruentem, unde impetus, repercussiones, reflexiones, refractiones, vibrationes, soni, solutiones, praecipitationes, fermentationes, principia Chemicorum, sympathiae, antipathiae, attractiones, motus musculorum, virtus ignis, pulveris pyrii, veneni, tincturae, si qua est; omnes omnino actiones vehementiores quam pro mole agentis, et quicquid nobis miraculorum naturalium physica extraordinaria monstrat. Atque haec quidem Hypothesis ita mihi varias aliorum hypotheses jungere inter se et conciliare; ubi deficiunt, supplere; ubi subsistunt, provehere; ubi obscurae sunt et ἄῤῥητοι, explicare atque intelligibiles reddere videtur, ut jam non tam de nova quadam hypothesi generali, quam particulari ac distincta applicatione ad phaenomena, magis magisque passim conspirantium Eruditorum pariter et mechanicorum industria eruenda, atque in solidae et feracis Philosophiae aerarium referenda, ac denique de translatione inventorum ad usum vitae augendamque potentiam et felicitatem generis humani, qui unus Philosophandi finis est, cogitandum esse videatur. Sin minus, saltem a conatu delineandi tale aliquid, dissertationi verbis illaboratae ac proinde obscuriusculae, ordine ut apparet confusaneae (quod in primis tentamentis solet, quae novis subinde memoriam subeuntibus passim interpolata non satis cohaerent) si res ipsas spectes, parum, ut in tanta tractandorum sylva, explicatae, veniam spero.

THEORIA MOTUS ABSTRACTI

[illegible]

RATIONES MOTUUM UNIVERSALES,

A SENSU ET PHAENOMENIS INDEPENDENTES.

AUTORE

G. G. L. L.

ILLUSTRI ACADEMIAE

R E G I A E F R A N C I C A E,

AD PROMOVENDA

MATHEMATICA, PHYSICA, MEDICA STUDIA ET AUGENDA
GENERIS HUMANI COMMODA RECENS INSTITUTAE.

Inter tot acta MAGNI REGIS vestri, illa fortuna, illo spiritu digna, quo tanta potentiae moles sapientissime regitur, est cur non minima credam futura, quae per vos geret: plus est de genere humano mereri, quam de gente tantum sua: magnum est, ditionem suam ex culta cultissimam reddere, ex felice beatam; jungere maria fossis, et per Pyrenaeorum radices navigare, et commercia regni connectere, et substituere Herculeo illi piratis infami aliud in suo fretum; insurgere potentia navali, et ad rei militaris apicem eniti; venerabilem se christianis reddere, barbaris metuendum: sed majus est naturam arti subjicere, pomoeria humanae potentiae propagare, et debellare hostes illos invisibiles intestinos, in quos nulla vis satis valida est. Quam saepe maximi heroës, qui decies centena hominum millia ad nutum parata habuerunt, levi morbo ante diem succubuere! et tamen fortasse vincendi ejus rationem anicula aliqua in vicino neglecta abjectaque tenebat. Felices nos, et forte corporis nostri domini essemus, si a decem retro seculis id actum esset, quod nunc aegre coeptum est. Sed nunquam utilia sero inchoantur: posteritas saltem aetati nostrae gratias aget, et inter sidera collocabit Principem, cujus auspiciis naturae claustra perfringentur, cui gloriae Christianissimum Regem insita vis altae mentis, institutio, vires, opes, flos affluentium ingeniorum et caetera, quibus Gallia orbem provocare potest, admovent. Si serio res, si majore solito nisu agitur, possumus ipsi vivendo attingere fructum laborum temporis nostri. Neque enim mirum est, unum vix seculo praestiturum, quod centum anno: cum etiam centum juncti centies acturi sint, quantum totidem sparsi. Sparsi incohaerentia, imo pugnantia faciunt; plurima et faciliora saepius, quam opus est, maximorum et potissimorum nihil, miscentque inopiam superfluitati. Juncti non materiam tantum labo-

ris, sed et molestiam minuunt, condiuntque sibi difficultatem mutui applausus suavitate. Id vos exemplo vestro docebitis inter primos: cum enim tantas res Auzuti, Bullialdi, Cassini, Hugenii, Pecqueti, Petiti, Robervallii, Thevenotii et tot alii gesserint, quid poterit collatis consiliis nisi magnum, nisi vobis honorificum, gloriosum Regi, generi humano fructuosum expectari? Nec ominibus vos, nec praeconiis egetis: dudum haec de vobis sentit orbis, liceat tamen accedere me quoque publicae voci. Cum enim esset mihi nuper ad Carcavium vestrum, virum fama et doctrina insignem et ex flore egregiorum hominum quibus vos abundatis ad regiae bibliothecae hujusque adeo ipsius Academiae curam lectum, scribendi ab ipsomet, qua est humanitate, internuntio CLmo Ferrando praebita occasio; malui schedam hanc utcunque exiguam et illaboratam adjicere, quam omnino vacuis manibus venire. Argumentum certe vobis dignum est: nam labyrinthum in primis continui et motus compositionibus ingenia implicantem evolvisse, plurimum refert ad constituenda scientiarum fundamenta, confundendos scepticorum triumphos; Geometriam indivisibilium et arithmeticam infinitorum, tot egregiorum theorematum parentes, in solido locandas; hypothesin physicam per omnia congruentem elaborandam, et quod maximum est de intima cogitationis natura et mentis perennitate et causa prima demonstrationes plane geometricas hactenus intactas impetrandas. Unde boni quoque et aequi, jurisque ac legum fontes ita clari ac limpidi, ita simul et ambitu parvi et recessibus profundi profluunt, ut pro magnis voluminibus esse et solvendis omnibus casibus mirabili ad usum compendio sufficere possint, quale nihil, opinor, vulgo occurrit. Sed erit hic nobis alias professus labor. Caeterum, ut ad praesentia redeamus, imperfectionem primi tentaminis lubens agnosco; spero tamen nonnihil praestitum esse: indivisibilium naturam illustratam; cohaesionis rationem nunc primum detectam; physico-geometricam curvarum ex meris rectis et omnis generis curvorum corporum ex solis rectilineis expositam constructionem lentibus elaborandis fortasse profuturam; Hypothesin allatam, unde omnia naturae phaenomena mechanice explicari possint; quin et ostensum esse, quae sit materia illa magnetica, cujus circa terram motui adscribendam verticitatem, suspicatum nuper etiam ingeniosissimum Auzutum post Theoriam motus concreti jam excusam demum didici, quanquam qualis illa sit, non explicuerit: quo detecto ad constantem de va-

riatione magnetica hypothesin longitudinesque perveniri posse, nec ipse Auzutus desperat; denique si nihil aliud, cogitationum saltem non poenitendarum semina sparsa esse. Eas aliquando, cum plus otii erit, felicius fortasse persequar, et ad caeteros labores boni publici causa susceptos perficiendos animabor, si vos, si vestri similes faustis ominibus initia qualiacunque prosequentur.

Theoriae motus abstracti definitiones.

Corpus, quod movetur, vel contingit aliud, vel non contingit. 1) Contingit, si non datur spatium medium. Contingens si movetur, vel praetervehitur, vel impingit; 2) praetervehitur, si continuato motu suo alterius nihil loco moveret; sin aliquid moveret, 3) impellet, et si alterum quoque movetur, impinget; sed tamen vocum harum promiscuus fere usus est. 4) Toti impingit, quod continuato motu suo alterum totum loco pellit; 5) parti impingit, si secus. Porro varie impingitur, vel ratione lineae motus vel termini. 6) Linea motus est, quam describit centrum moti; linea impactus est, quam describit centrum impingentis seu ejus de moto, quod in excipientis locum successurum est. Unde interdum linea impactus a toto potest esse recta, a parte curva: quanquam ubi distinctione opus non est, in sequentibus lineae motus appellatione etiam pro linea impactus usurus sim. 7) Mensura lineae motus est vel ipsa linea motus sibi ipsi, si recta est, vel si obliqua est, recta facta ex obliqua retrorsum, extremo quod prorsum vertitur immoto, extensa. Linea motus impingentis vel comparatur ad lineam motus alterius vel ad centrum ejus. Si comparatur linea motus impingentis cum linea motus 8) excipientis, id est ejus, in quod impingitur, tum vel lineae motus impingentis et excipientis junguntur extremis, vel extremum lineae motus impingentis tangit non extremum, sed aliud punctum lineae motus excipientis. Hoc casu impingens dicitur 9) incurrere in excipiens, et excipiens tantum praetervehitur. Illo casu utrumque est impingens et dicuntur 10) concurrere: concursus est vel 11) occursus, quando mensura lineae motus unius continuata cadet in latus adventus alterius, vel 12) accursus, quando id non contingit. Occursus est vel 13) rectus, si mensura lineae motus producta facit angulum rec-

tum ad latus adventus alterius, seu coincidit cum mensura lineae motus alterius, vel 14) obliquus, si secus. Accursus est vel 15) rectus, si mensura lineae motus est parallela lateri adventus alterius, seu facit angulum rectum ad mensuram lineae motus alterius; vel 16) obliquus, si secus. 17) Latus adventus, seu a quo venitur, est recta, ex qua (planum, ex quo) mensura lineae motus perpendiculariter exit versus impactum. Porro si comparatur linea motus impingentis ad centrum excipientis, impactus est vel 18) centralis, si linea motus impingentis producta incidit in centrum corporis excipientis, vel 19) eccentricus, si secus. 20) Radere dicitur, quod momento contactus totum contactum corpus loco pellere non conatur (sive id sit praetervehens sive impingens, sed eccentrice). Denique si comparantur termini impingentis et excipientis, sunt vel utrinque superficies vel ab altera parte punctum aut linea. 21) Unum corpus constituunt partes, quae sibi contiguae aliquandiu mansurae sunt. 22) Cohaerent partes, quarum una mota movebuntur caeterae. 23) Flexio est mutatio circa rectitudinem et curvitatem. 24) Facies est omne extremum rei, quo tangi potest ab alio in unam plagam, seu quod una recta totum abscindi potest. 25) Durities est cohaesio non superabilis parvo motu. 26) Figura simplex est, cujus quaelibet facies una linea vel superficie clauditur. 27) Una linea vel superficies est, quae uno motu fieri potest. 28) Motus unus est prior et posterior, si continuatio sponte facta est, seu per se, nullo licet extrinseco impulsu accedente. 29) Corpus rotiforme est, quod potest moveri, ut locum suum non deserat, id est, ut nulla parte sui in locum veniat, in quo non jam tum aliqua ejus pars fuerit, qualis motus est orbium coelestium veteribus creditorum, qualemque solum in pleno existere necesse est.

Fundamenta praedemonstrabilia.

1) Dantur actu partes in continuo, contra quam sentit acutissimus Thomas Angelus. 2) Eaeque infinitae actu, indefinitum enim Cartesii non in re est, sed cogitante. 3) Nullum est minimum in spatio aut corpore, seu cujus magnitudo vel pars sit nulla: talis enim rei nec situs ullus est, cum quicquid alicubi situm est, simul a pluribus se non tangentibus tangi possit, ac proinde plures habeat facies; sed nec poni

minimum potest, quin sequatur tot esse totius quot partis minima, quod implicat. 4) Dantur indivisibilia seu inextensa, alioquin nec initium nec finis motus corporisve intelligi potest. Demonstratio haec est: datur initium finisque spatii, corporis, motus, temporis alicujus: esto illud, cujus initium quaeritur, expositum linea ab, cujus punctum medium c, et medium inter a et c sit d, et inter a et d sit e, et ita porro: quaeratur initium sinistrorsum, in latere a. Ajo ac non esse initium, quia ei adimi potest dc salvo initio; nec ad, quia ed adimi potest, et ita porro; nihil ergo initium est, cui aliquid dextrorsum adimi potest. Cui nihil extensionis adimi potest, inextensum est; initium ergo corporis, spatii, motus, temporis (punctum nimirum, conatus, instans) aut nullum, quod absurdum, aut inextensum est, quod erat demonstrandum. 5) Punctum non est, cujus pars nulla est, nec cujus pars non consideratur; sed cujus extensio nulla est, seu cujus partes sunt indistantes, cujus magnitudo est inconsiderabilis, inassignabilis, minor quam quae ratione, nisi infinita ad aliam sensibilem exponi possit, minor quam quae dari potest: atque hoc est fundamentum Methodi Cavalerianae, quo ejus veritas evidenter demonstratur, ut cogitentur quaedam ut sic dicam rudimenta seu initia linearum figurarumque qualibet dabili minora. 6) Quietis ad motum non est ratio quae puncti ad spatium, sed quae nullius ad unum. 7) Motus est continuus seu nullis quietulis interruptus. Nam 8) ubi semel res quieverit, nisi nova motus causa accedat, semper quiescet. 9) Contra, quod semel movetur, quantum in ipso est, semper movetur eadem velocitate et plaga. 10) Conatus est ad motum, ut punctum ad spatium, seu ut unum ad infinitum, est enim initium finisque motus. 11) Unde quicquid movetur, quantumcunque debiliter, quantumcunque etiam sit ostaculum, conatum per omnia obstantia in pleno propagabit in infinitum, ac proinde omnibus aliis imprimet conatum suum: neque enim negari potest, quin pergere etiam cum desinit, saltem conetur; ac proinde conetur seu, quod idem est, incipiat obstantia quantacunque movere, etsi ab iis superetur. 12) Possunt igitur in eodem corpore simul esse plures conatus contrarii. Nam si sit linea ab, et c tendat ab a ad b, contra d ab ad a et concurrant; momento concursus c conabitur ad b, etsi cogitetur desinere moveri, quia finis motus est conatus; sed et conabitur retro, si oppositum co-

gitatur praevalere, incipiet enim retro ire, sed etsi neutrum praevaleat, idem erit, quia conatus omnis propagatur per obstantia in infinitum, et ita utriusque in utrumque: et si aequali celeritate nihil agitur, nec duplicata seu majore quicquam agetur, quia bis nihil est nihil. 13) Unum corporis moti punctum tempore conatus seu minore, quam quod dari potest, est in pluribus locis seu punctis spatii, id est, implebit partem spatii se majorem, vel majorem quam implet quiescens, aut tardius motum, aut conans in unam tantum plagam; attamen et ipsam inassignabilem seu in puncto consistentem, quamquam puncti corporis (vel puncti spatii quod implet quiescens) ea sit ratio ad punctum spatii quod implet motu, quae est angulus contactus ad rectilineum, seu puncti ad lineam. 14) Sed et omnino quicquid movetur, non est unquam in uno loco, dum movetur, ne instanti quidem seu tempore minimo, quia quod in tempore movetur, in instanti conatur seu incipit desinitque moveri, id est locum mutare: nec refert dicere, quolibet tempore minore quam quod dari potest conari, minimo vero in loco esse: non enim datur pars temporis minima, alioquin et spatii dabitur. Nam quod tempore absolvit lineam, tempore minore quam quod dari potest, absolvet lineam minorem, quam quae dari potest seu punctum; et tempore absolute minimo partem spatii absolute minimam, qualis nulla est per fund. 3. 15) Contra, tempore impulsus, impactus, concursus duo corporum extrema seu puncta se penetrant, seu sunt in eodem spatii puncto: cum enim concurrentium alterum in alterius locum conetur, incipiet in eo esse, id est incipiet penetrare, vel uniri. Conatus enim est initium, penetratio unio; sunt igitur in initio unionis, seu eorum termini sunt unum. 16) Ergo corpora, quae se premunt vel impellunt, cohaerent: nam eorum termini unum sunt, jam ὧν τὰ ἔσχατα ἕν, ea continua seu cohaerentia sunt, etiam Aristotele definiente, quia si duo in uno loco sunt, alterum sine altero impelli non potest. 17) Nullus conatus sine motu durat ultra momentum praeterquam in mentibus. Nam quod in momento est conatus, id in tempore motus corporis: hic aperitur porta prosecuturo ad veram corporis mentisque discriminationem, hactenus a nemine explicatam. Omne enim corpus est mens momentanea, seu carens recordatione, quia conatum simul suum et alienum contrarium (duobus enim, actione et reactione, seu comparatione

ac proinde harmonia, ad sensum et sine quibus sensus nullus est, voluptatem vel dolorem opus est) non retinet ultra momentum: ergo caret memoria, caret sensu actionum passionumque suarum, caret cogitatione. 18) Punctum puncto, conatus conatu major est, instans vero instanti aequale, unde tempus exponitur motu uniformi in linea eadem, quanquam non desint instanti partes suae, sed indistantes (ut anguli in puncto), quas Scholastici, nescio an Euclidis exemplo, vocant signa, ut in iis apparet, quae sunt simul tempore, sed non simul natura, quia alterum alterius causa est: item in motu accelerato, qui cum quolibet instanti atque ita statim ab initio crescat, crescere autem supponat prius et posterius; necesse est eo casu in instanti dato signum unum alio prius esse, etsi citra distantiam seu extensionem, adde probl. 24. 25, conatuum inaequalitatem nemo facile negaverit, sed inde sequitur inaequalitas punctorum. Conatum conatu majorem esse, seu corpus, quod celerius alio movetur, jam ab initio plus spatii absolvere, patet: nam si initio tantundem absolvit, semper tantundem absolvet, quia motus ut incipit, ita pergit, nisi sit causa extrinseca mutans per fund. 9; sed et si initia aequalia sunt, etiam fines aequales sunt, ergo momento concursus tantum aget velox in tardum, quantum tardum in velox, quod est absurdum: sunto ergo inaequales. Ergo instanti dato fortior plus spatii absolvet, quam tardior, sed quilibet conatus non potest percurrere uno instanti plus quam punctum, seu partem spatii minorem quam quae exponi potest; alioquin in tempore percurreret lineam infinitam: est ergo punctum puncto majus. Unde arcus inassignabilis circuli majoris major est, quam minoris; et linea quaelibet, ducta a centro ad circumferentiam, circulo commensurabilis, seu circumductione sua circuli genitrix, est sector minimus perpetuo crescens, sed intra inextensionem. Hinc et difficultates de duabis rotis concentricis super plani recta gyratis, de incommensurabilibus, de angulo contactus, et tot alia solvuntur, ad quae explicanda eloquentissimus Belinus omnes totius orbis philosophos provocaverat, et quibus Sceptici maxime triumphant. Angulus est quantitas puncti concursus, seu portio circuli minoris quam qui assignari potest, id est, Centri: tota de angulis doctrina est de quantitatibus inextensorum. Arcus minor quam qui dari potest utique chorda sua major est, quanquam haec quoque sit minor, quam quae exponi potest, seu con-

sistat in puncto. At ita, inquies, polygonum infinitangulum non erit circulo aequale: respondeo, non esse aequalis magnitudinis, etsi sit aequalis extensionis; differentia enim minor est, quam ut ullo numero exprimi possit. Unde ex definitione Euclidis: punctum est, cujus pars nulla est, nullus error irripere potuit demonstrationibus de extensione (ut quidem profundissimo alioquin Hobbio videbatur, qui ex eo capite 47 Imi canonem sinuum et quicquid quadraturae suae obstat, in dubium vocat, quod a tanto viro inexspectatum nunquam sine admiratione legi), modo intelligatur pars extensionis, seu pars distans ab alia parte. Certe, si arcus et chorda inassignabiles coincidunt, idem erit conatus in recta, qui in arcu: conatus enim est in arcu aut recta inassignabili. Jam si conatus idem est, etiam motus in recta et arcu, id est motus circularis et rectus (quia qualis motus coepit continuatur, seu qualis conatus talis motus) idem erit, quod est absurdum. 19) Si duo conatus simul sunt servabiles, componuntur in unum, motu utroque servato, ut in sphaera super recta plani gyrata patet, ubi motus puncti alicujus in superficie designati, ex recto et circulari per minima seu per conatus mixtis componitur in Cycloeidalem, adde de spirali th. 7 et 12. Meretur hoc argumentum diligentius tractari a Geometris, ut appareat, quarum linearum conatus, quibus mixti, quas lineas novas producant, unde multa fortasse nova theoremata geometrica demonstrari poterunt. 20) Corpus, quod movetur, sine diminutione motus sui imprimit alteri id, quod alterum recipere potest salvo motu priore, hinc theor. 5, 6. 21) Si quid non simul omnia agere potest et par omnium causa est, et tertium nullum est, nihil agit. Hinc causa quietis theor. 11, 12. 22) Si conatus incomponibiles sunt inaequales, sibi adimuntur, servata plaga fortioris, theor. 1, 2, 3, quia duo conatus sibi adimi possunt, est enim minor aequalis parti majoris: quamdiu igitur res exitum reperit parte alterutrius, non est cur tertium eligatur. 23) Si conatus incomponibiles sunt aequales, plaga mutuo deceditur, seu tertia intermedia, si qua dari potest, eligitur, servata conatus celeritate, theor. 7, 8, 9, 10. Hic est velut apex rationalitatis in motu, cum non sola subtractione bruta aequalium, sed et electione tertii propioris, mira quadam sed necessaria prudentiae specie res conficiatur, quod non facile alioquin in tota geometria aut phoronomia occurrit: cum ergo caetera omnia pendeant ex principio illo, totum

esse majus parte, quaeque alia sola additione et subtractione absolvenda Euclides praefixit Elementis; hoc unum cum fundam. 20 pendet ex nobilissimo illo: 24) Nihil est sine ratione, cujus consectaria sunt, quam minimum mutandum, inter contraria medium eligendum, quidvis uni addendum, ne quid alterutri adimatur, multaque alia, quae in scientia quoque civili dominantur.

Theoremata.

1. Si corpus impingit in aliud quiescens, vel tardius directe occurrens vel tardius antecedens, secum abripit (id est movet in eandem plagam) differentia celeritatum. 2. Si incurrens centraliter movetur tardius praetervehente, praetervehens secum abripit incurrens differentia celeritatum. 3. Sin incurrens et in genere impingens centraliter movetur celerius excipiente, impingens abripit totum excipiens differentia celeritatum. 4. Sin moventur aequivelociter incurrens et praetervehens, ambo movebuntur perinde ut concurrentia aequivelocia angulum facientia, de quibus mox theor. 7. 5. Si tamen praetervehens et omnino excipiens movetur circa proprium axem (sive tardius, sive celerius), simul et impingens et excipiens et retinebit motum suum et accipiet motum alterius. 6. Impingens eccentrice (sive celerius, sive tardius) in corpus cohaerens, qua cohaeret, et continuabit motum suum, et excipienti priorem relinquet, et eidem motum circa proprium axem motui impactus in loco impactus aequivelocem addet. 7. Si duo corpora concurrunt aequiveIociter (vel etiam alterum incurrit, alterum praetervehitur, vid. theorema 4) et fit angulus (quod semper fit in accursu, nunquam in occursu recto) isque est bisectilis; duo corpora simul movebuntur recta (nisi motus unius sit uniformis, alterius acceleratus, quo casu oriri parabolas aliaque linearum genera Hobbio visum est, de quo alibi) angulum concursus (vel incursus) extrorsum bisecante (nisi duo conatus sibi mutuo addi possint, ut rectus circularisque in spiralem, servata singulorum celeritate, vid. fund. 19), celeritate vero priore. 8. Hinc sequitur, angulum incidentiae et reflexionis non esse semper aequales, sed in nostro casu (ubi utrumque concurrentium est mutuo incidens, utrumque compositum in unum reflectens) angulum incidentiae aut reflexionis rectilineum, uter minor est, esse alterius duplo supple-

mentum ad rectum. Causa aequalitatis in corporibus sensibilibus reddita est in Theoria motus concreti §. 22. 9. Hinc sequitur, solum angulum incidentiae rectilineum 30 graduum habere angulum reflexionis aequalem, secundum abstractas motus leges. 10. Incidentia et reflexio non aestimanda a superficie in quam inciditur, sed a linea recta per punctum concursus transeunte, ad mensuram lineae motus excipientis perpendiculari, ad latus adventus ejus parallela. 11. Sequitur etiam ex theor. 4, si duo concurrant aequivelociter arcubus similium et aequalium curvilineorum, utrumque recta perrecturum esse. 12. Si non detur angulus, qui sit bisectilis (non datur autem angulus omnino in occursu recto, non datur angulus bisectilis in alio impactu, si impingitur linea motus recta et curva, vel curva et curva figurae dissimilis aut inaequalis) et impactus aequivelox est, utrumque quiescet (nisi scilicet non opus sit bisectione, ut in concursu aequabilis et accelerati aut acceleratorum difformium; vel omnino non sit opus anguli sectione, ut in casu conatuum componibilium, vid. theor. 7) impingens et in quod impactum est, quatenus impactum est. 13. Partes, quibus non impactum est, cessante cohaesione pergent, qua possunt, et sequetur divisio, unio et transformatio. 14. Sin datur angulus, sed non bisecabilis, ambo quiescent (cum limitatione tamen theor. 11). 15. Ex naturae corporeae viribus nulla datur flexio exacte geometrica seu per minima, 16. nec corpus diutissimum, quia nec motus celerrimus. 17. Duae aliquae contiguae corporis partes cohaerent tum demum sibi, si se premunt, seu si is est corporis motus, ut una alterum impellat, id est in alterius locum sit successura. Hoc est principium omnis cohaesionis in rebus hactenus non traditum; propositio haec est conversa fundamenti 15. 18. Unumquodque illud tantum impellit seu in illud impingit, in cujus locum subiret ipso non praesente, et quidquid illi cohaeret. 19. Nulla est corporis cohaesio simul in tota facie eodem tempore. 20. Quiescentis nulla est cohaesio. 21. Corpus discontiguum plus resistit contiguo. 22. Si non datur vacuum, nullus quoque motus rectilineus,. aliusve in se non rediens (v. g. spiralis) dabitur. Hinc multa motus in pleno mira consectaria deduci possunt. 23. In corpore contiguo nihil refert, quanta sit longitudo (seu extensio secundum lineam motus). 24. In corpore cohaerente seu continuo nihil interest etiam, quanta sit latitudo (seu extensio secundum

perpendicularem ad lineam motus), scilicet corpus unum quantumcunque longum a quantumcunque brevi, corpus continuum quantumcunque latum a quantumcunque arcto, perinde ac si quantumvis minus esset, quantulocunque motus excessu impelli potest.

Problema generale.

Omnes possibiles lineas, figuras, corpora et motus secundum omnes lineas Physice construere meris motibus rectis inter se aequalibus, item meris motibus curvis cujuscunque generis, adhibitis corporibus quibuscunque. Triplex constructio est: geometrica, id est imaginaria, sed exacta; mechanica, id est realis, sed non exacta; et physica, id est realis et exacta. Geometrica continet modos, quibus corpora construi possunt, licet saepe a solo Deo, dummodo scilicet non implicare intelligantur, ut si circulus fiat flexione rectae per minima; Mechanica nostros; Physica eos, quibus natura res efficere potest, id est quos corpora producunt se ipsis.

Problemata specialia.

Problema 1. In omni corpore dato efficere cohaesionem; id fiet per theor. 17. 2. In omni corpore dato efficere duritiem; id fiet cohaesione magna, per def. 36, producta per probl. 1. 3. In omni corpore dato efficere flexionem; hoc problema accurate et geometrice ita, ut flexio fiat per minima extensionis, ex natura corporum solvi non potest. 4. In omni corpore quiescente efficere motum; id fiet per theor. 1. 5. Ex meris motibus efficere quietem; id fiet per theor. 11. Modus hic est per naturam rerum longe difficilior, quam modus faciendi motum, tantum abest, ut mota magis magisque per se tendant ad quietem, ut quibusdam, qui sensu ducuntur, persuasum est. 6. Ex meris motibus rectis facere motum circularem; id fiet per theor. 6 et 15. 7. Ex meris motibus curvilineis cujuscunque generis aequalis et similis figurae inter se efficere motum rectum; id fiet per theor. 7. De parabolico et spirali vid. theor. 7 et 12. 8. Ex meris motibus aequalibus efficere motum tardiorem. Fiat motus circularis per probl. 6, in corpore solido seu cohaerente per probl. 1 pars quaelibet centro vicinior tardius movebitur ex-

transitate. 9. Ex meris motibus aequalibus efficere motum celeriorem. Fiat corpus oblongum cohaerens quantum satis est per probl. 1, id gyretur circa axem longitudini non coincidentem, incursu facto excentrico per theor. 6. Ergo pars a centro remotior, ipsa minimum extremitas celerius movebitur. 10. Corpus motum retroagere; id fiet per theor. 1 effecto motu celeriore per probl. 9. 11. Repercussionem mutuam efficere; id fiet, si ambo ferantur a liquido quodam discontiguo propter theor. 21 ita subtili, ut plurimum alterius per alterius polos mutuo, non obstante occursu progrediatur; tunc enim etiam in corpus oppositum impetum mutuo transferent, unde non tantum repercussio, sed et viarum et celeritatum permutatio orietur. Talis subtilitas est in luce radiis diversorum lucidorum per unum foramen sine confusione transeuntibus, et in sono, et meridianis magneticis in eodem polo, inoffenso motu, se intersecantibus: et generatim in AETHERE, per hypotheses nostras, cujus cum motu potius quam suo corpora sensibilia ferantur, habebunt ab hoc subtili portitore motuum divaricationem Hugenio-Wrennianam, motus indestruibilitatem (nisi quatenus dispersione fit insensibilior) Cartesianam, elaterem, reflexionis refractionisque leges, motum circularem simplicem Hobbianum, cohaesionem, duritiem, bullas (velut proprium quendam mundulum propriam atmosphaeram, proprios polos, et magnetismos, et electricismos, propriam lucem), pleraque gravitatem, gravia descendentia accelerationem, pendula vibrationem; projecta motus impressi, sublato licet motore, retentionem; Chemici principia, Mechanici potentias, Physici phaenomena omnia globi nostri. De quo pluribus in Theoria motus concreti. Potest ergo assumto solo aethere theoria motus concreti derivari ex theoria motus abstracti, et solvi hoc problema generale: Omnes motus sensibiles explicare. Sed pergamus. 12. Detorsionem efficere; id fiet per theor. 17. 13. Permutationem viarum inter impingentia efficere; id fiet constructione probl. 11. 14. Corpora unire; id fiet omni abreptione et quiete, seu omni contiguitate permanente, vid. def. 22 per theor. 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13. 15. Ex multis corporibus efficere unum simplex, vid. def. 27; id fiet per theor. 13, omissis scilicet partibus, in quas non impingitur, id est incohaerentibus, id est non uno motu unitis. 16. Divisionem dati corporis efficere motu quantulocunque. Cum corpus quodlibet sit alicubi non cohaerens per theor. 19,

eatenus impellatur, ergo impelletur pars, alia quadam non impulsa per theor. 18. Impulsa autem abripietur per theor. 1, non impulsa non abripietur, ergo divisio partium facta est. Adde theor. 13, ubi divisio fit, sed non motu quantulocunque. 17. Ex meris corporibus rectilineis efficere Cylindrum. Sit columnare rectilineum motum circa proprium axem per probl. 6; dum gyratur, irrumpat simul progressu suo (simul enim et progredi et gyrari potest theor. 5 et 6) in materiam mollem seu quiescentem (et ideo per theor. 20 incohaerentem) aut saltem tardius motam. Circumgyratione igitur sua tantum abscindet a materia molli, in quam irrupit, ut integrum absolvat cylindrum. Atque ita cum in uno latere materiam mollem ingressum sit columnare rectilineum, cylinder egredietur. Quod erat faciendum. 18. Ex meris rectilineis efficere conum. Gyretur pyramis rectangularis circa suam altitudinem intra materiam mollem eadem methodo, qua factus est cylinder probl. 17. 19. Ex rectilineis et cono (cylindro) efficere sphaeram. Sit conus (cylinder) latior, quam altior, is gyretur circa latitudinem seu diametrum baseos (medii circuli ad basin paralleli) intra materiam mollem eadem methodo, qua factus est cylinder probl. 17. 20. Corpora sectionum conicarum, et omnino datae cujuslibet figurae corpus efficere. Fiat corpus latius quam altius, cujus basis sit data figura, coniforme vel cylindriforme, id est nullibi latius, quam in basi: id gyretur intra materiam mollem, methodo dicta probl. 19. Ex hoc principio pro re nata variato lentium et speculorum secundum conicas sectiones formatorum tantis studiis quaesitam elaborationem derivari rationis est, qua de re cogitata nostra alio loco exponemus. 21. Dato motu figuram efficere; id fiet, si ille motus fiat intra materiam mollem methodo dicta. 22. Dato corpore figuram efficere. Hoc problema non indiget multa constructione, quia dato corpore vel secto, figura respondens, quippe terminus ejus, data est, v. g. data sphaera datur circulus, dato cono ellipsis sola sectione. 23. Data figura motum efficere. Hoc videtur effici posse, si mobile ita intra crenam cohaerentem datae figurae (sectione factam) arctatum sit, ut impulsum aliam viam quam per crenam non inveniat. Ita enim eliget potius motum in figura crenae, id est in figura data, quam ut omnia quiescant (per fund. 20, 23). 24. Datum motum continue accelerare. 25. Eundem retardare, in ratione data. Hoc puto fieri posse, si in diversis signis ejusdem instantis (vid.

fund. 18) diversi conatus eidem corpori imprimantur. Si prior est celerior, retardabitur; si posterior, accelerabitur motus in ea ratione, quae est celeritatis prioris ad posteriorem. Sed etsi plures sint impressiones, etsi celerior tardioribus interponatur, vel contra; continua multiplicatione ob accelerationem, divisione ob retardationem exitum res reperiet. Fateor tamen tria haec postrema problemata nondum a me satis expensa exacteve constructa esse.

Usus.

Etsi haec aliave solvi non possent ex abstractis motus rationibus in corporibus absolute consideratis, in sensibilibus tamen, assumto saltem aethere insensibili, facile explicari potest, qua ratione efficiatur, ut nullus error sensibilis rationes nostras turbet, quod phaenomenis sufficit. Nimirum longe aliter natura (quatenus sensibilis est, nam alioquin interioribus ejus figuras accuratas ex abstractis motus legibus secundum problemata praemissa construi, qualem constructionem physicam voco, non possibile tantum, sed et necessarium est) et ars haec problemata solvit, quam geometra, mechanice scilicet, motibus non continuis, sed revera interruptis; uti Geometrae describunt quadratricem per puncta, et Archimedes quadrat circulum per polygona, spreto errore nihil phaenomena turbaturo. Sensus enim dijudicare non potest, corpus aliquod unum continuum contiguumve sit, an multorum discontiguorum hiantium acervus; partes omnino quiescant an motu insensibili in se redeant; angulus concursus sit parum obliquus, an exacte rectus; contactus in puncto fiat, vel linea superficieve; celeritas quanta, curvitas vera, an ex recta fracta ementita: quibus variatis, patet ex theoria nostra et motus variari. Sed quid refert, inquies, si nihil phaenomena variantur? cui bono haec contemplatio suscipitur de eventis figurarum motuumque exactorum, si nulli tales unquam tractandi offeruntur? An Angelis, quibus cum subtilioribus corporum fortasse negotium est, artem mechanicam scribimus? Nolo respondere, etiam mechanicis nonnunquam majore solito exactitudine opus esse, ut in lentibus elaborandis sectionum conicarum, quia etsi majore, non tamen summa: neque ad geometras provocare licet, quia his ipsis objiciunt quidam frustra quadraturam circuli et tot alia quaeri, quae etiam inventa nihil levamenti rebus humanis sint allatura, quando exactiores jam tum proportiones

mechanicas habeamus, quam quas instrumentis assequi liceat; nec voluptatem maximam praedicabo, qua detecta quaedam nova rerum harmonia mentes huic musicae assuetas afficit (ut adeo is saltem huic doctrinae generi inter artes mentales locus sit relinquendus, qui pictoribus, poëtis, musicis, adde et Apiciis et arbitris voluptatum Petroniis inter corporales), quia nisi expertis persuaderi non potest rerum, ut ipsis videtur, tam sterilium aridarumque suavitas. Sed etsi ostendam maximas de finito et infinito, de vacuo et pleno, de compositione continui, de motu aut statione terrae controversias non nisi abstractis motus rationibus probe cognitis definiri posse, non erunt haec, opinor, tanti apud hos censores. Quid ergo? nisi ut ultima experiamur, ostendamusque aliquando ad solidas de Deo et mente demonstrationes, confirmandaque maxima fidei mysteria (cui negotio ego, si quis unquam, summa animi contentione incubui, nihilque fere aliorum inexcussum, nihil de meo intentatum reliqui) non aliter ascendi posse. Haec qui nihili faciunt, magna, fateor, scientiarum parte carere possunt. Ita enim jure divino humanoque, et quicquid his in philosophia gradum struit, abolitis, historia etiam vetere, cujus potissimus apud prudentes usus est, veritati religionis testimonium perhibere, nisi cum ad pompam adhibetur, neglecta; restabunt his hominibus artes tantum duae, una quam diutissime jucundissimeque vitam agendi, altera alios quam dexterrime in usum suum circumagendi, haec politica, illa medica: caetera aut contemnunt publice, aut, cum non nisi in speciem didicerint, intus rident: sed quam tuto, viderint ipsi. Ego ad eos redeo, quibus talia non omnia aspernanda videntur. Qui fortasse mecum agnoscent, partem phoronomiae elementalem, abstractam, mere rationalem, alia enim est mechanica et experimentalis (vel simplex, solis observationibus constans; vel consequentiis observationum, abstractarum regularum complicatione structis mixta), nuspiam hactenus, quod quidem increbuerit, demonstratam exstare. Cohaesionis, qualitatis tam obviae, rationem reddidit nemo: quid prodest ramos, hamos, uncos, annulos, aliaque corporum implicamenta comminisci, cum opus futurum sit hamis hamorum in infinitum? Ullas vere curvas in rerum natura esse, negavere multi; nominabo tantum, qui nunc occurrunt, Lubinum, Bassonem, Regium, Bonartem et, quem parum abest quin addam, Hobbium. Contrarium quis demonstravit, quis motum aliquem explicuit, ex quo physice, id

est geometrice simul et realiter generetur circulus? non satis est dicere, generari circulum circumductione rectae circa extremum alterum immotum, nisi explicetur, quomodo extremum constitui possit immotum; quomodo dari circumducens, quod non jam tum circulariter moveatur: alioquin in hoc ipso rediret quaestio, quomodo et ipsius motus circularis sit generatus. Id ergo explicatum est meris rectilineis probl. 6; componi tamen plures conatus rectilineos conservatos in unum curvilineum, nondum satis deprehendere potui. Hoc si assecutus fuero, concedam nonnulla, quae negavi: motum rotationis circa corporis axem extra se agere; sola solis rotatione, sine partium emissione, posse lucem caloremque seu motum aetheris produci, et caeteros circa eum globos gyrari; denique posse sine vacuo naturae phaenomena explicari. Sed haec etsi concessa, nihil in summa detrahent hypothesi nostrae. Interim ex his apparet, quantum tenebrarum in natura motus a philosophis sit relictum. Differentiam celeritatis in motibus Aristoteles derivat a resistentia medii, prius a posteriore; nam actio est prior reactione, actio autem sine quantitate actionis, seu motus sine gradu celeritatis, ne incipere quidem intelligi potest. Si Cartesium, virum utique incomparabilem, per omnia sequimur, quies potentior motu erit, nihil nempe unitate: negat enim quiescens quantocunque motu impelli posse. Eruditissimi Gassendi sententia facit, ut duo corpora semel contigua nulla unquam vi divelli possint: Atomorum enim suarum duritiem derivat a defectu vacui intercedentis, jam omnia contigua sunt sine vacuo intercedente. Hobbius tollit mentes incorporeas, tollit indivisibilia vera, atque ex eo principio in dubium revocat inventum Pythagorae hecatomba dignum, 47 Imi Euclidis, fundamentum geometriae, negat radicem quadrati, seu ut ego vocare soleo, numerum quadratillorum, de quo alibi, coincidere numero partium lateris, fundamentum non Algebrae tantum, sed et Geodaesiae, multaque alia de motu tradit parum demonstrata, quanquam caeteroquin nihil laudi ejus viri, cujus profunditatem maximi facio, detractum volim. Galilaeus et Honoratus Fabri prudenter phoronomiam experimentalem ratiocinationibus excoluere. Jungii inedita, Wallisii edita audivi tantum. Demonstrationes ergo Phoronomiae elementalis, quod ego sciam, exstant nullae, quae tamen per se separatae scientiae pensum implere possunt, experimentalis et mechanicae rationes physicas reapse in mundo

existentes fortasse non paucas reddidimus primi: hypothesis certe allata est, qua nescio an facile cogitari possit clarior simpliciorque; spero etiam posse aliquando nonnihil afferri, quod praesenti usu oculis incurrat. Quod superest, testor, nullum paene eorum, quos hoc loco nominavi, etiam a quo me discedere professus sum, esse, quem non magni faciam: certe plerisque immortalitatem a posteritate, statuas a re publica, panegyricos a nobis deberi arbitror. Sed non omnia unus videt: etiam in cogitationibus quaedam fortuna est, quae alia aliis, ac saepe mediocribus nonnulla offert. Errasse mihi in tanta alioquin multitudine cogitandorum, nullum, spero, dedecus erit: suffecerit pauca et recte et nove dicta viris candidis doctisque videri; caetera, etiam cum improbantur, excusari.

I.

Leibniz an Honoratus Fabri.

Nuper ex Gallia reversus incidi in Epistolas tuas, Moguntiae biennio abhinc editas, caeterum ante triennium scriptas ad R. P. Ignatium Baptistam Pardies e Societate vestra, in quibus aliquam mei mentionem factam video. Fuit mihi cum Pardiesio, dum ille in vivis esset et ego Parisiis agerem, consuetudo non vulgaris, ex quadam studiorum similitudine nata, ut mirer, quae, me apud Gallos versante, ad Gallum mihi amicum a te scripta fuerant et me tangebant, in Germania demum mihi innotuisse. Erat ille ingenio promptus, in Analysi Mathematica et penitiore Geometria egregie versatus, experimentorum minime negligens, machinamentorum curiosus, denique et scribendi validus, quod editis patrio sermone libellis ostendit, qui delicatis, ut scis, in illo genere hominibus satisfecere: paucis dicam, habebatur inter ornamenta Societatis vestrae, quod sufficit ad maximam laudem in tanta praestantium virorum apud vos copia. Quo magis ejus morti omnes indoluere, quos haec studia tangebant. Ego certe non mediocrem jacturam fecisse mihi visus sum, cujus sensum imminuit postea notitia R. P. de Chales, quem Lugduno evocatum in Pardiesii locum Claromontâni suffecere. Hujus et candorem morum et multiplicem sine affectatione doctrinam semper amavi, diligentiam autem et perspicuitatem, quae in magno Corporis Mathematici opere eluxit, etiam sum miratus. Equidem et R. P. Berthet videram, sed hujus usum itinera et negotia viri mihi ademere, donec paulo ante novissimum iter, quod cum Eminentissimo Cardinali Bullionaeo Romam suscepit, facta subinde colloquendi copia est, ipso, qua est humanitate, audaciam meam invitante. Tum vero et viri doctrinam, et ingenii facilitatem agnovi, nam praeter exquisi-

tam variarum scientiarum notitiam et vim animi pluribus rebus parem, prompta illi eloquentia, seu dicendum ex tempore, seu stylus meditatione exercendus sit. Cum carmina pangit, igneus in illis vigor et character autoris micat. Romanum, Tuscum, Gallum, Hispanum pari facilitate exprimit. Sed haec nihil ad rem nostram. Interiorem vero Geometriae notitiam quis cum illis studiis consistere posse putet? Consistunt tamen, et cum de Geometria disserentem audias, putes tota vita pulveri Archimedeo impalluisse. Voluit me sibi debere notitiam R. P. Francisci de la Chaise, non minus Regis Christianissimi judicio quam sua dudum virtute ad summae laudis fastigia evecti. Hunc virum, cum vastissimum scientiarum orbem absolveret, nihil Mathematicarum artium fugit, nihil curiosae eruditionis latuit. Sed majoribus destinatum non potuere retinere pellaces Musae. Rerum divinarum profunda meditatio, experientia humanarum, virtus sine fuco, pietas sincera et ardens benefaciendi studium illi loco debebantur, ad quem postea ascendit. Nunc quoque eadem vitae simplicitas, et affectus in studia, et exprompta erga omnes humanitas.

Vides, Honorate, egregios Vestrae Societatis viros a me coli, virtutemque quocunque demum loco repertam in pretio esse debere homini profectum quaerenti. Te certe semper magni feci nec sine laude nominavi, qua tamen non indiges. Dudum enim plurimis et doctissimis in omni prope scientiarum genere monumentis id effecisti, ut inter primos nostri temporis autores habeare. Ego tuis scriptis, quae quidem vidi, valde delectatus sum, etiam illis, quae rebus a materia abstractis occupantur. Tecum enim sentio, caeterarum scientiarum fundamenta in prima philosophia contineri. Hujus meae sententiae etiam in Hypothesi Physica aliquot abhinc annis edita, expressa satis vestigia habentur. Et cum Marii Nizolii Brixellensis libros de veris Principiis et Vera ratione philosophandi, quos eruditis prope ignotos videbam, cum praefatione recudi curassem, adjecta epistola ad amicum ostendere conatus sum, Aristotelem a vera Philosophia non ita remotum esse ac quidam putant. Quo magis miror, quod me in epistola tua velut ab Aristotele omnino alienum publice notasti.

Equidem neque de judicio tuo neque de ejus publicatione queror. Scio enim, cuique liberam esse judicandi, et si abstineat verbis mordacibus, etiam judicium suum publicandi facultatem. Et qui publice loquitur, pati debet publice contradicentem. Quare

nonnullos facile tuli, qui quibusdam meis, quibus juvenis lucem publicam audacius quam prudentius experiebar, censuram appingere; quorum alii, qui scripsere immodestius, a me facile contemnuntur, his enim magnorum quorundam virorum pene invidenda judicia opponere possum; qui vero maturo judicio meis opinionibus suas rationes objiciunt, his etiam gratias ago. Nam mihi ipsi multa, quae olim excidere, nunc minime satisfaciunt, ex quo interiora Geometriae familiaritate usus sum, quae scientia ingenii ebullientis tempestates opportune sedat. Itaque quod me a scopo aberrasse putas in Hypothesi Physica facile ferrem, neque a judicio tuo provocarem ad te ipsum, nisi aliam mihi personam induisses quam sustinere velim.

Epistolas tuas eo, ut ais, consilio scripseras, Honorate, ut hominis Democritici aut ut quidam vocant Atomistae opinionem moliereris, quam nonnullos de te habuisse didiceras, credo quod Mathematica in philosophia a te adhiberi insolens illis videretur in tui ordinis viro. Tu vero, ut probes injuriam tibi fieri, parallelismo perpetuo ostendis, quantum a Cartesio et Gassendo absis, qui in Gallia imprimis sectam condidere, et philosophiae, quam aliqui corpuscularem vocant, in illa regione principes habentur. Qua occasione etiam Hobbesianae de corpore philosophiae nuntium mittis, et meam qualemcunque Hypothesin attingis, ut admoneas, diversa a te sentiri, quod facile persuadebis. Quoniam tamen digno tibi visa est nostra, quae rationibus objectis, obiter licet, convelleretur, cum alias contentus esse soleas dissensus professione, etiam me tibi debitorem constituisti. Fecisti enim pro humanitate tua, cum judicares, credo, alios, quos memoras, non aeque instructionis egere ac me, hominem juvenem ac novum, quem inter memorabiles novarum hypotheseum autores non nisi liberalitas tua locare potuit. Neque vero post rem a te judicatam litem instaurarem, nisi viderem, distento tibi tot negotiis, causae hujus cognitionem defuisse. Apparet hoc ex verbis tuis, quae integra exhibere interest. *)

Ubi quidem novissimis lineis vellem supersedisses, nam nec ab Aristotele sum alienus, nec in Democritum adeo propensus, nec Cartesii exemplo neque meo ingenio ad Hypothesin pro arbitrio fin-

*) Hier findet sich im Manuscript ein leerer Raum, um die Worte Fabri's anzuführen.

gendam proclivis. Ibo per singula, si pateris. Quam non contemnam Aristotelem, supra dixi; eloquentiae artem et civilem Scientiam praeclare tractasse scio, sed et in ipsa Physica de principiis, de motu et continuo, de anima acute et saepe solide disputasse, et in problematis et zoographicis praeclara et ingenii et diligentiae specimina edidisse arbitror, quod praeter alios eleganter ostendit P. Pardiesius in Epistola ad amicum Cartesianum, quam suppresso suo nomine edidit. In Germania Abdias Trew, Noribergensis Academiae Mathematicus sine controversia egregius, octo Aristotelis libros de physica addita demonstrationum forma exhibuit, ubi satis apparet quidem non omnia aeque firma esse, apparet tamen et pleraque non adeo inepta esse ac multis videntur.

Vides, quam sim ab Aristotele alienus. Superest, ut videamus, quam in Democritum propensus sim.

Ego vero pro certo habeo, esse substantias incorporeas, motum a corpore non esse sed extrinsecus advenire, nulla esse corpuscula natura sua insecabilia; neque ad visum necesse arbitror ut aliquod objecti effluvium ad nos perveniat. Quae tamen sunt prima capita Democriticae Philosophiae. Illud nihilominus Gassendo potius quam Cartesio assentior, essentiam corporis in extensione non consistere, sed aliam loci, aliam materiae naturam esse. Quod tamen non impedit quominus arbitrer mundum (saltem quantum ad Physicos usus sufficit) plenum esse.

Quod addis, Cartesii exemplo impulsum me novam Hypothesin comminisci voluisse, de eo sic habeto, cum meam ederem, nondum satis Cartesianam me intellexisse. Neque enim illa nisi ab attento admodum lectore intelligi potest; ego vero tunc in multa distractus nondum a me impetrare potueram, ut unius hominis, utcunque ingeniosi, scriptis tantam operam impenderem. Tantum vero abest, ut exemplo ejus novam Hypothesin fingere voluerim, ut contra sim arbitratus Hypothesibus quoad ejus fieri potest abstinendum esse, Hypothesibus, inquam, arbitrariis, qualis non est mea. Quod enim eam gratis assumi ais, ostendis non satis a te examinatum.

Ego, mi Honorate, cum viderem nullum esse condendarum Hypothesium finem et, ut quisque ingenio pollet, ita plus sibi licentiae sumere, diversam ab aliis viam institi, ni fallor, primus; quam si sequerentur plures, spem fore credebam, ut tandem ali-

quando certi aliquid in physica constitueretur. Nimirum tentandum putabam, an non phaenomena naturae difficiliora ex aliis quibusdam phaenomenis manifestis atque exploratis deduci possent. Hoc enim praestito patebat frustra causas possibiles assumi pro veris, dum ipsae verae atque certae causae in promptu essent. Itaque cum constet astrorum imprimis errantium actione atque luce solis fluidum omne circa nos motibus origine quidem variis, attamen in aequabilitatem compositis cieri, ex quibus ille imprimis motus emisset satis rapidus, quo lux quotidie tellurem ambit; volui harum causarum tam potentium tamque late fusarum consequentias scrutari adhibitis Mechanices legibus. Has inter consequentias visus sum mihi et Gravitatem et vim quam Elasticam vocant et Magnetis directionem, et multa alia naturae phaenomena reperisse. Quo successu aliis judicandam relinquo, credidi tamen excitari posse ingeniosiores hoc exemplo, ut imposterum quoad ejus fieri posset sine fictitiis Hypothesibus Philosophiam naturalem tractare conentur, assumtis causis, quas revera in natura esse constaret. Hoc fuit in edendo Schediasmate tumultuario consilium meum, quod quantopere a Gassendi aut Cartesii instituto absit, facile judicatu est. Nemo enim quod sciam antea phaenomena ex phaenomenis, particularia multa ex paucis generalibus explicare aggressus est, quae tamen vera est ratio physicam certis demonstrationibus muniendi. Nimirum causae effectuum dupliciter demonstrantur, vel cum ex ipsis effectibus erui possunt necessaria collectione (quod tamen saepe fieri non potest, quoties scilicet unius effectus, quoad nobis cognitus est, multae sunt causae possibiles), vel cum ipsae causae prostant, sed tamen connexio cum effectibus demonstranda est, quod in nostro instituto locum habet, eaque sola superest ratio inveniendi causam unicam veram, quoties effectus alioqui multas admittit possibiles. Vides, quod mihi fuerit institutum, cum Hypothesin Physicam condidi, in qua si rem acu non tetigi, non ideo minus operae pretium fecisse videbor: ad novam enim et ni fallor veriorem de rerum natura ratiocinandi viam homines vocavi. Si ausis ingentibus excidi tunc juvenis et harum rerum cum illa scriberem paene novus, non exemplo meo, sed consilio standum profitebor, quod alii majoribus ingenii atque experientiae opibus felicius exsequentur. Sed nec causa est, cur primi tentaminis eventu deferrem, nec despero, exquisitiora a me aliquando et fortasse jam nunc dici posse; sed haec in aliud tempus servo, quoniam altius repetenda sunt. Nunc Hypothesin in

Schediasmate edito adumbratam paucis repetam, ut totam ejus vim ac potestatem tibi ante oculos ponam.

Propositio 1.

Ante omnia pro certo sumo, Mundum planetarium quantum ad consequentias Physicas sufficit pro pleno habendum esse. Nam nullum in eo punctum sensibile assignari potest, in quo non possit videri lux alicujus astri, modo alia visionis requisita adsint, verbi gratia ut nihil opacum obstet. Ubicunque autem lux videri vel lumen transire potest, corpus esse necesse est. Nullum ergo punctum sensibile est in mundo planetario ubi non sit corpus. Porro ubique in mundo planetario astra videri posse patet, et quidem in nostra terra res manifesta est quotidiano experimento. Idem alibi ostendunt Planetarum quoque aliorum mutuatum lumen et Eclipses atque umbrae variis in positionibus. Cui addo, vix punctum sensibile in vasto illo spatio designari posse, per quod alicujus astri radius ad nos tendens non aliquando transeat. Radium autem lucis non esse sine corpore, pro certo sumo, sunt enim omnes lucis effectus corporei, ut qui hoc negat, pari jure corpora in universum negare posse videatur.

Propositio 2.

Motus omnis per liquidum plenum quantaecunque id sit magnitudinis propagatur. Est enim omnis motus aut totius extra locum, aut partium circa axem immotum: ille totam materiam commovet, quia dum corpus loco exit, aliud succedat necesse est; unde fit quidam motus per lineas in se redeuntes, qui per totam massam ideo propagatur, quoniam propagatur certe aliquousque, et limites nulli possunt assignari, intra quos ullo jure concludatur: quamquam enim remotiora tardius moveantur, moventur tamen. Si vero sit motus circa axem, rejiciuntur contigua per tangentem, etiam in omnes partes: impulsus autem ille semper exitum habet, quousque materia suppetit, quantumcunque per spatium diffundatur, quia nihil tam durum tamque magnum est, quin impulsum aliquantum cedat totum aut per partes

Propositio 3.

Omnia liquida sive fluida sunt in motu intestino Nam moventur Planetae et quidem in loco quantum ad sensum pleno per prop. 1, unde eorum motus ad nos propagatur per prop. 2. Is autem est varius. Ergo in liquido (quod scilicet

separationi partium sive motui vario minus repugnat) varius partium, id est intestinus motus erit.

Propositio 4.

Causam connexionis majoris ac minoris atque adeo Heterogeneitatis in corporibus explicare. Quaeritur, cur corpora plus minusve partes habeant cohaerentes: ajo ejus rei nullam aliam esse causam quaerendam, quam quod sunt atque moventur simul. Moventur autem simul, quia in tanta motuum generalium in totam massam propagatorum varietate utique necesse erat quaedam ab aliis contiguis valde abire, quaedam caeterorum comparatione parum. Igitur causa quae fecit ut alia ab aliis contiguis parum aut nihil abirent, facit etiam ut in eodem statu perseverare conentur, quia causa subsistit. Causa enim ipsa motuum generalium complicatio est: motus autem generales semper subsistunt. Hos ergo turbat qui quicquid ab illis effectum et constitutum est, in quod tota natura consensit, subito mutat. Unde manifestum est, pressionem externam esse causam firmitatis primam, quietem vero aut motum conspirantem partium esse causam proximam, sed tum demum cum a causa externa subsistente oritur. Ut ergo concomitantia, id est quies aut motus conspirans dicto modo ortus facit corpus firmum, ita motus partium varius liquidum constituit. Et hoc est principium Diversitatis specificae in corporibus, et quod alia aliis crassiora, id est magis firma aut ex partibus firmis majoribus composita sunt. Haec sententia experimentis quoque firmatur sic.

Propositio 5.

Quaecunque in fluido motum intestinum habente ponuntur heterogenea, turbant motus aequabilitatem. Nam causa motus aequabilis est fluidi uniformitas, tametsi enim in eo varius sit motus, erit tamen ubique eodem modo varius, nulla enim tum ratio est dissimilitudinis. Ea vero aderit posito heterogeneo.

Propositio 6.

Ubicunque motus est turbatus, conatus est ad aequabilitatem. Nam in statu motus turbati alia minus aliis resistunt, ergo debiliora vincuntur, donec tandem res eo redeat, ut omnibus aequaliter resistentibus non sit ratio, cur unum potius quam aliud vincatur; cumque omnia simul vinci non possint, quia

totum obstaculum e medio tolli non potest, sistitur tandem in aequabilitate.

Propositio 7.

Fluida fluidis heterogeneis circumdata in guttam rotundam colliguntur. Motui enim liquidorum intestino per prop. 3 resistunt sive eum turbant per prop. 5, sed aequaliter et omnium minime tum demum cum in guttam sphaericam collecta sunt. In hanc ergo colligentur per prop. 6.

Propositio 8.

Etiam solida fluidis circumdata aut varie jactata tractu temporis rotundantur. Nam nihil tam solidum est, quin paulatim deteratur, sive omne solidum sensibile aliquem habet liquiditatis gradum; ergo locum habet demonstratio propositionis praecedentis.

Propositio 9.

Causam rotunditatis terrae explicare. Si nimirum aliquando rotunda non fuisset, certe aliquando rotunda facta fuisset, qualis nunc est, per prop. 8. Quod si aliquando liquida fuit, licet exiguo tempore, in guttam collecta per prop. 7 et postea crusta dura obducta est, sive exhalantibus aquis sive in peculiaria receptacula collectis.

Propositio 10.

Habemus et causam gravitatis, nam eadem causa, quae terram rotundavit prop. 9, divulsam a globo partem ad eum repellit, nempe quia heterogeneo corpore turbatur liquidi ambientis aequabilis motus; unde et solidiora ac minus subtilis atque aetherei, plus crassi atque terrei continentia, aliis graviora sunt.

Propositio 11.

Quae est causa gravitatis, eadem est Elasticae quoque potentiae. Potentiam vocant Elasticam qua corpus volumen aut figuram mutare conatur. Porro liquidum nobis circumfusum solidorum interpositione turbatur, turbatum causam turbantem removere conatur per prop. 6. Hoc fit dupliciter, dejiciendo scilicet versus tellurem ob eam quam dixi gravitatis causam, aut dissipando in parem sibi subtilitatem, quod enim dissipatum est, heterogeneum esse cessat; quae est causa vis Elasticae, qua corpus volumen mutare conatur. Ex quo fit etiam, ut ple-

rumque dum partes volumen mutare conantur, et totum mutet figuram. Hanc porro Elasticam potentiam in aëre imprimis manifestam esse constat, et in aliis quoque rebus forte aëris nonnunquam interventu deprehendi. Et haec est vis Elastica subtiliorum. Nam alia etiam speciali ratione eam oriri posse in crassioribus jam dicemus.

Propositio 12.

Nimirum ex sola etiam gravitate sequitur Vis Elastica in crassioribus, quemadmodum videmus embolum, quem antlia extraximus, manu dimissum magna vi introrsum redire pondere aëris incumbentis. Manifestum est autem corpora solida, inaequalitatibus distincta et hinc cavitatibus illinc prominentiis variata esse, et prominentias cavitatibus inseri, planas etiam facies faciebus applicari; quanquam autem non exacte prominentiae quorundam corporum cavitates aliorum, quibus inseruntur, claudant (ut emboli solent) nec duo plana exacte consentiant, modo tamen hiatus tam arcti sint ut aëri incumbenti, cui gravitatem tribuimus, non pateat transitus, utique diducta ac mox dimissa ejus pondere in priorem statum restituentur, nisi divulsa sint, quantum satis est ad transitum aëri dandum, tunc enim ruptura sequetur aut certe restitutio cessabit. Patet autem nihil ad rem pertinere, quod aether, id est liquidum circumfusum quod gravitatis non subjectum sed causa est, per poros transire potest, modo aër non possit.

Propositio 13.

Ex his quoque aliqua Duritiei ratio est, nam quae crebras, sed exiguas habent applicationes, difficulter separantur, sed parum diducta statim franguntur. Hinc varii firmitatum gradus non difficulter explicantur. Ego semper in hanc inclinavi causam duritiei, ex quo experimentum duarum tabularum politarum sibi impositarum vidi; postea reperi et Galilaeum eandem assignare, quanquam causam causae, gravitatem scilicet aëris et motum liquidi aetherii, non viderit. Gravitatem tamen aëris praeclare et prorsus ex sententia mea ad Elasticae potentiae ac Duritiei explicationem vidi adhibitam a Clarissimo viro Claudio Peralto, Vitruvii Gallici autore. Caeterum cur ipsae tabulae ipsique emboli firmitatem habeant, quod utique necesse est, id sane ex hac ratione explicari non potest, opus enim esset tabulis tabularum in infinitum,

neque ideo magis ratio appareret. Ea ergo petenda est ex prop. 4 de causa connexionis et heterogeneitatis in corporibus.

Propositio 14.

Si tellus movetur motu diurno, necesse est ut imposita corpora solida sed libera rejicere conetur per tangentem in plano paralleli. Patet ex natura motus circularis. Quicquid enim circulariter movetur, cessante retinaculo aut per tangentem aut per lineam maxime accedentem tangenti motum continuat, quod experimentis pariter et rationibus constat. Nec valet exceptio Galilaei et Kepleri, qui Hypothesin Copernicanam hoc argumento prementibus respondebant, quod ob magnitudinem circuli telluris, linea tangens sensibilis in eo satis diu serpit, quasi globus accederet ad instar lineae rectae, praesertim cum nec ita politus sit telluris ambitus, quin asperitates ejus avolutatae per tangentem moveantur. Nam replicari potest, quae per tangentem abire conantur, nec possunt tamen abire per aliam tangenti quam maxime possunt vicinam, ut corpus quod in tubo circa alterum extremum rotato erit.

Propositio 15.

Necesse est ergo in ea Hypothesi esse vim retinentem vi terrae rejicientis fortiorem*). Ea est aut ipsa vis terrae rejiciens aut alia quaedam. Si est ipsa vis terrae rejiciens, tunc necesse est, ut ponamus esse circa terram corpuscula solida exigua atque insensibilia sed crebra, ita ut sit minus soliditatis exiguarum partium in lapide, quam in aëre paris spatii; ita enim fiet ut potius solida illa subtilia rejiciantur prae crassis, ac proinde crassa deprimantur ac retineantur. Alia tamen vi nihilominus opus erit, tum quae ipsa solida exigua rejecta retineat ne in vasta universi spatia diffugiant (ita enim nec crassa ab ipsis deprimerentur), tum quae faciat ut depressiones tendant versus telluris centrum, nam si a sola virtute telluris rejiciente oriretur gravitas, tenderent corpora ad telluris axem. Itaque ad nostram tandem gravitatis causam confugiendum est per prop. 10, quae non hypothesi, sed certa demonstratione nititur, terramque non formavit tantum, sed et continet et quicquid

*) Leibniz hat am Rande des Manuscripts bemerkt: Demonstrandum distinctius, quod corpora solidiora fortius rejiciantur ab eadem rota, modo rota ipsa satis magna sit, alioqui enim contrarium evenire potest.

ei circumfusum est arctis limitibus coercit atque in unum compellit.

Propositio 16.

Datur motus fluidi cujusdam circa tellurem in aequatore et parallelis, motum lucis diurnum secutus. Cum enim rapidus sit lucis diurnae motus, qui uno horae minuto plus quam septem milliaria Germanica percurrit et vis ejus maxima, patet materiam liquidam ac proinde mobilem non minus radiis agitari, ac si baculi multi a sole ad nos usque protensi in hoc liquidum nobis circumfusum immergerentur, nam sive baculis cum sole circumeuntibus sive liquido cum vase in quo est moto et baculos deferente, motus in liquido nascetur a baculis impressus, quo partes liquidi sequi baculos, id est radios, quoad per alias causas licet, conabuntur.

Propositio 17.

Motus lucis in aequatore et parallelis rejicit corpuscula solida versus polos in meridianis. Cum enim solidum corpus non possit motum liquidi subtilioris aequis passibus sequi, eum turbabit; quare conante ad uniformitatem natura, rejicietur in locum debiliorem, id est ubi minor est motus, adeoque vel versus centrum vel (cum ille locus jam occupatus est) versus polos et quidem via in sphaera brevissima, id est per meridianos. Hic motus, cum sit in circulis magnis quorum omnium centrum commune centrum terrae est, inter primarios illos liquidi terram ambientis motus censeri debet, ex quibus in unum conspirantibus et uniformitatem suam tuentibus supra gravitatem deduximus.

Propositio 18.

Ex motu universali in meridianis directionem Magneticam oriri necesse est. Unde sine alia hypothesi pleraque Magnetis phaenomena explicari posse arbitror, de quibus alias amplius. Illud tamen addo, alios adhuc esse motus circa globum nostrum generales qui jungendi sunt: omnes enim in gravitatem, in Elasticam vim, in Magnetis actionem influunt, nec dubito experimenta excogitari posse, quibus plene definiatur et quinam sint illi, et quid a singulis contribuatur.

Propositio 19.

Si corpora diversa ita misceantur per partes exiguas ut viae fluidi motoris invisibilis satis mutentur, sequitur reactio sensibilis: reactio, inquam,

id est motus sensibilis partium cujus causa non apparet. Qualis est ebullitio, incalescentia, infrigidatio, odorum quoque et colorum subita mutatio. Hujus rei manifesta ratio est. Nam movens fluidum diu per easdem transiens vias, tandem aptissimas maxime ad transitum sui partes ibi collegit. quae libenter ibi haerent et exclusis aliis motum quendam in se redeuntem in loco sibi diutino usu aptato tuentur, qui ipsius motus generalis in fluido ambiente toto existentis propago quaedam atque consequentia est. Viis autem subito mutatis impediri illum motum specialem necesse est de improviso, et impedimentum in ipsum fluidum movens seu motum generalem refundi, quod tanta vi, quanta est perturbatio sive diminutio uniformitatis, in obstaculum pugnat. Unde intima quaedam commutatio nascitur cum tumultu, cujus effectus ad nos usque pervenit. Hinc mirari non debemus majorem saepe vim esse reactionis, quam pro mole corporis, quoniam non corporis in quo fit reactio, sed fluidi ambientis potentiae debetur. Ideo vis reactionis in composita ratione ex potentia fluidi ambientis sive motoris, et quantitate turbationis sive introductae difformitatis.

Propositio 20.

Si duo corporum genera sufficienter misceantur, unum in quo plurimum materiae crassioris, alterum in quo parum, post mixturam fiet distributio quaedam tendens ad aequabilitatem; ea autem distributio fit cum tumultu. Nam conatus generalis ad uniformitatem per prop. 5 causa est, cur materia aequabiliter distribuatur, ubi id fieri potest; potest autem cum locum nacta est, nacta est autem mixtione. Nam cum antea unumquodque corpus suis limitibus continebatur, quibus diutino motu liquidum ambiens assueverat, nihil nisi aequivalens elabebatur vel illabebatur: itaque ubi crassa erant corpora, alia crassa succedebant, et subtilibus subtilia; nunc postquam mixtura hos motus liquidorum turbavit, rupta sunt vincula (quae ut dixi non alia erant, quam hi ipsi motus) et materia per utrumque corpus diffunditur virtute conatus ad uniformitatem; unde omnibus discussis et disjectis tumultus, qui denique desinit in quietem, id est motum conspirantem et qualemcunque uniformitatem: qualemcunque, inquam, non omnimodam: hanc enim praecipitata in novum corpus coitio praevenire solet.

Unde fit, ut nova semper reactionum materia supersit, neque unquam Elementaria quaedam corpora plane pura habituri simus.

Propositio 21.

Si duo corpora ita sint constituta ut fluidi ambientis motus aequabilis facilius circa ipsa atque per ipsa exerceatur si propinqua sint quam contra; tunc ad se invicem tendent atque cohaerebunt; sin vero ille tunc difficilius exerceri possit, fugient sese atque repellentur. Patet ex prop. 6. Ex hoc principio dubium nullum est phaenomena fugae atque attractionis in magnete aliisque corporibus oriri. Et cum videamus limaturam ferri admoto magnete (id est aucto motu fluidi ambientis ob praesentiam materiae circa magnetem, ob dicta prop. 19, gyros exercentis) in pilorum formam erigi, et quasi funiculum ex arena necti, sequitur in corporibus saepe etiam hinc oriri connexionem atque firmitatem, et prioris formae recipiendae conatum, et corporum in liquidis solutorum recollectiones in crystallos certa forma praeditas.

Ex his paucis intelligi arbitror, quantus nobis apertus sit campus accurate et sine hypothesibus philosophandi, modo jam experimenta (quae habentur annotata a viris diligentibus aut quae adhuc sumenda esse vera Analysis ostenderit) cum geometricis elementis et legibus mechanicis conjungantur, nec dubito, quin studio adhibito de summa rerum et potissimis motibus, qui circa nos exercentur, aliquid certi demonstrari possit, unde postea varia rerum particularium phaenomena explicabuntur, et imperium nobis in naturam afferetur.

Cum enim ego pro certo habeam, omnes motus in corporibus nobis obviis ab Astrorum motibus atque luce oriri, fixarum autem distantia causa sit cur credam, quae in ipsis fiunt, ea effectus quidem aliquos sed lentos tamen et multorum saeculorum decursu aegre sensibiles apud nos excitare; ideo superest, ut omnia solis et planetarum luci et motibus transscribantur. Hi motus neque tam multi neque tam implicati sunt ut a Geometriae et Mechanices intelligentibus accurate satis cognosci posse sit desperandum. His autem semel constitutis poterunt ab ipsis principiis et a priori, ut vocant, rerum terrestrium phaenomena derivari: unde patebit quae sit natura Elementorum et quibus omnia mixtionibus formentur

Quibus si addantur Analyses corporum quaeque nobis quotidie occurrunt, non dubitem certis demonstrationibus constitui posse causas rerum. Et quemadmodum in Analysi Mathematica judicari potest, sufficientiane sint data ad solvenda problemata, ne scilicet quaeramus quae dudum in potestate sunt; ita in re physica analysin aliquam superesse arbitror, cujus ope et ex datis phaenomenis duci queat, quicquid in illis continetur, et appareat quantum datorum desideretur ad absolvendam quaestionem. Inde enim ars nascitur, experimenta ita data opera instituendi ut ad difficultates e medio tollendas serviant. Equidem fateor, quosdam bona fortuna in experimenta quaedam insigniter lucifera incidere: saepe tamen ad easdem conclusiones via certa perveniri poterat, in quam nihil fortunae juris esset. Neque dubito, si homines aliquot lecti serio agerent, quae in nostra potestate sunt, unius decennii opera omnium retro saeculorum labores obscurari posse.

Habes, Honorate, sententiam meam de fugiendis hypothesibus arbitrariis deque quaerendis in re naturali demonstrationibus, quod fit, dum probabilia a certis sejunguntur, et ex compertis phaenomenis inveniuntur aliorum phaenomenorum rationes incompertae, ut fingere causas minime opus esse videatur. Hujus instituti specimen paucis hoc loco propositionibus exhibui, sed ex quibus vides res magnas pendere. Breviter animi sententiam exposui, quod scribam versatissimo in hoc atque omni alio studiorum genere viro. Nam apud plurimos omnia minutim declaranda essent familiaribus exemplis et schematismis. Quod si viri docti quemadmodum coepere hanc naturalis scientiae tractandae rationem, utilem judicare pergent, spes est a me aliisque majora praestari posse. Quae contra Hypothesin meam objecisti, iis ni fallor ipsa ejus explicatione factum est satis; quae ubi perpenderis, fateberis forte mecum, qua es perspicacia atque ingenuitate, non esse cur diutius gravitatis aut restitutionis aut sympathiae explicandae causa, appetitus quosdam aut qualitates atque virtutes adhibeamus, quae etiamsi admittantur, quid ad rem clariorem reddendam praestent, ne intelligi quidem a quonam potest.

Nunc postquam causam meam apud te satis dixisse videor, invitante occasione, quaedam tuarum literarum loca, si pateris, obiter attingam. De Cartesio tecum ita sentio, magni ingenii virum fuisse, et illud addo, longe plura recte ab eo dicta quam errata esse. Dictio ejus vere philosophica est, expressiones lucidae atque

naturales, verba neque inanibus coloribus picturata neque scholastico pulvere squalentia, ordo qualem desideres a docente, tametsi aliquando dum meditationibus potius lectorem ducit quam demonstrationibus cogit certitudinem abruperit, sententiae in re morum sanae admodum et probae, de Deo ac mente rectae atque praeclarae, in naturali scientia certe in exemplum utiles, ut etiam cum veras rerum causas non explicat, ingenia tamen inveniendis illis atque percipiendis aptiora reddat, ne scilicet unquam admittant hypotheses pro veris, quae minus clarae sint quam haec ficta est. Quare Cartesii scripta vestibulum appellare soleo Philosophiae verae, tametsi enim intima non attigerit, propius tamen accessit quam ante illum quisquam, uno excepto Galilaeo, cujus viri utinam omnes de variis rebus meditationes haberemus quas infortunia ejus suffocavere. Itaque qui Galilaeum et Cartesium leget, aptior erit ad inveniendam veritatem, quam si per omne autorum vulgarium genus vagetur. Fateor tamen multas et magnas res in Cartesio emendandas esse; potissima est, quod corporis naturam ponit in extensione, quod est notionibus nostris vim facere, ut taceam rationem mysteriis quae ipse credere profitebatur inconciliabilem reddere. Nam qua ratione corpus unum in pluribus locis esse potest, si corpus et spatium, ut ille ait, in re idem sunt? Quis vero toleraret, quod eludendae hujus ipsius difficultatis causa commentus est, DEUM quidvis posse, etiam quod fieri non posse demonstratur, exempli causa ut alia sit Trianguli natura quam ab Euclide demonstratur, ut Circulus non sit capacissima figurarum ejusdem ambitus, quasi scilicet DEUS libero quodam decreto capacitatem largitus sit velut Rex subdito privilegium concedit, aut quasi eam hodie possit in quadratum transferre. Quae satis ostendunt, intimam veritatis atque certitudinis rationem ei non intellectam. Quae ratio est etiam, si quid judico, cur ad veram analysin non pervenerit. Unde alius mea sententia gravissimus et periculosissimus ejus error nascitur, quod Bonitas pendeat a libero DEI arbitrio, non a natura rei. Hoc enim admisso frustra de Justitia Dei disputamus, qua sublata non tantum admissa Cartesio redemtionis mysteria laborant, sed et in universum amor Dei tollitur, nam quid est quod DEUM, id est optimum universi regem, a Tyranno distinguat, si ejus voluntas bonitatis causa est, aut cur ab eo bona potius quam mala nostra expectemus, si caeco quodam impetu sine ulla ratione, id est ob solam voluntatem suam eligit.

Neque est cur promissis ejus credamus, si veracem esse non constat. At, inquies, verax est, quia perfectus. Recte, perfectionis igitur natura non pendet a Dei arbitrio, nisi DEUM ipsum a sui ipsius arbitrio pendere ponamus. Si vero, quemadmodum mea sententia est, essentiae rerum non a Dei arbitrio, sed essentia ejus pendent, manifestum est ipsam boni atque justi ideam quoque non a Dei arbitrio pendere, quanquam rerum bonarum atque perfectarum creatio a Dei arbitrio sit profecta, neque enim essentiae sed res creantur. Res autem creavit DEUS quas creari bonum esse vidit, quae rerum sive potius idearum bonitas non magis libertati ejus obest, quam sapientiae quae facit ut nisi bene agere non possit. Quod si non est bonitas in ipsis ideis, certe nec in DEO sapientia est, quae nil nisi scientia boni est. Imo si naturae rerum atque veritates a Dei arbitrio pendent, non video quomodo illi scientia tribui possit aut etiam voluntas. Nam voluntas utique intellectum aliquem requirit, neque enim velle quisquam potest, nisi sub ratione boni. Intellectus autem requirit aliquid intelligibile, aliquam scilicet naturam. Quod si ergo naturae omnes sunt a voluntate, etiam intellectus a voluntate erit. Quomodo ergo voluntas intellectum requirit? Haec faciunt, ut vereor ne DEUS fuerit Cartesio res longe alia quam haberi solet. Caeterum ut error errorem trahit, cum bonitatem ac perfectionem e rerum natura sustulisset Cartesius omniaque ad caecum quoddam conditoris arbitrium reduxisset, quod scilicet, cum ipsae rationes arbitrariae sint, nullis utique rationibus niti poterat, mirum non est si periculosam supra quam credi potest sententiam asseveravit, materiam omnes successive formas recipere, sive quod idem est, omnia possibilia aliquando existere; unde sequitur, nihil tam inepte ac mirifice fingi posse, quin aliquando existat in mundo: quare omnes illi qui fabulas Milesias sive ut hodie vocant Romanas fingunt, historiam quandam per omnes circumstantias verissimam, sive praeteritam sive futuram sive etiam in spatiis longe dissitis, praesentem tradere censendi sunt. Quod falsum esse, demonstrari ni fallor potest. Eo vero admisso mirum non est, si Deus bonum non elegit, sive potius si nihil sua natura bonum est, quando omnia tandem aliquando futura sunt, nec forte nisi temporis praerogativa discernuntur.

De Logica etiam et in universum de receptis studiis mihi contemtius videtur sensisse Cartesius quam par erat. In Geome-

tria, tametsi res maximas gesserit, abfuit tamen ab eâ perfectione quam prae se ferebat, in quo non ingenium ejus quod maximum erat, sed pronuntiandi audaciam culpo. Videbatur enim sibi determinare posse in Geometria quicquid ab homine fieri potest, unde quantum abfuerit eventus ostendit. Est enim ejus geometria non nisi rectilinearis, neque ad problemata servit nisi quae magnitudinem quarundam rectarum per alias rectas determinatam quaerunt; ea enim sola ad aequationes revocantur et a locis pendent. Tantum ergo Cartesius Apollonium ad altiores gradus promovit, praeclare quidem, sed non ut propterea omnibus Veterum luminibus obstruxisse putari debeat. Quoties vero curvilineorum magnitudo quaestionem ingreditur, incipit Geometria illa cujus vim nullus opinor Veterum praeter Archimedem intellexit. Cujus non nisi pauca elegantia licet Cavalerius et Torricellius attigere. Ego et duobus e Societate vestra viris summis, Guldino et San. Vincentio, plurimum debere arbitror Geometriam. Sed nunc eo ni fallor provecti sumus, ut tantum ab illis absimus, quantum illi a prioribus, quod, si nihil aliud, Hugenii certe opus ostendit de Pendulis, in quo sublimis cujusdam atque arcanae Geometriae specimina eduntur. Quodsi dicam a me nunc aliquid addi posse Geometriae, fortasse non indignum seculo, rem Hugenii aliorumque amicorum sententia non absurdissimam asseruero; possumus enim quae Cartesius a se praestari non posse fassus est, et singulari quodam analyseos genere tribus lineis praestamus quae tota sua methodo nequicquam aggressum alicubi Epistolae ostendunt.

Haec ut res ipsa tulit de Cartesio dixi; nunc tua vestigia sequar, Honorate, et quod scientiam rationum universalium sive Metaphysicam a Cartesio praeteritam excoluisti, valde laudo, ac vellem tamen aliquando fuisses paulo in demonstrando severior quam fuisti*). Ita enim stabiliorem nobis illam scientiam dedisses, quam ego quoque maximi facio. Quod ais, corporis naturam in extensione non consistere, assentior, sed vellem dixisses in quo consistat, nam cum dicis exigere impenetrabilitatem, naturaliter scilicet quamdiu ea a Deo non denegatur, dicis quam exigat, non quid habeat naturam. Esse aliquas qualitates non modales,

---

*) Hierbei findet sich folgende Randbemerkung: de causis finalibus, de infinito ac libero arbitrio inquiri debere.

vacuum non repugnare, Geometrarum demonstrationes indubitabiles esse, nec ad certitudinem omnem requiri ut DEUM esse sciamus, tecum contra Cartesium sentio; quod ais, corpoream substantiam incorporea notiorem esse, non item. Nec refert quod de rebus incorporeis plures quam de corporibus dubitarent, nam multo majores de corporibus dubitandi rationes habebant, ut taceam qui praepostere dubitarunt non satis quid dicerent intellexisse. DEUM esse per se notum esse, tibi Cartesioque concederem, si constaret conceptum Entis quod sit a se non implicare. Sed hoc demonstratione indiget. Quod dicitis, conservationem perpetua creatione indigere, rem veram dicitis, sed ni fallor principiis Cartesianis inconsistentem.

Caeteris missis, quae aut omnino probo aut in alium locum differo, nunc ad Physicam tecum transeo, ubi quidem non video, cur eidem spatio pleno nunc plus nunc minus materiae tribuamus. Quid est enim penetratio, si hoc non est? certe cum manifesta in promtu explicatio sit rari atque densi, per subtiliorum ac minus resistentium extensionem atque intensionem, cur ad nescio quae non intellecta confugiamus. Quod materiam homogeneam ad diaphanum requiris, cum pororum usu conciliari posset, nam in homogeneo similes ubique pori..... *)

Beilage. **)

Maji 1702.

Nullum quidem librum contra philosophiam Cartesianam typis emisi hactenus, passim tamen in Actis Eruditorum Lipsiensibus et in Diariis Gallicis et Batavis inserta reperiuntur a me Schediasmata, quibus dissensum ab ea meum sum testatus. Sed imprimis (ut alia nunc taceam) circa naturam corporis et virium motricium quae corpori insunt, in alia omnia mihi eundum fuit. Nempe corporis essentiam Cartesiani collocant in sola extensione, ego vero etsi cum Aristotele et Cartesio contra Democritum Gassendumque

*) Hiermit bricht das Schreiben ab; offenbar fehlt der Schluss.

**) Obwohl das Folgende in einer viel spätern Zeit abgefasst ist, so habe ich doch die Einschaltung desselben an dieser Stelle für gerechtfertigt erachtet, insofern dadurch die in dem Vorhergehenden gegebene Kritik des Cartesius vervollständigt wird.

Vacuum nullum admittam, et contra Aristotelem cum Democrito et Cartesio nullam Rarefactionem aut Condensationem nisi apparentem statuam, puto tamen cum Democrito et Aristotele contra Cartesium aliquid in corpore esse passivum, praeter extensionem, id scilicet quo corpus resistit penetrationi; sed et praeterea cum Platone et Aristotele contra Democritum et Cartesium in corpore aliquam Vim activam sive ἐντελέχειαν agnosco, ut ita recte mihi Aristoteles naturam definisse videatur principium motus et quietis, non quod putem ullum corpus nisi jam in motu sit moveri a se ipso aut ab aliqua qualitate, qualis est gravitas, incitari, sed quod arbitrer omne corpus vim motricem, imo motum intrinsecum actualem semper habere insitum inde ab origine rerum. Exercitium autem potentiae motricis et phaenomena corporum assentior Democrito et Cartesio contra vulgus Scholasticorum semper mechanice posse explicari, demtis ipsis Legum motus causis quae ab altiore principio, nempe ab Entelechia proficiscuntur neque ex sola massa passiva ejusque modificationibus derivari possunt.

Sed ut melius intelligatur sententia mea rationesque etiam ejus nonnihil appareant, primum sentio naturam corporis non consistere in sola extensione, quia notionem extensionis evolvendo animadverti eam relativam esse ad aliquid quod extendi debet et diffusionem sive repetitionem cujusdam naturae significare. Repetitio enim omnis (seu multitudo eorundem) alia est discreta, ut in rebus numeratis ubi partes aggregati discernuntur; alia est continua, ubi indeterminatae sunt partes atque infinitis modis assumi possunt. Continua autem duorum sunt generum, alia successiva, ut tempus et motus, alia simultanea seu ex coexistentibus partibus constantia, ut spatium et corpus. Et quidem uti in tempore nihil aliud concipimus quam ipsam variationum dispositionem sive seriem, quae in ipso possunt contingere, ita in spatio nihil aliud quam corporum dispositionem possibilem intelligimus. Itaque cum spatium dicitur extendi, non aliter accipimus quam cum tempus dicitur durare, aut numerus numerari; revera enim nihil aut tempus durationi, aut spatium extensioni supperaddit, sed ut variationes successivae tempori insunt, in corpore varia sunt quae simul diffundi possunt. Nam quia extensio est repetitio continua simultanea, uti duratio successiva, hinc queties eadem natura per multa simul diffusa est, velut in auro ductilitas aut gravitas specifica aut flavedo, in lacte albedo, in corpore generaliter resistentia

seu impenetrabilitas, extensio locum habere dicitur, quanquam fatendum sit diffusionem illam continuam in colore, pondere, ductilitate et similibus in speciem tantum homogeneis non nisi apparentem esse neque in partibus utcunque parvis locum habere, solamque adeo extensionem resistentiae quae per materiam diffunditur, hoc nomen apud rigidum examinatorem tueri. Ex his autem patet, extensionem non esse absolutum quoddam praedicatum, sed relativum ad id quod extenditur sive diffunditur, atque adeo a natura cujus fit diffusio non magis divelli posse quam numerum a re numerata. Et proinde illi qui Extensionem assumsere tanquam aliquod attributum in corpore absolutum primitivum, indefinibile atque ἄῤῥητον, defectu Analyseos peccavere et reapse ad qualitates occultas confugerunt quas alioquin adeo contemnunt, tanquam extensio esset aliquid quod explicari non potest.

Quaeritur jam quae sit illa natura cujus diffusio corpus constituit? Resistentiae quidem diffusione jam diximus materiam constitui; sed cum nostra sententia aliquid aliud in corpore sit quam materia, quaeritur in qua ejus natura consistat. Eam ergo dicimus non in alio posse consistere quam ἐν τῷ δυναμικῷ seu principio mutationis et perseverantiae insito. Unde et doctrina physica duarum scientiarum Mathematicarum quibus subordinata est principiis utitur, Geometriae et Dynamices, cujus posterioris scientiae Elementa nondum hactenus satis tradita alicubi promisi. Ipsa autem Geometria seu scientia extensionis rursus subordinatur Arithmeticae, quia in extensione, ut supra dixi, repetitio est seu multitudo; et Dynamice subordinatur Metaphysicae quae de causa et effectu agit.

Porro τὸ δυναμικὸν seu potentia in corpore duplex est, Passiva et Activa. Vis passiva proprie constituit Materiam seu Massam, Activa ἐντελέχειαν seu formam. Vis passiva est ipsa Resistentia, per quam corpus resistit non tantum penetrationi, sed et motui, et per quam fit, ut corpus aliud in locum ejus subire non possit nisi ipso cedente, ipsum vero non cedat nisi motu impellentis nonnihil tardato, atque ita perseverare conetur in priore statu non ita tantum ut sponte non inde discedat, sed ita etiam ut mutanti repugnet. Itaque duo insunt Resistentiae sive Massae: primum Antitypia ut vocant seu impenetrabilitas, deinde resistentia seu quod Keplerus vocat corporum inertiam naturalem quam et Cartesius in Epistolis alicubi ex eo agnovit, ut scilicet novum mo-

tum non nisi per vim recipiant corpora adeoque imprimenti resistant et vim ejus infringant. Quod non fieret, si in corpore praeter extensionem non inesset τὸ δυνάμικὸν seu principium legum motus, quo fit ut virium quantitas augeri non possit, neque adeo corpus ab alio nisi refracta ejus vi queat impelli. Haec autem vis passiva in corpore ubique est eadem et magnitudini ejus proportionalis. Nam etsi corpora alia aliis densiora appareant, id tamen fit, quod pori eorum materia ad corpus pertinente magis sint repleti, dum contra corpora rariora spongiae naturam habent, ita ut alia subtilior materia eorum poros perlabatur quae corpori non computatur nec motum ejus sequitur vel expectat.

Vis activa, quae et absolute vis dici solet, non est concipienda ut simplex potentia vulgaris scholarum seu ut receptivitas actionis, sed involvit conatum seu tendentiam ad actionem, ita ut nisi quid aliud impediat, actio consequatur. Et in hoc proprie consistit ἐντελέχεια, parum scholis intellecta; talis enim potentia actum involvit neque in facultate nuda persistit, etsi non semper integre procedat ad actionem ad quam tendit, quoties scilicet objicitur impedimentum. Porro vis activa duplex est, primitiva et derivativa, hoc est vel substantialis vel accidentalis. Vis activa primitiva quae Aristoteli dicitur ἐντελέχεια ἡ πρώτη, vulgo forma substantiae, est alterum naturale principium quod cum materia seu vi passiva substantiam corpoream absolvit, quae scilicet unum per se est, non nudum aggregatum plurium substantiarum, multum enim interest verbi gratia inter animal et gregum. Adeoque haec Entelechia vel anima est, vel quiddam Animae analogum, et semper corpus aliquod organicum naturaliter actuat, quod ipsum separatim sumtum, seposita scilicet seu semota anima, non una substantia est, sed plurium aggregatum, verbo, machina naturae.

Habet autem Machina naturalis hanc pro artificiali summam praerogativam, ut infiniti autoris specimen exhibens, ex infinitis constet organis sibi involutis, neque adeo unquam prorsus destrui possit, quemadmodum nec prorsus nasci, sed diminui tantum et crescere, involvique atque evolvi, salvo semper hac ipsa quadantenus substantia et in ea (utcunque transformetur) aliquo vitalitatis aut si mavis actuositatis primitivae gradu. Idem enim quod de animatis, etiam proportione de iis dicendum est, quae animalia proprie non sunt. Interim ponendum est intelligentias seu nobiliores animas quae et spiritus appellantur, non tantum a Deo tan-

quam machinas, sed etiam tanquam subditos regi, neque iis quibus alia viventia revolutionibus obnoxia esse.

Vis derivativa est id quod quidam vocant impetum, conatus scilicet seu tendentia ut sic loquar ad motum aliquem determinatum, quo proinde vis primitiva seu actionis principium modificatur. Hanc ostendi non quidem eandem in eodem corpore conservari, sed tamen, utcunque in pluribus distribuatur, eandem in summa manere et differre a motu ipso, cujus quantitas non conservatur. Atque haec ipsa est impressio quam corpus impulsu accipit, cujus ope projecta motum continuant, neque novo indigent impulsu, quod et Gassendus elegantibus experimentis illustravit in navi factis. Itaque non recte quidam putant projecta continuationem motus ab aëre habere. Porro vis derivativa ab Actione non aliter differt, quam instantaneum a successivo; vis enim jam in primo est instanti, actio indiget temporis tractu, adeoque fit ex ductu virium in tempus, qui intelligitur in quavis corporis parte. Itaque actio est in ratione composita corporis, temporis et vis sive virtutis, cum Cartesianis Motus quantitas solo ductu celeritatis in corpus aestimetur longeque aliter se habeant vires quam celeritates, ut mox dicetur.

Ut autem Vim activam statuamus in corporibus, multa cogunt, et ipsa maxime experientia quae ostendit motus esse in materia, qui licet originarie tribui debeant causae rerum generali, Deo; immediate tamen ac speciatim vi a Deo rebus insitae attribui debent. Nam dicere Deum in creatione corporibus agendi Legem dedisse, nihil est nisi aliquid dederit simul per quod fiat ut Lex observetur; alioquin ipse semper extra ordinem procurare legis observationem debebit. Quin potius lex ejus efficax est, et corpora reddidit efficacia, id est vim insitam ipsis dedit. Considerandum praeterea est vim derivativam atque actionem quiddam esse modale, cum mutationem recipiat. Omnis autem modus constituitur per quandam modificationem alicujus persistentis sive magis absoluti. Et quemadmodum figura est quaedam limitatio seu modificatio vis passivae seu massae extensae, ita vis derivativa actioque motrix quaedam modificatio est non utique rei mere passivae (alioqui modificatio seu limes plus realitatis involveret, quam ipsum illud quod limitatur), sed activi cujusdam, id est entelechiae primitivae. Ergo vis derivativa atque accidentalis seu mutabilis erit quaedam modificatio virtutis primitivae essentialis atque in una quaque substantia cor-

perta perdurantis. Unde Cartesiani, cum nullum principium activum substantiale modificabile in corpore agnoscerent, actionem tandem ipsi abjudicare et in solum Deum transferre sunt coacti, accersitum ex Machina, quod philosophicum non est.

Variatur autem vis primitiva per derivativam in concursibus corporum, prout scilicet exercitium vis primitivae introrsum aut extrorsum vertitur. Revera enim omne corpus habet motum intestinum, neque unquam ad quietem deduci potest. Haec porro vis intestina sese extrorsum vertit, cum vis Elasticae officium facit, quando scilicet motus intestinus in cursu suo solito impeditur, unde omne corpus essentialiter Elasticum est, ne aqua quidem excepta, quae quam violenter repercutiat, etiam pilae tormentariae docent. Et nisi Elasticum esset omne corpus, leges motuum verae et debitae obtineri non possent. Interim ea vis non semper sese conspicuam in ipsis sensibilibus corporum partibus reddit, cum hae scilicet non satis cohaerent. Quanto autem corpus est durius, tanto est elasticum magis fortiusque repercutit. Nempe in concursu cum corpora a se invicem resiliunt, id fit per vim Elasticam, unde revera corpora motum a concursu proprium semper habent a vi sua propria, cui impulsus alienus tantum occasionem praebet agendi et ut sic dicam determinationem.

Hinc autem intelligitur, etsi admittatur vis illa primitiva seu Forma substantiae (quae revera etiam figuras in materia determinat, dum motum efficit), tamen in vi elastica aliisque phaenomenis explicandis semper procedendum esse Mechanice, nempe per figuras quae sunt modificationes materiae, et per impetus qui sunt modificationes formae. Et inane est, cum rationes distinctae et specificae reddi debent, ad formam seu primitivam in re vim immediate et generice confugere, uti inane est in creaturarum phaenomenis explicandis recurrere ad primam substantiam seu Deum, nisi ejus instrumenta aut fines simul speciatim explicentur, causaeque efficientes proximae aut etiam finales propriae recte reddantur, ut potentia ejus et sapientia appareat. Omnino enim (quicquid dixerit Cartesius) non efficientes tantum, sed et finales causae sunt physicae tractationis; prorsus quemadmodum domus male exponeretur, si quis partium structuram traderet tantum, non usum. Jam supra etiam monui, cum omnia in natura explicari dicimus Mechanice, excipiendas esse ipsas Legum Motus rationes seu principia Mechanismi, quae non ex solis mathematicis atque imaginationi subjectis,

sed ex fonte metaphysico, scilicet ab aequalitate causae et effectus, deduci debent aliisque hujusmodi Legibus quae sunt Entelechiis essentiales. Nempe ut jam dictum est, Physica per Geometriam Arithmeticae, per Dynamicen Metaphysicae subordinatur.

Cartesiani vero, natura virium non satis intellecta, Vim motricem cum Motu confundentes, graviter in legibus Motuum constituendis sunt lapsi. Nam cum intelligeret Cartesius, vim eandem in natura debere conservari, et corpus cum vis suae (derivativae scilicet) partem alteri tribuit, partem ita retinere ut summa virium eadem maneat, deceptus exemplo aequilibrii seu vis mortuae quam voco (quae hic in computum non venit, et vis vivae seu de qua nunc agitur non nisi infinitesimalis pars est) credidit vim esse in ratione composita massarum et celeritatum, sive idem esse cum eo quod vocat quantitatem motus, quo nomine intelligit factum ex ductu massae in celeritatem, cum tamen a priori a me sit alibi demonstratum, vires esse in ratione composita ex simplice massarum et duplicata celeritatum. Scio quosdam viros doctos nuper cum tandem agnoscere contra Cartesianos cogerentur non conservari quantitatem motus in natura eamque hanc solam pro vi absolutà haberent, hanc quoque vim non manere conclusisse confugisseque ad solam conservationem vis respectivae, sed a nobis deprehensum est, ne in absoluta quidem vi conservanda naturam constantiae suae atque perfectionis dememinisse. Et Cartesianorum quidem opinio, qua quantitas motus conservatur, cum phaenomenis omnibus pugnat, nostra mirifice experimentis confirmatur.

In eo etiam erratur a Cartesianis, quod putant mutationes fieri per saltum, tanquam exempli causa corpus quiescens momento possit transire in statum determinati motus, aut tanquam corpus in motu positum subito redigi possit ad quietem, non transeundo per intermedios velocitatis gradus, quia scilicet usum vis elasticae in corporum concursu non intellexere. Quae si abesset, fateor, neque lex quam voco continuitatis in rebus observaretur, per quam evitantur saltus, neque lex aequivalentiae qua vires absolutae conservantur, neque alia egregia Naturae Architectae inventa locum haberent, quibus necessitas materiae et pulchritudo formae conciliantur. Ipsa autem vis Elastica omni corpori insita ostendit, omni etiam corpori motum intestinum inesse et vim primitivam (ut ita dicam) infinitam, licet in ipso concursu, circumstantiis exigentibus vi derivativa determinetur. [Ut enim in fornice incumbentis

aut in chorda tensa trahentis totam vim quaevis pars sustinet et quaevis portio aëris compressi tantam vim habet quantam aëris incumbentis pondus, ita quodvis corpusculum totius massae ambientis vi conspirante ad agendum solicitatur nec nisi occasionem exercendae potentiae expectat, ut pulveris pyrii exemplo patet].

Sunt alia multa, in quibus a Cartesio mihi fuit abeundum, sed quae nunc attuli ad principia ipsa substantiarum corporearum potissimum referuntur et ad antiquam Scholae sanioris philosophiam, si recte interpretere, vindicandam valent, quam video a multis doctissimis Recentioribus, etiam ei faventibus, desertam, ubi non erat opus. R. P. Ptolemaei, in Veterum et Recentiorum placitis versatissimi viri, cujus doctrinam insignem Romae ipse perspexi, philosophia (a qua plurimum mihi polliceor) nondum ad nos pervenit.

In einer Note hat Leibniz hinzugefügt: Praeterquam finiam, adjicere placet, etsi Cartesiani plerique Formas Viresque in corporibus audacter rejiciant, Cartesium tamen moderatius locutum esse et hoc tantum professum, se nullam invenire iis utendi rationem. Equidem fateor, si usu carerent, merito rejiciendas; sed in hoc ipso Cartesium lapsum esse ostendi. Non tantum enim in Entelechiis seu τῷ δυναμικῷ sita sunt principia Mechanismi, quo omnia in corporibus reguntur, sed etiam a me in Actis Eruditorum, cum celeberrimo Viro Joh. Christophoro Sturmio in Physica sua Eclectica doctrinam meam non satis perceptam impugnanti responderem, irrefragabili demonstratione ostensum est: posita plenitudine, si nihil esset in materia quam massa ipsa ejusque partium variatio situs, impossibile fore, ut ulla contingat perceptibilis cuiquam variatio, cum semper aequivalentia limitatis substituantur seponendoque conatum sive vim tendendi ad futurum (sublatis scilicet Entelechiis) praesens unius momenti status rerum ab alterius cujusque momenti statu distingui non possit. Idque Aristotelem perspexisse arbitror, cum praeter motum localem etiam alterationem necessariam esse vidit, ut phaenomenis satisfiat. Alterationes autem, etsi in speciem multiplices, perinde ac qualitates in ultima analysi ad solam virium variationem rediguntur. Nam et omnes qualitates corporum, id est omnia praeter figuras accidentia eorum realia stabilia (id est quae non in transitu existunt, ut motus, sed impraesentiarum intelliguntur etsi in futurum referantur), instituta Analysi ad vires demum revocantur. Praeterea sublatis viribus in

motu ipso nihil manet reale, nam ex sola variatione situs determinari non potest, ubi sit motus verus seu variationis causa.

II.

DEMONSTRATIONES NOVAE DE RESISTENTIA SOLIDORUM.

Scientia Mechanica duas videtur habere partes, unam de potentia agendi seu movendi, alteram de potentia patiendi seu resistendi, sive de corporum firmitate. Harum posterior a paucis admodum tractata est. Archimedes, qui prope solus veterum Geometram in Mechanicis egit, hanc partem non attigit. Inde ab Archimede nihil fere actum est in Geometria Mechanica usque ad Galilaeum, qui exacto judicio magnaque interioris Geometriae notitia instructus, pomoeria scientiae protulit primus, idemque Solidorum resistentiam ad Geometriae leges revocare coepit. Et quanquam neque hic, neque circa motum projectorum rem acu tetigerit, usus hypothesibus non satis certis, et fundamentis tamen positis recte ratiocinatus est. Sic ergo ille sentit de resistentia trabium, quae muris vel parietibus infiguntur. In figuris 1 et 2 Trabs ABC normaliter infixa sit muro vel sustentaculo DE. Sit AC aequalis ipsi AB, et in fig. 1 sit in C appensum pondus F, quod trabem horizontalem praecise avellere possit a muro erecto; et in fig. 2 pondus G, quod trabem verticaliter avellere praecise possit a sustentaculo horizontali (quorum prius vocabo *transverse abrumpere*, posterius *directe evellere*), erit secundum Galilaeum pondus F dimidium ponderis G, posito solidum esse perfecte rigidum seu nullius flexionis capax, et pondus ipsius trabis negligi, vel in pondus appensum jam computari. Nam quia AB et AC aequales, ideo pondus F in fig. 1 eandem inveniet resistentiam in puncto B. ac si perpendiculariter traheret, ut in fig. 2. Resistentia ergo puncti B in utraque figura repraesentetur per BK, itaque resistentia puncti H in fig. 2 repraesentabitur per HL, aequalem ipsi BK, quia in fig. 2 omnium punctorum resistentia eadem. At resistentia ejusdem puncti H in fig. 1 repraesentabitur per HM ordinatim applicatam trianguli ABK, quia est ad resistentiam ipsius

B, ut AH ad AB, ex natura vectis. Idemque, quod in puncto H fecimus, faciendo in puncto alio inter A et B quocunque, complebitur pro repraesentanda resistentia in fig. 2 quadratum BC, et pro resistentia in fig. 1 triangulum ABK, illius quadrati dimidium. Itaque pondus F, si ponatur huic resistentiae in fig. 1 praecise par, ita ut quantulocunque pondere adjecto eam vincat, etiam ponderis G (illi resistentiae in fig. 2 praecise paris) dimidium erit, seu potentia abrumpendi transverse erit dimidia (ostendemus mox revera non esse dimidiam, sed tertiam partem) potentiae evellendi directe. Unde jam multae conclusiones practicae deduci possunt.

Has autem aliasque id genus Galilaei sententias Paulus Wurzius, summis militiae honoribus rebusque gestis non ita pridem clarus idemque horum studiorum valde intelligens, experimentis compluribus sumtis examinare olim aggressus est, successu quibusdam conclusionibus parum respondente, quemadmodum habeo a Cl. Blondello in his aliisque studiis eximio, Serenissimi Delphini nuper in Mathematicis Magistro et Academiae Architectonicae Directore, qui idem argumentum excoluit et Wurzio familiaris fuit; sed et Cl. Mariottus ex Academia Regia, de rebus opticis et mechanicis praeclare meritus, experimentis factis comperit, pondus F multo minus, quam voluit Galilaeus, ad abrumpendam trabem sufficere. Cujus causa nulla alia esse potest, quam quod is trabem consideravit ut perfecte rigidam, quae uno momento tota abrumpatur, ubi resistentia ejus superata est, cum tamen omnia corpora, quae nobis tractare datum est, nonnihil cedant antequam divelli possint. Unde Cl. Mariottus hoc observans ingenioso calculo collegit, pondus F esse circiter quartam partem ponderis G. Sed cum inde data mihi esset occasio rem considerandi profundius et ad leges Geometrarum exigendi, veras tandem proportiones erui, demonstravique inter alia pondus F fore tertiam partem ponderis G, et proinde firmitatem corporum rupturae resistentiam in sesquialtera proportione minorem esse, quam voluit Galilaeus.

Quod ut intelligatur, ante omnia sciendum est, corpora duo cohaerentia non statim uno momento a se invicem tota divelli, quod judicari potest exemplo baculi qui flectitur antequam frangatur, et exemplo chordae, quae extenditur antequam rumpatur, et ipsa flexio baculi est quaedam extensio in convexa ejus superficie. Nihilque tam rigidum esse, quin levi etiam impulsu flectatur non-

nihil, ex natura soni sequitur, qui tremor est quidam, sive flexio reciprocata partium corporis sonantis, licet eo promtior atque insensibilior sit restitutio acutiorque sonus, quo partes tremulae sunt breviores et magis tensae corpusque durius constituunt. Vitrum ipsum flexile esse probant filamenta ejus longa et tenuia; quomodo vitrum satis crassum frigore contrahatur, experimenta Florentina ostendunt. Partes quidem plantarum et animalium quodammodo textiles esse et ex filamentis varie implicatis constare, sensu ipso docemur. Mineralia quoque et metalla cum fluida essent, postea congelata sunt, et eadem nunc quoque habere tenacitatem et in fila duci, malleoque extendi, atque in fusione adhaerescere patet. Consideremus ergo velut fibras quasdam quae partes corporum connectant, et intelligamus trabem BC parieti vel sustentaculo DE plurimis fibrarum plexibus alligari in punctis A, H, B et aliis intermediis innumeris. Appenso jam pondere F, movebitur nonnihil trabs circa fulcrum A in fig. 3, et punctum trabis B a pariete discedens a puncto parietis $_1B$ veniet ad punctum a pariete distans $_2B$, secumque trahens fibram qua parieti annectitur, eam tendet instar chordae sive ultra naturalem suum statum extendet in lineam $_1B\,_2B$; eodemque modo punctum H fibram suam tendet in $_1H\,_2H$, quae lineae licet revera sint insensibiles, tamen docendi causa visibiliter exhibeantur, et quidem fibris $_1H\,_2H$ minus resistet trahenti, quam fibra $_1B\,_2B$ idque in duplicata ratione distantiae ab A, seu ex duplici capite a distantia sumto. Nam primo pondus in C, quo opus esset ad tendendam fibram $_1H\,_2H$ tantundem, quantum fibram $_1B\,_2B$, foret minus pondere requisito ad tendendam fibram $_1B\,_2B$, in ratione AH ad AB; verbi gratia si AH sit tertia pars ipsius AB, tunc et pondus in C, quod solam fibram $_1H\,_2H$ ita extendere potest, ut fiat aequalis ipsi $_1B\,_2B$, erit tertia pars ponderis tendentis solam fibram $_1B\,_2B$. Verum nunc secundo cum ambae simul tenduntur a pondere appenso in C, utique fibra $_1H\,_2H$ non est tantum tensa quantum fibra $_1B\,_2B$, sed multo minus, idque rursus in ratione AH ad AB. Nam si AH sit tertia pars ipsius AB, erit $_1H\,_2H$ tertia pars ipsius $_1B\,_2B$. Itaque (ex hypothesi alibi confirmata, quod extensiones sint viribus tendentibus proportionales) ad eam ita tendendam tertia tantum ponderis parte opus erit, qua ad eam tantundem quantum $_1B\,_2B$ tendendam opus fuisset, id est tertia parte tertiae partis ponderis ipsam $_1B\,_2B$ tendentis seu parte ejus nona. Itaque gene-

nititur in hac simultanea tensione omnium fibrarum ad quaevis puncta existentium, resistentiae in quolibet puncto erunt in duplicata ratione distantiarum a fulcro imo seu centro vel axe librationis sumtarum, id est resistentia in H erit ad resistentiam in B, ut quadratum ipsius AH ad quadratum ipsius AB. Itaque si jam pondus F in fig. 3 sit corpus parabolicum NRSQN, libere suspensum ex C, in quo altitudo NR sit aequalis basi RS (uti AB aequalis est ipsi AC) et sint ordinatim applicatae quadratis altitudinum proportionales, seu PQ ad RS ut quadratum NP ad quadratum NR: tunc posito basin RS repraesentare resistentiam in B, ordinata PQ repraesentabit resistentiam in H, si scilicet altitudines NP, NR sint altitudinibus respondentibus AH, AB proportionales; totum vero trilineum parabolicum concavum NRSQN repraesentabit resistentiam totius lineae AB, si scilicet trabs ABC transversim seu per modum vectis a pondere appenso F deprimatur. At quadratum RNTS, huic trilineo parabolico circumscriptum, repraesentabit resistentiam ejusdem lineae AB directam, si scilicet trabs directa ex pariete esset evellenda, ut in fig. 2. Nam quia AB et NR aequales, resistentia puncti B transversa eadem erit quae directa; nempe repraesentata per RS in fig. 3; jam si directe evellatur trabs (ut in fig. 2), resistentia omnium punctorum eadem est; ergo resistentia directa puncti H erit PV, aequalis ipsi RS: et ita procedendo in reliquis complebitur quadratum RT, quod cum sit triplum trilinei parabolici concavi inscripti, nempe NRSQN, ideoque erit et rectae alicujus lineae (ut AB) resistentia directa resistentiae transversae tripla. Quod demonstrandum erat.

Hinc porro quantacunque sit longitudo trabis, aut ponderis appensi distantia a pariete (quam hactenus sumsimus altitudini trabis aequalem), facile determinari poterit pondus ad abrumpendam trabem sufficiens: ut si pondus G trabem directe evellere possit in fig. 4, erit quidem pondus F tertia pars ipsius G (modo sit AC aequalis AB); si vero pondus J appendatur ex K, sitque AK quadrupla ipsius AB vel AC, erit pondus J quarta pars ipsius F, et duodecima ipsius G. Generaliter ergo pondus trabem parallelepipedam directe evellens, erit ad pondus abrumpens transverse seu per modum vectis, ut longitudo vectis est ad tertiam partem crassitiei trabis. Consideravimus autem hactenus ipsam trabem ut pondere carentem; quod si pondus ipsius trabis in rationes venire debeat, perinde erit ac si pondus J trabi aequale suspensum esset

ex K, centro gravitatis ipsius trabis. Fieri etiam poterit, ut trabs pondere suo frangatur in loco aliquo, ut G in fig. 5 inter parietem AB et extremitatem trabis C, quando scilicet gravitatio portionis FGCF, libratae ex puncto quietis G, majorem habet rationem ad resistentiam in FG, quam gravitatio totius trabis BAC ex puncto quietis A ad resistentiam in AB. Quaeritur autem, qualis esse debeat linea BFC, ut resistentiae sint gravitationibus respondentibus proportionales, et trabs ubique aequaliter resistat: hanc ergo invenietur esse Parabolicam. Est enim resistentia in FG ad resistentiam in BA ut trilineum parabolicum concavum FGHF ad aliud BACB, si basis trilinei sit altitudini ejusdem aequalis (ut patet ex praecedentibus), seu ut quadratum FG ad quadratum BA (quia trilineum tale est tertia pars quadrati circumscripti). Sed momentum seu gravitatio portionis FGCF cujuscunque ex G libratae, est ad momentum totius trabis BACB ex A libratae, etiam ut quadratum FG ad quadratum BA, quemadmodum ex natura parabolae facile demonstratur (nam portiones CGFC et CABC sunt ut cubi a CG, CA. Porro A2 et G3 sunto quartae partes ipsarum CG et CA, eruntque distantiae centrorum gravitatis portionum CGFC et CABC a punctis quietis seu centris librationis G et A, et momenta dictarum portionum sunt ut facta ex portionibus in distantias, seu in composita ratione portionum sive cuborum a GC et CA, et distantiarum, quae sunt ut ipsae CG et CA: ergo in ratione quadrato-quadratorum a CG, CA, id est in ratione quadratorum ab FG et BA). Ergo resistentiae sunt momentis seu viribus proportionales, seu ubique eadem momenti cujusque ad suam resistentiam proportio, atque adeo aequabilis erit firmitas, qua trabs ponderi proprio ubique resistit: et proinde in quantamcunque longitudinem procurrat trabs ita figurata, si prope murum pondere suo non frangatur, nec alibi frangetur. Praeterea cum trabs Prismatica parabolica CABC sit tertia tantum pars plenae CDBA, hinc tertia ponderis parte detracta et distantia centri gravitatis ab AG ad ejus dimidiam A2 retracta, trabs parabolica sextuplo plena firmior erit. Sed si neglecto pondere trabis intelligatur vis aquae aut venti, aut alia quaedam aequaliter distributa per totam trabis longitudinem, ut si in fig. 6 tignum ABD ex muro procurrens, onus terrae ingestae vel frumenti alteriusve materiae ferre debeat, poterit esse triangulare, lineaque AD recta, et tignum ubique aequaliter resistet ponderi imposito, ut si in muro non frangatur, nec alibi frangi

possit: nam ex notis mechanicae legibus, momentum ponderis incumbentis ipsi GD, est ad momentum ponderis incumbentis ipsi BD, ut quadratum GD ad quadratum BD, seu ut quadratum GF ad quadratum BA, id est ut resistentia in GF ad resistentiam in BA: quod si partim pondus impositum, partim figura trabis consideretur, nihilominus figuram aequaliter resistentem dare possum.

Hactenus autem consideravimus tantum trabem, cujus superficies, qua muro vel sustentaculo adhaeret, ubique aeque alta est, unde suffecit assumere rectam BA, sed quia superficies communis trabi et parieti varia esse potest, demus regulam generalem pro resistentia ejus Geometrice determinanda, cujus speciales casus si cui pertractare vacabit, is multa perelegantia theoremata deprehendet. In genere autem sit trabs ABHC (fig. 7), cujus sectio ad sustentaculum DE sit planum ABH figurae cujuscunque. Demittatur illud in horizontem, seu in plano horizontis describatur aliud ei aequale, simile, et similiter positum AGH. Ex puncto G ab AH horizontalium infima maxime remoto (quod respondet puncto B) ducatur ad AH perpendicularis GF (ipsi BF aequalis) et fiat corpus cylindricum, cujus basis aut sectio quaecunque parallela horizonti sit similis et aequalis ipsi AGH, altitudo autem perpendicularis sit GJ, aequalis FG vel BF, quod corpus liceat appellare cylindrum. Per J ducatur tangens indefinita KJL parallela ipsi AH. Tandem planum transeat per AH et KL, quod ad horizontem faciet angulum semirectum, et corpus cylindricum secabit in duas partes, quarum illa in quam cadit GJ, quae in figura est supra planum secans, a Geometris dicitur Ungula. Dico hanc Ungulam a cylindro resectam facientem officium vectis, cujus fulcrum sit in AH, aequare vel repraesentare resistentiam trabis ABHC transversim in AHB rumpendae, si pondus ipsius cylindri ad eandem directe ex muro evellendam sufficit. Sed ne opus sit ungulam considerari ad modum vectis, et ut pondus resistentiam repraesentans absolute habeamus, suspendatur ungula ex puncto M, seu ex FM distantia centri gravitatis ungulae a pariete, et ita exacte resistentiam transversalem aequabit, si cylinder aequat directam. Itaque cum quaeretur an et ubi solidum aliquod frangi debeat, Geometrae non erit difficilis aestimatio; id enim aut non aut ibi potissimum fiet, ubi momentum ungulae, seu factum ex ungula ducta in distantiam sui centri gravitatis, a plano verticali, in quo est axis librationis, omnium minimam habebit rationem ad potentiam ibi ab-

rumpere tentantem: ut proinde his paucis consideratis tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicis et mechanis unice desideratur.

Additio: Si quis connoeides aliquod quaerat aequalis resistentiae, huic satisfaciet Tuba parabolica. Sit in fig. 8 parabolica linea AEC cujus vertex A, tangens verticis AB, circa quam tanquam axem rotetur linea parabolica, et fiet Tuba AECGDFA. Sumta jam adhuc alia Tubae portione AEHFA, cum resistentiae basium seu circulorum CGD, EHF sint ut cubi diametrorum CD, EF, reperietur momenta ipsarum portionum AECGDFA et AEHFA ex natura parabolae esse etiam ut cubos CD, EF.

III.

DEMONSTRATIO GEOMETRICA REGULAE APUD STATICOS RECEPTAE DE MOMENTIS GRAVIUM IN PLANIS INCLINATIS, NUPER IN DUBIUM VOCATAE, ET SOLUTIO CASUS ELEGANTIS, IN ACTIS NOVEMBR. 1684 PAG. 512 PROPOSITI, DE GLOBO DUOBUS PLANIS ANGULUM RECTUM FACIENTIBUS SIMUL INCUMBENTE, QUANTUM UNUMQUODQUE PLANORUM PREMATUR, DETERMINANS.

Sit in fig. 9 planum verticale ADB, et inclinatum ACE, et in illo descendere tendat grave B, in hoc grave C, quae designo per puncta, in quae incidunt eorum centra gravitatis. Sint autem gravia connexa fune BAC, et in aequilibrio, angulusque ABC rectus. Ajo fore grave B ad grave C, ut recta AB ad rectam AC, quod sic ostendo: Funem (qui gravitate carere intelligitur) manu prehendendo in C, trahendoque grave C deorsum in E, adeoque simul grave B sursum in D (quo facto aequales erunt CE et BD), patet aequilibrium, quod prius erat inter gravia, manere, nec manum ab ipsis juvari vel impediri, nec proinde eorum centrum gravitatis commune (seu centrum totius ex ipsis compositi, sive centrum aequilibrii) attolli vel deprimi. Et cum gravium in situ B, C centrum gravitatis commune esset in recta BC, horizonti parallela, ideo eorundem centrum in situ DE positorum manebit in

recta BC, alioqui attolleretur vel deprimeretur. At idem est in recta DE, quippe quae eorum centra gravitatis B et C jungit: erit ergo in H puncto communi rectarum BC et DE. Jam ex Geometria ostendi potest Lemma facile nec injucundum: Si sint CE et BD aequales, fore DH ad HE, ut AC ad AB (de quo mox). Est autem etiam grave E (sive C) ad grave D (sive B) ut DH ad HE, quia H est centrum aequilibrii ipsorum. Ergo erit grave C ad grave B, ut AC ad AB, quod asserebatur. Idem aliter etiam sine assumto lemmate illo geometrico ostendi potest, si grave B attollatur usque ad A, seu si (D) incidat in ipsum punctum A, eo enim casu C(E) seu B(D) erit aequalis BA, et (H) incidet in C, et (H)(D) coincidet cum CA; eritque C centrum aequilibrii gravium ex B et C translatorum in A et (E), ac proinde grave in (E), hoc est grave C, ad grave in A, hoc est grave B, erit ut AC ad C(E) sive AB, ut ante. Placet tamen ipsius propositionis Geometricae supradictae demonstrationem subjicere.

LEMMA. Omnium triangulorum, angulum coincidentem et summam laterum circa eundem angulum aequalem habentium, bases a basi unius ex ipsis trianguli in eadem ratione secantur, quae scilicet est ratio laterum hujus trianguli positorum circa angulum communem. Sit angulus communis FAM in eadem fig. 9, et triangula quotcunque ut ABC, ADE angulum BAC, DAE habentia coincidentem, et summam laterum BA+AC vel DA+AE semper aequalem (unde et BD aequalis erit ipsi CE) unumque ex his triangulis assumatur ut ABC: dico a basi ejus BC secari basin DE trianguli alterius cujuscunque supradictas conditiones habentis ADE in partes DH, HE, quae sint in ratione AC, AB. Nimirum ex D ad AC ducatur DG parallela ipsi BC, et ex G ad BC ducatur GL parallela ipsi AB. Jam (ob triangula ABC, GLC similia) est AC ad AB, ut GC ad GL seu ad DB seu ad CE. Rursus (ob triangula EGD, ECH similia) GC ad CE, ut DH ad HE. Ergo (a primis ad postrema) erit AC ad AB, ut DH ad HE, quod ostendendum proponebatur. Patet autem ex demonstratione, nihil referre utrum angulus B sit rectus, et proinde etiam DE, basin trianguli ADE, secare basin BC alterius trianguli ABC (eandem laterum circa communem angulum summam habentis) ita ut segmenta CH, HB sint proportionalia ipsis DA, AE lateribus trianguli ADE circa angulum triangulis communem A. Potest etiam Lemma

nostrum haberi pro accessione Locorum Planorum. Locus enim punctorum, quibus bases omnium triangulorum eandem summam laterum circa communem angulum habentium in data ratione secantur, est recta. Superest nunc, ut veniamus ad solutionem casus de globo J (fig. 10) duobus planis HC, ZC ad horizontem NO inclinatis, sed ad se invicem angulum rectum facientibus simul incumbente, illi in F, his in H, ut determinemus, quantum sit momentum, quo unumquodque planum premitur. Statim autem patet (quod etiam ab Adm. Rev. P. Kochanskio in Actis Junii 1685 recte notatum video), globum in plano aliquo inclinato duplex exercere momentum, unum quo decliviter descendere tendit, alterum quo planum declive premit, quae duo simul absolutum seu totale gravis momentum constituunt. Itaque in nostro casu ob duas causas planum alterutrum, ut XFC, a globo J premi intelligitur: prima est quod globus J descendere tendens in plani XFC linea FC, momento quod sit ad totale ut XN ad XC (quemadmodum demonstravimus) aget reliquo (quod erit ad totale ut XC — XN ad XC) in ipsum planum declive XFC, a quo sustentatur. Sed actio ista etsi vera et realis sit, est tamen alternativa, et ob praesentiam alterius plani etiam sustentantis refracta, ut postea explicabitur. Secunda causa premendi planum XFC, est, quod globus J descendens in altero plano ZHC, momento quod sit ad totale ut ZO ad ZC, premit hoc ipso momento planum XFC descensui suo declivi, in linea HC affectato, se directe objiciens, atque ita hanc descensus vim excipiens. Porro eadem ratiocinatio institui potest de plano altero ZHC, etiam ex duabus illis premendi causis, et quidem ex prima causa, quae erat sustentatio globi in ipso plano, in quo decliviter descendere tendit, premitur hoc planum ZHC momento, quod sit ad totale momentum globi, ut ZC — ZO ad ZC; at vero ex altera causa quae erat exceptio globi, dum scilicet planum ZHC, ei in altero plano XFC decliviter descendere conanti se directe objiciens, vim illam excipit, premitur planum ZHC momento, quod sit ad totale ut XN ad XC. Et quidem causa prima premendi planum XFC, et secunda premendi planum ZHC, quae sunt dissimilares, simul constituunt totum momentum globi; globus enim premit planum XFC quatenus ab eo sustentatur, et planum ZHC quatenus a priore non sustentatur. Similiter causa prima premendi planum ZHC, et secunda premendi planum XFC,

licet dissimilares, constituunt totum momentum globi. Causae autem similes conjunctae, duae scilicet pressiones ob sustentationem, vel duae pressiones ob exceptionem (quibus duabus posterioribus compositis utitur doctissimus Autor speciminis de momentis gravium in Actis Novembr. 1684 exhibiti, qui casum hunc de duobus planis angulum rectum facientibus a se ingeniose excogitatum proposuit) momentum totale non integrant, sumtae scilicet ex diversis momenti totalis partitionibus. Verum cum quatuor premendi causis simul sumtis his integretur momentum totale, patet illas sic absolute sumtas non esse compatibiles, nec cumulative, sed ut post dicam, tantum elective sive alternative componendas: alioqui effectus globi in plana major esset momento globi totalis absoluto. Cum vero manifestum sit, duas semper causas in quolibet plano aequali ratione in considerationem venire debere, nec tamen integras retineri posse, adhibenda est regula alternativorum, quae in jure accrescendi, in aestimatione spei alea ludentium, aliisque casibus locum habet, hoc est utriusque momenti sumendum est dimidium seu, quod eodem redit, medium inter ipsa arithmeticum sive dimidium summae ex ambobus. Itaque si momentum globi totale sit unitas, cum duo momenta premendi planum XFC sint $\frac{XC-XN}{XC}$, et $\frac{ZO}{ZC}$ seu $\frac{ZO}{XC}$ (si ponantur XC et ZC aequales), sequitur momentum, quo revera in hoc situ premitur planum XFC, fore dimid. $\frac{XC-XN}{XC}$ + dimid. $\frac{ZO}{XC}$ seu $\frac{XC-XN+ZO}{2XC}$ et similiter momentum, quo revera premitur planum ZHC, erit dimid. $\frac{ZC-ZO}{ZC}$ $\left(\text{seu dimid. } \frac{XC-ZO}{XC}\right)$ + dimid. $\frac{XN}{XC}$, hoc est $\frac{XC-ZO+XN}{2XC}$, quorum duorum momentorum revera duo plana prementium summa componit momentum globi totale seu unitatem, quod omnino opus erat observari. Atque adeo cessat difficultas, quae ex casu proposito nasci posse videbatur, quae tamen talis erat, ut omnino mereretur explicari: nec ideo minus obligati sumus Autori speciminis, qui eam excogitavit, pariter atque Adm. R. P. Kochanskio, qui viam jam tum designavit, cui recte insistendo ad determinationem pressionis cujusque plani perveniri poterat. In numeris Kochanskianis sit XN vel CO, 3; CN vel ZO, 4; XC vel ZC, 5; tunc planum XFC revera premitur a $\frac{3}{5}$ et planum ZHC

a $\frac{2}{5}$ momenti totalis. Sin pro 3, 4, 5 numeri sint 5, 12, 13, tunc planum XFC premitur a $\frac{10}{13}$, et planum ZHC a $\frac{3}{13}$ momenti totalis. Ad examen autem regulae nostrae proderit etiam considerare et cum regula conferre solutiones casuum specialium aliunde notas, ut si XN fiat aequalis nihilo, planum XFC fiet horizontale, ZHC verticale, rectaeque XC et ZO aequales, ubi etiam ex regula recte prodibit totum momentum totale pro premendo plano XFC, et nihil pro premendo plano ZHC. Si vero rectae XN et ZO sumantur aequales, adeoque et anguli XCN, ZCO aequales, tunc per se manifestum est, utrumque planum eodem modo premi a globo, ac proinde dimidium momenti totalis unicuique impendi, quod ipsum et ex regula nostra prodit. Methodus autem qua usi sumus, per regulam alternativorum, etiam in aliis casibus perplexis enodandis magnum usum habere potest, quamvis non sit pure Geometrica, sed quodammodo Metaphysica simul; unde provisionalis censeri potest, donec idem demonstretur alia via, magis secundum vulgares notiones geometrica et rigorosa, quam ubi vacaverit exhibere mihi reservo. Porro unum adhuc admonendum est, ne quis in captionem satis alioqui subtilem incidat, et ut appareat clarius, cur duos conatus componendos vocaverimus alternativos: nempe haec quidem, quae de pressione cujusque plani determinavimus, tantum locum habent, cum unumquodque planum satis firmum est, ut resistere possit unicuique conatuum alternativorum a quibus premitur, separatim sumto; sed si unum ex planis resistere quidem posset minori conatui se urgenti, vel etiam dimidiae amborum summae, non vero majori, alterum vero planum ita firmum esset, ut unicuique ex ambabus in se pressionibus posset resistere, tunc eo ipso locum habebit absolute unus ex casibus alternativis prae reliquis, ac proinde cessante regula alternativorum aequaliter locum habentium, prius illud seu debilius planum vi ejus conatus, cui impar est, superaretur. Quae quidem observatio singularis est utilisque, ut conatus naturae alternativi singuli a conatu ob exitum alterutro modo frustra tentatum, ex ipsis alternativis sibi obstantibus resultante, distinguantur: nec ideo exempli causa putetur planum XFC premi absolute momento $\frac{ZO}{XC}$, quoniam eo ipso momento premitur conditionaliter, ita scilicet, ut frangendum sit, si ei resistere non possit. Nam in casu quo ei resistere potest, vi sua elastica renitens prementi, onus in alterum planum rejicere

[illegible], quod ipsum si etiam satis firmum sit, ex conflictu ea demum aequissima distributio sequitur, quam exposuimus, ubi non ipsa quidem quatuor momenta, sed tamen ipsis proportionalia adhibentur, in quae momentum totale distribuitur. Sunt autem haec, quemadmodum prima fronte paradoxa (ut scilicet planum aliquod dicatur certo aliquo momento seu conatu premi alternative sive conditionaliter), ita consideratu jucunda, et processum naturae non tantum mathematicum, sed et quodammodo Metaphysicum illustrare apta.

IV.

BREVIS DEMONSTRATIO ERRORIS MEMORABILIS CARTESII ET ALIORUM CIRCA LEGEM NATURALEM, SECUNDUM QUAM VOLUNT A DEO EANDEM SEMPER QUANTITATEM MOTUS CONSERVARI, QUA ET IN RE MECHANICA ABUTUNTUR.

Complures Mathematici cum videant in quinque machinis vulgaribus celeritatem et molem inter se compensari, generaliter vim motricem aestimant a quantitate motus, sive producto ex multiplicatione corporis in celeritatem suam. Vel ut magis geometrice loquar, vires duorum corporum (ejusdem speciei) in motum concitatorum ac sua mole pariter ac motu agentium esse dicunt in ratione composita corporum seu molium et earum quas habent velocitatum. Itaque cum rationi consentaneum sit, eandem motricis potentiae summam in natura conservari, et neque imminui, quoniam videmus nullam vim ab uno corpore amitti, quin in aliud transferatur, neque augeri, quia vel ideo motus perpetuus mechanicus nuspiam succedit, quod nulla machina ac proinde ne integer quidem mundus suam vim intendere potest sine novo externo impulsu; inde factum est, ut Cartesius, qui vim motricem et quantitatem motus pro re aequivalente habebat, pronunciaverit eandem quantitatem motus a Deo in mundo conservari.

Ego vero ut ostendam quantum inter haec duo intersit, suppono primo, corpus cadens ex certa altitudine acquirere vim eandemque rursus assurgendi, si directio ejus ita ferat nec quicquam

externorum impediat: exempli causa, pendulum ad altitudinem, ex qua demissum est, praecise rediturum esse, nisi aëris resistentia similiaque impedimenta exigua alia nonnihil de vi ejus absorberent, a quibus nos quidem nunc animum abstrahimus. Suppono item secundo, tanta vi opus esse ad elevandum corpus A (fig. 11) unius librae usque ad altitudinem CD quatuor ulnarum, quanta opus est ad elevandum corpus B quatuor librarum usque ad altitudinem EF unius ulnae. Omnia haec a Cartesianis pariter ac caeteris Philosophis et Mathematicis nostri temporis conceduntur. Hinc sequitur corpus A delapsum ex altitudine CD praecise tantum acquisivisse virium, quantum corpus B lapsum ex altitudine EF. Nam corpus (A) postquam lapsu ex C pervenit ad D, ibi habet rem reassurgendi usque ad C, per suppos. 1, hoc est vim elevandi corpus unius librae (corpus scilicet proprium) ad altitudinem quatuor ulnarum. Et similiter corpus (B) postquam lapsu ex E pervenit ad F, ibi habet vim reassurgendi usque ad E, per suppos. 1, hoc est vim elevandi corpus quatuor librarum (corpus scilicet proprium) ad altitudinem unius ulnae. Ergo per suppos. 2 vis corporis (A) existentis in D, et vis corporis (B) existentis in E sunt aequales.

Videamus jam an et quantitas motus utrobique eadem sit. Verum ibi praeter spem discrimen maximum reperietur. Quod ita ostendo. Demonstratum est a Galilaeo, celeritatem acquisitam lapsu CD esse duplum celeritatis acquisitae lapsu EF. Multiplicemus ergo corpus A, quod est ut 1, per celeritatem suam, quae est ut 2, productum seu quantitas motus erit ut 2; rursus multiplicemus corpus B quod est ut 4, per suam celeritatem, quae est ut 1, productum seu quantitas motus erit ut 4. Ergo quantitas motus, quae est corporis (A) existentis in D, est dimidia quantitatis motus, quae est corporis (B) existentis in F, et tamen paulo ante vires utrobique inventae sunt aequales. Itaque magnum est discrimen inter vim motricem et quantitatem motus, ita ut unum per alterum aestimari non possit, quod ostendendum susceperamus. Ex his apparet, quomodo vis aestimanda sit a quantitate effectus, quem producere potest, exempli gratia ab altitudine, ad quam ipsa corpus grave datae magnitudinis et speciei potest elevare, non vero a celeritate quam corpori potest imprimere. Non enim dupla, sed majore vi opus est ad duplam eidem corpori dandam celeritatem. Nemo vero miretur in vulgaribus machinis, vecte, axe in in peri-

trochlea, trochlea, cuneo, cochlea et similibus aequilibrium esse, cum magnitudo unius corporis celeritate alterius, quae ex dispositione machinae oritura esset, compensatur, seu cum magnitudines (posita eadem corporum specie) sunt reciproce ut celeritates, seu cum eadem alterutro modo prodiret quantitas motus. Ibi enim evenit etiam eandem utrobique futuram esse quantitatem effectus seu altitudinem descensus aut ascensus, in quodcunque aequilibrii latus motum fieri velis. Itaque per accidens ibi contingit, ut vis a motus quantitate possit aestimari. Alii vero casus dantur, qualis is est, quem supra attulimus, ubi non coincidunt.

Caeterum cum nihil sit probatione nostra simplicius, mirum est vel Cartesio vel Cartesianis, viris doctissimis, in mentem non venisse. Sed illum quidem nimia fiducia sui ingenii in transversum egit, hos alieni. Nam Cartesius, solito magnis viris vitio, postremo factus est paulo praefidentior. Cartesiani autem non pauci vereor ne paulatim Peripateticos complures imitari incipiant, quos irrident, hoc est ne pro recta ratione et natura rerum, consulendis magistri libris assuefiant.

Dicendum est ergo vires esse in composita ratione corporum (ejusdem gravitatis specificae seu soliditatis) et altitudinum celeritatis productricium, ex quibus scilicet tales celeritates acquiri potuissent, vel generalius (quia interdum nulla adhuc celeritas producta est) altitudinum proditurarum, non vero generaliter ipsarum celeritatum, utcunque id plausibile prima specie videatur et plerisque sit visum; ex quo complures errores nati sunt, qui in scriptis mathematico-mechanicis RR. PP. Honorati Fabri et Claudii Dechales, itemque Joh. Alph. Borelli, et aliorum virorum, caeteroqui in his studiis praestantium, deprehenduntur. Quin et hinc factum puto, quod nuper Regula Hugeniana circa centrum oscillationis pendulorum, quae verissima est, a nonnullis viris doctis in dubium fuit vocata.

Beilage.

Ostendendum est, ejusdem esse potentiae elevare unam libram ad duos pedes, et elevare duas libras ad unum pedem.

Hanc propositionem non admittunt tantum, sed et diserte adhibent et pro principio habent Cartesius in Epistolis et brevi trac-

tatu Mechanico, qui tum Epistolis insertus tum etiam separatim editus habetur; Pascalius in tractatu de aequilibrio liquorum; Samuel Morlandus Anglus (inventor Tubae Stentoreae) in tractatu Hydraulico nuper edito; et Cartesianus quidam eruditus qui meae demonstrationi Anti-Cartesianae sed non satis perceptae aliis nescio quibus effugiis quaesitis respondere voluit in Novellis Reipublicae literariae apud Batavos editis; ut alios Cartesianos non minus quam alterius sententiae philosophos taceam. Itaque ad revincendam Cartesianorum Naturae Legem tuto a me adhiberi potuit.

Eandem propositionem confirmant quinque Mechanicae potentiae vulgo celebratae, vectis, axis in peritrochio, trochlea, cuneus et cochlea, ubique enim reperietur veram esse nostram propositionem. Nunc autem brevitatis causa sufficiet rem solo vectis exemplo ostendere, vel (quod eodem redit) ex nostra regula deducere reciprocam esse proportionem distantiarum et ponderum in aequilibrio positorum. Ponamus enim AC (fig. 12) esse duplam ipsius BC, et pondus B duplum ponderis A, ajo A et B esse in aequilibrio. Ponamus enim alterutrum praeponderare, ut B, atque ita B descendere in (B), et A ascendere in (A); demittantur ex (A) et (B) perpendiculares in AB, nempe (A)D et (B)E, patet si D(B) sit unius pedis, fore (A)E duorum pedum, ergo si duae librae descendant ad altitudinem unius pedis, unam libram ascendere ad altitudinem duorum pedum, atque adeo cum haec duo aequivaleant, nihil acquiri proindeque nec fieri descensum inutilem, sed omnia potius ut antea in aequilibrio manere. Eodem modo ostendetur, nec A descendere sive praevalere. Atque ita a posteriori confirmatur nostra propositio tanquam Hypothesis, ea enim assumta ostendi possunt omnes propositiones Mechanicae vulgaris ad aequiponderantia sive potentias quinque pertinentes.

Quin imo affirmare ausim nullum extare Theorema Mechanicum, quo non confirmetur Hypothesis nostra vel supponatur, quemadmodum ostendi posset ex regula plani inclinati, vel jactibus aquarum, vel descensu gravium accelerato. Et licet nonnulla horum conciliari etiam posse videantur cum illa Hypothesi quae potentiam ex mole ducta in celeritatem metitur, hoc tamen fit per accidens, quoniam in potentiis mortuis, ubi conatibus primis vel ultimis agitur, duae Hypotheses coincidunt, sed in potentiis vivis seu concepto impetu agentibus divortium fit, quemadmodum in

exemplo patet, quod a me in edito Schediasmate propositum est. Est autem potentia viva ad mortuam vel impetus ad conatum ut linea ad punctum vel ut planum ad lineam. Et quemadmodum circuli non sunt ut diametri, sed ut quadrata diametrorum, ita potentiae vivae corporum aequalium non sunt ut celeritates, sed ut quadrata celeritatum.

Sed quoniam neque autoritate hic standum est, neque inductionibus atque hypothesibus contentus est animus sciendi cupidus, en age dabimus Demonsrationem propositionis nostrae, ut imposterum inter immota Mechanicae doctrinae fundamenta collocari possit.

Assumo autem hoc unum, corpus grave, quod ex aliqua altitudine descendit, exacte vel praecise habere potentiam rursus ad eandem altitudinem assurgendi, si scilicet nihil virium in itinere attritu aliquo aut resistentia ambientis vel alterius corporis perdidisse intelligatur.

Corollarium. Itaque corpus unius librae quod descendit ex altitudine unius pedis, exacte acquisivit potentiam attollendi corpus unius librae (aequale scilicet corpori proprio) ad altitudinem unius pedis.

Postulo praeterea mihi concedere, ut liceat supponere varias gravium inter se connexiones et a se invicem liberationes, aliasque comminisci mutationes quae potentiae mutationem non involvunt, fingendo fila, axes, vectes aliaque machinamenta pondere et resistentia carentia.

Theorema. His positis, ajo corporis B (fig. 13) unius librae descensum ex B((B)) altitudine duorum pedum exacte habere tantum potentiae, quanta opus est ad attollendum corpus A duarum librarum ad altitudinem A(A) unius pedis.

Demonstratio. Pono corpus A componi ex duabus partibus E et F, quarum unaquaeque sit unius librae. Jam corpus B unius librae descendens ex altitudine B(B) unius pedis praecise potentiam habet (per corollar.) attollendi corpus E unius librae ad altitudinem E(E) unius pedis, si (per postulat.) ei connexum ponatur. Ponamus porro (per idem postulatum) corpus B in loco (B) liberari a connexione cum corpore E, relicto in loco (E), et connecti jam cum corpore F, tunc corpus B descensu suo continuato ex altitudine (B)((B)) poterit (per coroll.) ipsum corpus F

unius librae attollere ad F(F) altitudinem unius pedis. Ergo toto corpore B unius librae descensu bipedali B(B)((B)) corpus compositum ex ambobus simul E et F, hoc est A, duarum librarum elevatum est ad A(A) altitudinem unius pedis. Quod praecise fieri posse erat ostendendum.

Scholium.

Si quis rem modo attente consideret, facile sine omni figurarum apparatu intelliget, aequivalere haec duo, unam libram attollere ad duos pedes (hoc est libram ad pedem, et rursus libram ad pedem) et duas libras attollere ad unum pedem (hoc est libram ad pedem, et adhuc libram ad pedem). Et in universum potentia ab effectu aestimanda est, non a tempore; tempus enim per externas circumstantias variari potest. Sic globus C (fig. 13a) impetum conceptum habens, cujus ope se attollere possit ad altitudinem HG in plano inclinato LM vel LN, tanto majore indigebit tempore, quanto longius erit planum inclinatum. In alterutro tamen ad eandem altitudinem perpendicularem assurget, si scilicet (ut in his fieri debet) resistentia aëris et plani pro nulla habeatur. Et eadem manet potentia globi, quaecunque demum linea inclinata ipsi assurrecturo objiciatur. Effectum autem hoc loco intelligo, qui vim naturae facit seu cujus productione impetus diminuitur, qualis effectus est ascensio vel elevatio alicujus gravis, tensio Elastri, excitatio corporis in motum vel moti retardatio aliaeque hujusmodi operationes. At corporis semel in motu positi major minorve progressus in plano horizontali non est talis Effectus, quo potentiam absolutam aestimo; manet enim eadem potentia durante progressu, quod deceptionis vitandae causa annotare operae pretium fuit, cum ista non satis explicata habeantur. Equidem fateor, ex cognito tempore vel reciproco ejus, nempe celeritate, cognitisque caeteris circumstantiis judicari posse de potentia corporis dati, nego tamen tempus vel celeritatem esse mensuram potentiae absolutam, sed effectum, quippe quem eadem manente potentia nec tempus nec aliae circumstantiae variare possunt. Unde mirum non est, quod potentiae duorum corporum aequalium non sunt ut celeritates, sed ut causae vel effectus celeritatis, hoc est altitudines productrices vel productibiles seu ut celeritatum quadrata. Unde etiam fit ut corporibus duobus concurrentibus post concursum non eadem servetur quantitas motus vel impetus, sed eadem quantitas virtutis.

Hinc etiam fit ut chorda quadruplo pondere tendi debeat, quo sonus duplo acutior fiat, pondus enim potentiam repraesentat, sonus chordae vibrationum celeritatem. Ratio autem ultima est, quod ipse motus per se non est aliquid absolutum et reale.

V.

ILLUSTRATIO ULTERIOR OBJECTIONIS CONTRA CARTESIANAM NATURAE LEGEM, NOVAEQUE IN EJUS LOCUM REGULAE PROPOSITAE.

Tametsi in nupera objectione mihi satis falsitatem regulae de servanda motus quantitate ostendisse et meliorem substituisse videar, quoniam tamen intellexi nonnullis viris doctis aliquid superesse difficultatis, non melius eam tolli posse existimavi, quam proposito aliquo casu certo et secundum Cartesianas pariter measque leges examinato, ut sensus, vis discrimenque utriusque dogmatis appareat. In figura 14 sit recta horizonti parallela FE, in qua duo globi solidi duri, aequales ejusdemque materiae, unusquisque unius si placet librae, nempe B et C, ex locis $_1B$, $_1C$ ferantur ad occursum $_2B\,_2C$; globi autem B ante concursum dum in plano horizontali aequabiliter ferri intelligitur, celeritas sit ut 9, et globi C similiter celeritas ut 1. Si jam his positis secundum tertiam motus regulam Cartesianam parte I Principiorum articulo 48 traditam, ambo simul post concursum tendere ponantur versus $_3B\,_3C$ ea directione quam antea habebat globus B, celeritate amborum nunc aequali, erit ea celeritas communis ut 5, quemadmodum ex dicta regula tertia patet, ut scilicet eadem prodeat quantitas motus in summa quae fuerat ante concursum, nam ante concursum globus B librae 1 ductus in celeritatem 9 dat 9, globus C librae 1 in celeritatem 1 dat 1, et 9 plus 1 dat quantitatem motus totam 10: nunc vero post concursum ambo globi simul librarum 2 in celeritatem communem 5 dant quantitatem motus totam rursus 10, idemque in aliis omnibus casibus a Cartesio obervatur. Ego vero ostendam, hinc oriri incongruum, et servata quantitate motus perdi quantitatem virium. Possumus enim concipere globum B suam celeritatem ut 9 quam habet in loco $_1B$, nactum esse de-

scendendo ex loco β, altitudine perpendiculari βE 81 pedum, et globum C nactum esse celeritatem ut 1 descendendo ex altitudine perpendiculari KF unius pedis; nihil enim quoad praesentes vires interest, quomodo corpus aliquod suam celeritatem sit nactum, modo eam nunc habeat. Altitudinem autem perpendicularem tantum considero, licet descensus utcunque inclinatus esse possit, unde tempora quoque descensuum ex diversis altitudinibus pro arbitrio aequalia vel inaequalia reddi possunt nec proinde ad rem faciunt. Cumque corpus ea vi quam labendo acquisivit, si nihil externi, quod impedire possit, accidat, rursus ad eam altitudinem perpendicularem ex qua decidit, ascendere possit, habebit globus B ante concursum potentiam attollendi unam libram ad pedes 81, et globus C potentiam attollendi unam libram ad pedem 1, et ambo simul ante concursum habent potentiam attollendi libram unam ad pedes 82, sed post concursum cum ambo simul habeant celeritatem ut 5, habebunt potentiam assurgendi usque ad D, cujus altitudo perpendicularis DG erit 25 pedum, habebunt ergo potentiam attollendi 2 libras ad 25 pedes seu unam libram ad 50 pedes, non ad 82 ut ante; periit ergo potentia attollendi unam libram ad pedes 32, et quidem periit sine causa, quod est impossibile.

Ut vero appareat, non deesse alios qui hanc Cartesianam computandi rationem sequantur, afferamus locum praeclari Autoris de Inquirenda Veritate lib. 6. Is quaedam Cartesiana recte correxit, optandumque esset ut alii in dogmatibus magistri expendendis studium ejus imitarentur, principii tamen hujus quod refutamus speciositate deceptus in eundem scopulum impegit. Nempe in casu regulae sextae Cartesianae, ubi ipse dissentit a Cartesio, si ponatur corpus B librae 1 incurrere celeritate ut 10 in corpus C quiescens, itidem librae 1, tota quantitas motus erit ut 10; post concursum ambo simul (secundum Autorem) ibunt celeritate ut 5, adeoque moles 2 in celeritatem 5 dabit iterum 10; servabitur ergo quantitas motus. At vero quantitas virium hac ratione minime servabitur, nam ante concursum aderat vis attollendi libram 1 ad pedes 100, si placet, post concursum superest vis attollendi libras duas ad pedes 25 seu libram unam ad pedes 50 tantum; periit ergo dimidia potentiae quantitas, et quidem sine causa, quod defendi non potest.

Alia ratione incongruitas contraria oritur, ut servata quanti-

tato motus, augeantur vires. Ponamus enim aliqua ratione effici, ut tota potentia molis quatuor librarum, cujus gradus celeritatis sit ut 1, transferatur in corpus quiescens unius librae, ita ut post translationem factam quatuor illae librae quiescant, quinta vero quae prius quieverat, nunc moveatur; quaeritur quis huic tribui debeat gradus celeritatis? Secundum legem Cartesianam quam refutamus celeritas ejus erit ut 4, nam 4 librae in 1 gradum celeritatis eandem dant motus quantitatem, quam 1 libra in 4 gradus. Sed ita si ponamus ante translationum 4 libras uno gradu celeritatis sursum converso potuisse ascendere ad altitudinem unius pedis, seu quod idem est, 1 libram ad 4 pedes, utique post translationem una libra 4 gradibus celeritatis praedita, versa sursum directione ad altitudinem 16 pedum, et proinde quadruplicatae erunt vires sine causa, quo nihil est a ratione alienius. Mea vero sententia, si ponatur potentia librarum 4 praeditarum celeritate ut 1, tota transferenda in aliam libram unicam, tunc celeritas hujus per translationem acquisita debet esse ut 2, ita enim ante pariter et post concursum eadem erit potentia, nempe attollendi libram ad pedes 4.

Ex his habetur generalis Methodus caeteras quoque regulas examinandi; quo facto patebit, solam primam (quae per se nota est) ex septem illis quas Cartesius, itemque quas Autor de Inquirenda Veritate tradunt, consistere posse cum principio a me proposito, sane certissimo universalissimoque, quod eadem semper virium summa servetur, virium, inquam, quae nempe eundem semper effectum praestare possint. Temporis autem, quo grave descendit vel ascendit, consideratio nihil novi affert, jamque in celeritate continetur, cui proportionale est caeteris paribus, quoniam celeritates temporibus aequaliter inter descendendum vel ascendendum crescunt vel decrescunt; ideo tempus a me in objectione omissum est, ac proinde licet verum sit corpus (simplum) duplae celeritatis duplo tempore pro ascensu ad quatuor ulnas indigere ejus, quo indiget corpus (quadruplum) simplae celeritatis pro ascensu ad unam ulnam, non tamen proprie ob tempus duplum fit, ut dupla celeritas simplum corpus quadrupli corporis potentiae aequet (cum potius caeteris paribus major potentia futura esset, quae non duplo sed simplo tempore eundem effectum praestare posset), sed ob quadruplum effectum altitudinis, quem dupla celeritas corpori simplo tribuere potest, quantocunque demum id

tempore praestet, pro variis enim inclinationibus planorum mutari potest tempus. Quoniam tamen caeteris paribus dicimus tempora esse celeritatibus proportionalia, hinc temporis recte intellecti considerationem celeritatis considerationi addere nihil aliud est quam celeritatis considerationem duplicare, hoc est altitudinis considerationem adhibere, quae dupla celeritate et duplo tempore est quadrupla, et tripla celeritate triploque tempore noncupla, adeoque est in ratione composita celeritatum et temporum aequalium, hoc est in ratione celeritatum duplicata. Hinc satis habui altitudinem considerare, quae caetera jam includit, vel rationem celeritatum duplicatam, praesertim cum celeritatis duplicata ratio, vel altitudinis simpla, si moli conjungantur, potentiam constituant sine ulla exceptione, quod de tempore secus est, cum ob ejus variabilitatem fallat aestimatio per tempus, nisi cautelae adhibeantur omnisque in modo ascendendi utrobique in his quae comparantur sint paria. Cartesius certe nec temporis consideratione hic usus est, nec celeritatis rationem duplicavit, sed non nisi quantitatem motus seu factum ex mole in celeritatem simplicem tanquam virium mensuram aestimare et in corporibus conservare voluit, quemadmodum ex dictis manifestum est: nec facile (opinor) Cartesianus quicquam produci poterit, qui aliter Magistrum sit interpretatus ante objectionem meam, aut qui regulam ejus ad solas quinque machinas vulgares vel ad potentias isochroni motus restrinxerit; hoc enim legem naturae pro universalissima venditatam et (si vera esset) pulcherrimam prorsus coarctare ac corrumpere, et deserere potius quam defendere foret. Si quis vero putet tempus novam aliquam vim moli et celeritati addere, sic ut e duobus corporibus existentibus aequalibus et aeque velocibus illud sit potentius quod majore tempore totam vim suam acquisivit aut exercet, eum longe abe-errare manifestum est: potentia enim ex quantitate et mole datis jam tum determinata est; si vero possibile esset, his manentibus, ob temporis differentiam variari vires, magis rationi consentaneum foret, illi majorem potentiam tribuere, quod effectum praestaret tempore minore, caeteris paribus. Verum tempus per se nihil addit potentiae, sed potius potentia sibi ipsi tempus agendi determinat pro circumstantiis externis, quibus variantibus etiam tempus variatur infinitis modis. Et sane possum efficere ope planorum varie inclinatorum, ut gravia diversis temporibus, utcunque in quocunque data ratione aequalitatis vel inaequalitatis suae habentibus,

easdem vires acquirant vel exerant; imo, dum haec scribo, elegantia problematis motus, lineam descensoriam singularem excogito, cujus ea est natura mirabilis, ut grave in ea non accelerate, sed aequabiliter et isochrone sit descensurum, hoc est ut descensus (in perpendiculari nimirum, non ipsa linea descensoria sumti, seu quod idem est appropinquationes ad planum horizontale) futuri sint temporibus proportionales, et grave tantum uno minuto quantum altero ad inferiora progrediatur; cujus lineae naturam illis divinandam relinquo, qui nimiae me confidentiae insimulabunt, quod aliquid Cartesianis objicere et ipsam Cartesii (viri licet mea quoque confessione summi) Geometriam imperfectionis accusare non dubitavi. Habebunt enim hic ejus cultores exercendae artis suae analyticae materiam, praesertim cum non difficile sit problema et paucis peragi possit, si ea analysi tractetur, cujus principia a me sunt publicata.

Porro praeter propositam supra naturae legem, quod eadem servetur summa virium, aliam habeo non minus generalem et rationi consentaneam, nempe eandem semper in summa servari quantitatem directionis sive in corporibus particularibus inter se communicantibus sive in tota natura, hoc est si ducatur recta quaecunque pro arbitrio et propositis corporibus solum inter se communicantibus quotcunque aestimetur in rectis assumtae parallelis quantitas progressus in unam partem detracta quantitate progressus in contrariam, reperietur hanc differentiam semper manere eandem, adeoque naturam non obstantibus corporum conflictibus, non interrupto tenore aequabiliter prosequi scopum eundem, quem in toto, singulis partibus in unum computatis, compensatione facta sibi proposuit, quippe ipsamet sibi ipsi obstare atque impedimenta ponere non possit. In universa autem natura omnia in aequilibrio sunt et respectu plagarum quarumcunque totius universi parallelos conatus contrarios inter se in summa perfecte aequales esse necesse est, differentia (nempe nulla) itidem semper eadem manente. Quod si abesset illud aequilibrium universi, omnia aequabili tenore migrarent continuo ad easdem partes, quod ratione caret, quoniam spatium ubique sibi simile est, nec causa intelligi potest cur in hanc potius plagam quam in contrariam sit eundum. In partibus tamen universi varios aestus et quasi reciprocationes materiae esse, dubium nullum est, salvo aequilibrio summae. Ut autem vis hu-

jus naturae legis melius intelligatur, inspiciatur iterum figura 14. Sint corpora quotcunque cujuscunque magnitudinis aut figurae, quae moveantur aut quiescant, ut B, C, M, N, P, Q; ducatur recta quaecunque A H; dico in alterutram plagarum A vel H, quae detracto contrario conatu praevalet, eundem semper in his corporibus in summa nisum fore; et quidem corpora M et N ponantur moveri in recta parallela ipsi AH, ipsius M moles sit 2, celeritas qua tendit ex $_1M$ versus $_2M$ seu versus plagam H sit 9, quantitas directionis ad H erit 18. Contra, corporis N moles sit 4, celeritas qua moveatur ex $_1N$ versus $_2N$ seu versus plagam A sit 3; quantitas directionis ad A erit 12. Quod vero attinet corpora B et C, etsi moveantur in recta FE quae non est parallela ipsi AH, directio tamen earum in plagas A et H ita aestimatur, posito B tendere ex $_1B$ in $_2B$ celeritate $_1B\,_2B$ ut 9; ducatur per $_1B$ recta $_1BT$ parallela ipsi HA, cui ex $_2B$ educta $_2BT$ ad angulos rectos occurrat in T, tunc celeritas, in qua B tendit ad plagam A, aestimabitur magnitudine rectae $_1BT$ quam ponamus esse 8, moles autem ipsius B est 1 et quantitas directionis ejus ad plagam A erit 8; contra, si $_1C\,_2C$ ponatur 1, erit $_1CL$ (parallela ipsi AH) $\frac{8}{9}$, posito angulo $_1CL_2C$ recto, et quia ipsius C moles est 1, utique quantitas directionis versus H erit $\frac{8}{9}$. Similiter corpora P et Q licet moveantur in recta non parallela ipsi AH, si tamen ipsius P celeritas $_1P\,_2P$ sit ut 3, et ipsius Q celeritas $_1Q\,_2Q$ ut 2, ductis ipsi AH parallelis $_1PR$ et $_1QS$ sic ut anguli $_1PR\,_2P$ et $_1QS_2Q$ sint recti, et PR $\frac{22}{27}$, et QS $\frac{164}{81}$, tunc posito molem ipsius P esse 5, erit ejus quantitas directionis versus H 5 in $\frac{22}{27}$ seu $\frac{110}{27}$, et posito molem ipsius Q esse 3, erit ejus quantitas directionis versus A 3 in $\frac{164}{81}$ seu $\frac{164}{27}$; itaque computando omnia, summa directionum in plagam H erit $18+\frac{8}{9}+\frac{110}{27}$, summaque directionum in plagam contrariam A erit $12+8+\frac{164}{27}$, et ab illa hanc detrahendo restabit 8 quantitas directionis totalis in recta AH et parallelis tendens in plagam H, eaque semper manebit eadem utcunque haec sex corpora motum communicent atque inter se concurrant, modo nullum externum accedat. Semper enim erit perinde quoad directionen ac si libra ut 1 celeritate ut 8 feratur versus plagam H in parallela ipsi AH, et secundum hanc aestimationem etiam continue moles horum sex corporum versus plagam A promovebitur, in summa scilicet, licet particulatim considerando aliqua minus progrediantur, imo contraria directione ferantur.

VI.

PRINCIPIUM QUODDAM GENERALE NON IN MATHEMATICIS TANTUM SED ET PHYSICIS UTILE, CUJUS OPE EX CONSIDERATIONE SAPIENTIAE DIVINAE EXAMINANTUR NATURAE LEGES, QUA OCCASIONE NATA CUM R. P. MALLEBRANCHIO CONTROVERSIA EXPLICATUR, ET QUIDAM CARTESIANORUM ERRORES NOTANTUR.

Principium hoc Ordinis Generalis ab infinito habet originem, magnique in ratiocinando usus est, quanquam non satis usurpatum nec pro amplitudine sua cognitum. Absolutae est necessitatis in Geometria, sed tamen succedit et in Physica, quoniam suprema Sapientia, quae fons est rerum, perfectissimum Geometram agit et Harmoniam observat, cujus pulchritudini accedere nihil potest. Itaque principio hoc saepe utor tanquam probatione sive examine ad Lydium quendam lapidem, unde statim et solo exteriore aspectu multarum opinionum male cohaerentium detegi potest falsitas, etsi ad interiorem discussionem non perveniatur. Enuntiari potest hoc modo: Cum differentia duorum casuum infra omnem quantitatem datam diminui potest in datis sive positis, necesse est, ut simul diminuatur infra omnem quantitatem in quaesitis sive consequentibus quae ex positis resultant. Vel ut loquar familiarius: Cum casus (vel data) continue sibi accedunt, ita ut tandem alter in alterum abeat, oportet in consequentiis sive eventibus (vel quaesitis) respondentibus idem fieri. Quod pendet a principio adhuc generaliore: Datis nimirum ordinatis etiam quaesita esse ordinata. Sed regula illustranda est exemplis facilibus, quo melius appareat ratio ipsam in usum transferendi. Scimus per umbram seu projectionem circuli fieri Conicas, et projectionem rectae esse rectam. Si jam recta circulum in duobus punctis secet, etiam recta projecta circuli projectionem, verbi gratia Ellipsin aut Hyperbolam in duobus punctis secabit. Cum igitur porro recta circulum secans sic moveri possit, ut magis magisque extra circulum egrediatur, et puncta intersectionum sibi magis magisque appropinquent, donec tandem coincidant, quo casu recta circulo egredi incipit sive ipsum tangit; sequitur puncta intersectionum rectae et circuli projecta seu

puncta intersectionum rectae projectae cum projectione circuli et ipsa sibi continue accedere, et postremo punctis intersectionum veris in se invicem abeuntibus, etiam projecta in se invicem abire, ac proinde ubi recta circulum tangit, etiam rectam ab ipsa projectam tangere lineam conicam a circulo projectam. Quod est inter primaria Conicorum theoremata, et non ambagibus et apparatu figurarum, aut in unaquaque Conica separatim, ut solet apud alios, sed facili mentis intuitu generaliter hoc modo demonstratur. Sumamus aliud ex Conicis exemplum. Constat casum vel suppositionem Ellipseos accedere posse casui Parabolae, quantum quis volet, sic ut discrimen inter Ellipsin et Parabolam fieri possit minus discrimine quovis dato, modo concipiatur alterum focum Ellipseos a foco nobis propiore satis longe removeri, ita enim radii ab illo remoto foco venientes a parallelis tam parum different, quam quis volet, et proinde vi principii nostri omnia Theoremata Geometrica de Ellipsi in universum applicari poterunt ad Parabolam, siquidem haec consideretur tanquam Ellipsis foci alterius infinite abhinc distantis aut (si quis infiniti expressionem vitare velit) tanquam figura ab Ellipsi quadam minus differens quantitate data.

Idem jam Principium ad Physica transferamus. Exempli causa Quies considerari potest ut celeritas infinite parva, vel ut tarditas infinita. Et proinde quicquid verum est de celeritate et tarditate in universum, id verum etiam suo modo esse debet de quiete seu tarditate summa, et proinde qui regulas motus et quietis dare vult, meminisse debet, regulam quietis sic oportere concipi, ut possit intelligi velut corollarium quoddam sive casus specialis regulae motus. Quodsi id non succedat, certissimum signum est, regulas esse male constitutas et minime inter se consentientes. Sic et aequalitas considerari potest ut inaequalitas infinite parva, ubi discrimen est dato quovis minus. Neglectu hujus quoque observationis Cartesius, magni licet ingenii vir, in suis naturae legibus constituendis lapsus est. Nec repetam nunc quidem alium fontem errorum ejus, supra a me obstructum, ex confusione virium et quantitatis motuum ortum. Tantum ostendam quomodo in principium nostrum hic expositum peccaverit. Sumamus exempli causa regulam motus primam et secundam, quas in Principiis Philosophiae tradidit; has ajo inter se pugnare. Secunda enim ejus regula est: Si duo corpora B et C sibi directe

occurrant aequali velocitate, et B sit major quam C, reflecti quidem C priore sua velocitate, B autem continuare motum, atque ita ambo conjunctim ire in plagam quo prius tendebat B. Sed secundum regulam ejus primam B et C aequalia et aequivelocia directe sibi occurrentia reflectentur ambo ea qua venerant velocitate*). Hanc ego differentiam inter duos istos casus aequalitatis et inaequalitatis nego esse rationi consentaneam, cum enim inaequalitas corporum magis magisque decrescere possit tandemque fieri quantumlibet parva, ita ut discrimen inter suppositiones duas inaequalitatis et aequalitatis minus sit quovis dato; igitur vi nostri principii et luminis adeo naturalis, discrimen inter effectus vel consequentias harum suppositionum etiam deberet continue decrescere et tandem quovis dato fieri minus. Verum si secunda regula aeque vera esset ac prima, contrarium eveniret. Nam ex secunda regula augmentatio utcunque parva corporis B, antea aequalis ipsi C, facit in effectibus non discrimen utcunque parvum et paulatim crescens pro crescente augmentatione, ut debebat, sed statim maximum, ita ut hac additione indefinite parva ex absoluta reflexione ipsius B, tota sua velocitate, fiat absoluta continuatio ipsius B etiam tota sua velocitate, qui est ingens saltus ab uno extremo ad aliud, cum ratio jubeat, aucta nonnihil magnitudine atque adeo potentia ipsius B reflecti ipsum seu repelli paulo minus quam ante, ita ut augmento vel excessu imperceptibili ac pene nullo existente, etiam repulsae diminutio sit exigui admodum et pene nullius momenti. Similes incongruitates in reliquis Cartesii regulis deprehendentur, quas nunc non persequar.

Porro cum R. P. Mallebranchius in libro de Inquirenda Veritate praeclara non pauca monuerit, et nonnulla Philosophiae Car-

---

*) Anmerkung Leibnizens:

$_1B$ $_2B\,_2C$ $_1C$
○ ○○ ○ Cartes. reg. 1.
$_3B$ $_3C$

$_1B$ $_2B\,_2C$ $_1C$
○ ○° ○° Cartes. reg. 2.)
$_3B\,_3C$

$_1B$ et $_1C$ situs ante concursum, $_2B$ et $_2C$ in concursu, $_3B$ et $_3C$ aequali tempore a concursu quo prius $_1B$ et $_1C$ ante concursum. Et erit hoc loco secundum Cartes. $_1B\,_2B$ aequ. $_1C\,_2C$ aequ. $_2B\,_3B$ aequ. $_2C\,_3C$.

tesianae dogmata correxerit, et regulas quoque motuum aliter constituendas censuerit, operae pretium tunc putavi annotare nec ab ipso hujusmodi incongruitates esse vitatas, quod feci eo libentius, quia nec ipsum pro suo quem profitetur veritatis amore aegre laturum judicavi, et vel hinc apparere censui, quam utile sit haec admoneri, ut imposterum caveantur quae viris etiam ingeniosissimis imposuere. Sic igitur ille, ut in exemplo sententiam ejus proponamus: Sit Corpus B ut 2 celeritate ${}_1B_2B$ ut 1, Corpus vero C ut 1 celeritate ${}_1C_2C$ ut 2, quae directe sibi occurrant. Statuit ambo reflecti qua quodque venerat celeritate. Sed si vel celeritas vel magnitudo alterutrius corporis velut B tantillum augeatur, vult ambo corpora simul in eam plagam ire, in quam prius tenderat solum B, et quidem velocitate communi, quae erit circiter quatuor tertiarum seu quae velocitatem ipsius B priorem uno triente excedat, si scilicet ponamus augmentationem potentiae circa B factam tam esse exiguam, ut priores numeri sine errore consideratu digno retineri possint *). Sed quis credat ob mutationem tam exiguam, quam quis velit in suppositione respectu ipsius B factam, exsurgere magnam adeo differentiam in eventu, ita ut omnis cesset reflexio, et maximo saltu ab uno extremo ad aliud facto, B quod prius reflectebatur velocitate ut 1, nunc ideo tantum quia tantillum potentiae adjectum est, non modo non reflectatur, sed etiam progrediatur celeritate ut $\frac{4}{3}$. Ubi illud quoque prorsus παράλογον accidit, ut ictus contrarius alterius corporis C non repellat aut retardet corpus B ullo modo, sed ipsum quodammodo ad se attrahat, et conatum ejus contrarium sibi augeat, cum enim B ferretur ante ictum celeritate ut 1, nunc post occursum contrarii corporis C continuat motum velocitate ut $\frac{4}{3}$. Quod puto digeri non posse. Haec cum ergo monuissem in Replicatione mea ad Dn. Abb. D. C. Novell. Reip. lit. mense Febr. an. 1687 p. 139, respondit R. P. Mallebranchius April. ejusdem anni p. 48 laudabili admodum ingenuitate, agnoscens animadversionem hanc meam aliquid in recessu habere, paradoxas autem istas consecutiones ex hypothesi a

---

*) ${}_1B$ □ ${}_2B$ □ ${}_2C$ ○ ${}_1C$ ○ ${}_3B$ ${}_3C$ ${}_1B$ □ ${}_2B$ □ ${}_2C$ ○ ${}_3B$ □ ${}_3C$ ○ ${}_1C$ ○ } Mallebranch.

ut jam tum pro falsa agnita et refutata esse natas; sese enim in suo illo Inquirendae Veritatis opere libro 6. cap. ult. ratiocinatum esse ex hypothesi corporum perfecte durorum, cum tamen duritiem non nisi a circumstantium compressione, nec ut Cartesius putaverat, à quiete partium oriatur, ac proinde nunquam sit perfecta et absoluta. Si tamen ponatur Deum creare corpora perfecte dura, et simul servare eandem quantitatem motus (quod ipsi R. Patri dubium, si meam demonstrationem expendisset, verisimile amplius videri non potuisset) vel potius (ut ego sentio) eandem quantitatem virium, pro certo habet illas prope incredibiles consequentias a me notatas debere sequi aut necesse esse, ut vel corpus debilius C determinationem fortioris B mutet vel corpus debilius a fortiore, majore quam ipsius est fortioris velocitas repellatur sine interventu Elastri, quorum utrumque parum admodum credibile ipsi videtur. Quibus a me nonnihil responsum est Novell. Resp. Lit. Jun. 1687 pag. 745. Et quidem ut taceam multo omnibus aliis incredibilius, ut corpus B attrahatur a contrario C. Ubi semel admiserimus, quod vult R. P. Malebranchius non corpus tardius alteri dare motum suo celeriorem, sed Deum esse qui occasione situs corporum ipsos motus in iis producit, non apparet, cur idem sine ullo elaterio non possit corpori C motum dare, quem conservandarum virium ratio dictat, celeriorem motu ipsius B, cujus occasione id facit, imo hoc ipsum ad confirmandam sententiam quae corpori in corpora veram actionem negat, prodesse potest. Utcunque autem sit, si Deus vellet perfecte dura creare corpora, caeteris omnibus ut nunc servatis, sequetur ex Principio nostro Generali, rationi consentaneum fore ut ipsa dura Leges corporum quae revera in Mundo reperiuntur, hoc est Elasticorum sequantur, concipiendo dura ut Elastica perfectissima, quae in sese restituendo sint promtitudinis infinitae.

Et quanquam fatendum sit a voluntate divina pendere motuum leges, ut R. P. Mallebranchius notat, ipsa tamen voluntas divina ordinem ac rationem quandam servat in omnibus quae agit, ut consentiant inter se, nec proinde Principium Generale hic traditum in legibus naturae constituendis infringet aut male colligata atque hiantia fundamenta ponet. Et si evenirent in natura hujusmodi irregularitates quales admiserat R. Pater, credo Geometras prope non minus attonitum iri, quam si proprietates Ellipseos ad Parabolam praescripto supra modo accommodari non possent. Sed

nunquam opinor ullum exemplum occurret in natura, quod usque adeo offendat rationem. Porro quae in ipsis principiis simplicibus abstractisque paraloga sunt, ea in concretis naturae phaenomenis sunt tantum paradoxa. Nam in corporibus compositis fieri potest, ut exigua mutatio in datis magnam faciat effectus mutationem in eventibus, ita scintillula ingenti massae pulveris pyrii injecta urbem evertere potest, et videmus elaterium aliquod densum, exiguo obstaculo detentum, levi attactu liberari et magnam vim exercere; sed haec tantum abest ut contraria sint principio nostro, ut potius ex ipsis principiis generalibus recipiant explicationem. Sed in principiis ac rebus simplicibus nihil tale admitti potest, alioqui natura non foret effectus sapientiae infinitae.

Hinc jam apparet (paulo melius quam vulgo proponitur), quomodo vera Physica ex divinarum perfectionum fontibus sit haurienda. Deus enim est ultima ratio rerum, et Dei cognitio non minus est principium scientiarum quam essentia ejus et voluntas principia sunt rerum. Quo quisque in Philosophia interiore versatior est, eo facilius hoc agnoscit. Sed pauci hactenus ex consideratione Divinarum proprietatum veritates ducere potuerunt alicujus in scientiis momenti. Erunt fortasse qui speciminibus istis excitabuntur. Sanctificatur Philosophia, rivulis ex sacro Theologiae naturalis fonte in eam immissis. Et tantum abest, ut causae finales rejici debeant, et consideratio Mentis sapientissimae propter bonum agentis, atque adeo ut bonitas et pulchritudo res sit arbitraria vel ad nos tantum relata et a Deo removenda, quorum illud Cartesio, hoc Spinosae visum est, ut contra potius ex consideratione Mentis potiora Physicae dogmata deducantur. Hoc jam praeclare a Socrate in Phaedone Platonis annotatum est, in Anaxagoram invehente aliosque Philosophos nimium Materiales, qui cum agnovissent principium intelligens materia superius, non utuntur tamen ejus ope, cum philosophandum est de universo, et ubi ostendendum erat, Mentem omnia optime ordinare eamque esse rationem rerum omnium quas producere scopo suo conveniens judicavit, confugiunt potius ad motus atque concursus brutorum corporum, confundentes conditiones et instrumenta cum causa vera. Perinde est (ait Socrates) ac si quis rationem redditurus, cur ego hic sedeam in carcere fatalem haustum expectans, nec potius ad Boeotios aliosve populos fugam, ut poteram, ceperim, hoc ideo fieri diceret, quod ossa et tendines et musculos habeam, ita flexos, quemadmodum ad

sedendum opus. Profecto nec ossa ista nec musculi hic forent, nec me vos sedentem videretis, nisi Mens judicasset dignius esse Socrate subire quod Leges jubent. Meretur ille Platonis locus integer legi, habet enim cogitationes solidas et perpulchras. Interea non nego, Effectus naturae et posse et debere explicari Mathematice vel Mechanice principiis semel positis, modo fines usque admirabiles Providentiae ordinatricis non negligantur. Sed principia Physicae atque ipsius adeo Mechanicae non possunt amplius ex legibus mathematicae necessitatis deduci, sed ad rationem earum reddendam oportet supremam intelligentiam vocari in partes. Hoc demum est conciliare pietatem rationi, quod si considerasset Henricus Morus aliique viri docti ac pii, minus metuissent, ne quid religio detrimenti caperet ex incrementis Philosophiae Mechanicae vel Corpuscularis. Quae tantum abest, ut a Deo et Substantiis immaterialibus avertat, ut potius adhibitis correctionibus et omnibus bene consideratis, multo melius quam antea factum est a philosophis nos ad sublimiora illa ducat.

VII.

SCHEDIASMA DE RESISTENTIA MEDII ET MOTU PROJECTORUM GRAVIUM IN MEDIO RESISTENTE.

Galilaeus cum regulas motus projectorum investigavit, resistentiam medii seposuit; fecere idem Torricellius et qui secuti sunt, fatentur tamen aliqui defectum doctrinae atque hinc orientes in praxi errores. Blondellus quidem in libro de Jactu Bomborum putat, impune posse negligi hanc considerationem, sed argumenta ejus non sufficiunt, nec experimenta affert in magno sumta. Caeterum difficilior est rei Geometrica investigatio, quam ut ab illis, doctissimis licet viris, expectari facile et sperari potuerit, nondum inventis tunc aut certe non satis passim notis subsidiis. Et tamen leges projectorum verae et calculus experimentis consentiens, magno in balistica et pyrobolicis usui futurus, hinc potissimum pendere videntur.

Ego jam dudum inclytae Academiae Scientiarum Regiae Parisinae, cum apud illos agerem, de hoc argumento ratiocinationes communicavi et modum aestimandi ex parte tradidi, speciesque distinxi. Duplex igitur medii resistentia est, una absoluta, altera respectiva, quae plerumque concurrere solent. Absoluta resistentia est, quae tantundem virium mobilis absorbet, sive id parva sive magna velocitate moveatur, dummodo moveatur, et pendet a medii glutinositate; perinde enim est ac si partes filamentis motu mobilis perrumpendis connexae essent inter se. Eadem locum habet in frictionibus superficierum asperarum, in quibus mobilia decurrunt: nam obstacula sunt abradenda vel saltem deprimenda, ad instar pilorum elasticorum sese postea rursus erigentium; ad elastrum autem deprimendum vel ad filum rumpendum eadem semper vis impendenda est, nec refert quae sit agentis velocitas. Resistentia respectiva oritur ex medii densitate, et major est pro majori mobilis velocitate, eo ipso quod partes medii agitandae sunt a penetrante, movere autem aliquid est vim impendere, et eo majorem, quo major communicatur motus medii partibus, hoc est, quo celerior est motus penetrantis. Et resistentia fluidi quiescentis erga corpus incurrens est aequalis vi fluidi incurrentis in corpus quiescens, quae major est, cum celerior est motus fluidi, ut videmus corpora vento et aqua moveri, imo jactu aquae satis impetuoso gravia sustineri, licet hic quoque sese absoluta resistentia immisceat, a qua tamen abstrahendus est animus, cum respectivam aestimamus, quasi nulla esset medii tenacitas. Hoc quoque interest inter duas resistentiarum species, quod absoluta habet quodammodo rationem superficiei mobilis sive contactus, respectiva vero soliditatis. Utrobique paradoxum occurrit, quod mobile penetrans in medium uniforme ubique resistens, nunquam quidem ab eo redigetur ad quietem: a resistentia tamen absoluta corpus, quod vi semel concepta movetur neque aliunde acceleratur, certum habet limitem spatii sive penetrationis in medium, ita ut semper ad ipsum recta accedat, nunquam tamen eo perveniat, quam voco penetrationem maximam exclusivam, seu maximam quae non; a resistentia vero respectiva corpus uniformiter acceleratum (ut grave descendens) habet certum limitem velocitatis, seu maximam velocitatem exclusivam, ad quam semper accedit (ut postremo differentia sit insensibilis), ita tamen ut eam nunquam perfecte attingat. Et haec velocitas est illa ipsa, qua motum fluidum

(si instar jactus aquae) posset grave sustinere, ne descendere incipiat. Utriusque motus leges primarias hic exponemus, quantum ista brevitas patitur, nam cuncta distincte tradere res integri tractatus foret.

De resistentia absoluta.

Artic. I.

Si motus mobilis sit per se uniformis et a medio aequaliter secundum spatia retardatus.

1) Decrementa virium sunt proportionalia incrementis spatiorum (quae est **hypothesis** casus praesentis).

2) Velocitates sunt proportionales spatiis, perditae percursis, residuae adhuc percurrendis. Ponantur incrementa spatii esse aequalia, erunt decrementa virium aequalia (per proposit. 1); jam si ejusdem mobilis decrementa virium sint aequalia, etiam decrementa velocitatum sunt aequalia*) (sunt enim vires ut quadrata velocitatum, aequalibus autem existentibus quadratis etiam aequalia sunt latera); itaque elementa velocitatum amissarum sunt ut elementa spatiorum percursorum, residuarum ut adhuc percurrendorum. Ergo velocitates sunt ut spatia. Nempe si in fig. 15 velocitas initio sit AE, spatium integrum in medio percurrendum sit recta AB, ejus pars jam percursa AM, adhuc percurrenda MB, velocitas residua MC (vel AF), amissa FE, erit ECB recta.

3) Si spatia residua (MB vel LT) sint ut numeri, tempora insumta (ML vel BT) erunt ut logarithmi; nam si elementa spatii sint progressionis Geometricae, erunt spatia residua ejusdem progressionis Geometricae, ergo (per 2) etiam velocitates residuae, ergo incrementa temporis sunt aequalia, ergo tempora ipsa progressionis Arithmeticae.

4) Mobile M nunquam absolvit spatium percurrendum integrum (AB), etsi semper accedat ad limitem (B), patet enim BT esse asymptoton lineae logarithmicae AL, scilicet ipsius AB numerus hic est 0, ipsius 0 logarithmus est infinitus. Interim in praxi motus fit tandem insensibilis, ut et distantia a B; praeterea nullibi datur medium perfecte uniforme.

5) Si mobile moveatur motu composito ex uniformi et ae-

---

*) Vergl. hierbei die Bemerkung Leibnizens in seinem Briefe an Joh. Bernoulli vom $\frac{6}{16}$ März 1696. Bd. III. S. 255.

qualiter a medio secundum spatia retardato, seu si mobile (M) feratur in regula rigida (AB) secundum hypothesin praesentem (uti revera sic satis contingit ob frictionem, si globus in regula rigida horizontali recta moveatur), ipsa vero interim regula (AB) sibi parallela manens, uniformiter mota, uno extremo (B) incedat in aliqua recta (BT), describet lineam logarithmicam (AL). Generaliter enim, si mobile feratur motu composito ex uniformi et alterius legis, describet lineam ordinatis suis et abscissis relationem inter tempora et spatia dictae legis exprimentem, quod est memorabile Theorema. Habemus etiam hinc modum Physicum construendi Logarithmos, quos Geometria communis exacte construere non potest.

Artic. II.

Si motus sit a gravitate acceleratus et a medio aequabiliter secundum loca retardatus.

1) Est hoc loco hypothesis prima eadem cum hypothesi unica praecedenti, nempe decrementa virium (id est hoc loco velocitatum) facta a resistentia absoluta, sunt proportionalia incrementis spatiorum.

2) Accessiones velocitatum a gravitate sunt proportionales incrementis temporis, estque hypothesis altera ex natura motus gravium.

3) Dantur rectae proportionales temporibus insumtis, a quarum unaquaque si detrahatur recta aequalis respondenti spatio percurso a puncto mobili, residua recta erit proportionalis velocitati acquisitae; nam velocitates impressae sunt proportionales temporibus (per 2), amissae spatiis percursis (per 1 hic, ad modum proposit. 2 articuli praecedentis), ergo residuae acquisitae differentiis.

4) Si velocitatum acquisitarum complementa ad maximam sint ut numeri, tempora insumta erunt ut logarithmi. Nempe, retenta figura priore 15, sit AB velocitas maxima (quam mox patebit esse talem exclusive), AM acquisita, BM vel TL adhuc acquirenda seu complementum acquisitae BT, et ML tempus impensum; ex prop. 1 et 2 reperietur, temporum BT incrementis sumtis aequalibus, velocitatum AM incrementa esse ipsis BM proportionalia. Ergo si BT logarithmi, erunt BM numeri.

5) Hinc patet (ad modum proposit. 4 articuli praecedentis)

ad velocitatem maximam AB nunquam perveniri, seu esse talem exclusive.

Artic. III.

Si grave projiciatur in medio resistentiam habente absolutam,

hoc est si feratur motu composito ex motibus duorum articulorum praecedentium. In figura 16 ponatur grave in A positum, conans descendere in AG et parallelis, projici ex A directione AMB angulo quocunque MAG, et describere lineam AP; sit AB via maxima exclusiva articuli primi; compleantur parallelogramma MAGP, BAGK.

1) Recta horizonti perpendicularis (BK) per (B) limitem penetrationis (seu per punctum, ad quod mobile motu per se uniformi, in medio uniformi et absolute resistente, in recta AM progrediens, penetrare non potest) est lineae projectionis asymptotos, seu lineae duae, videlicet recta BK et curva AP utcunque continuatae sibi quidem semper accedunt, sese tamen nunquam attingunt, quia mobile ad partes B in AB et parallelis eodem modo tendit motu composito, ac si secundum solius articuli primi leges sine gravitate ferretur, nunquam ergo pervenit ad B vel aliquod ei aequivalens punctum in recta BK utcunque producta.

2) Linea projectionis non est ex numero conicarum, non utique parabola, circulus, aut ellipsis, hae enim carent asymptotis, non hyperbola, neque enim hic ut in hyperbola per punctum aliquod in recta utrinque indefinita BK sumtum duci potest adhuc alia linea asymptotos.

3) Datur certa quaedam linea simplex (hoc est paraboloeides aut hyperboloeides), cujus abscissae si sint proportionales spatiis (BM) residuis ad limitem penetrationis (AB) projectioni praescriptum, ordinatae sunt proportionales velocitatibus adhuc deficientibus ad acquirendum limitem velocitatis descensui praescriptum: lineam simplicem hic intelligo, cujus ordinatae sunt in ratione quacunque multiplicata aut submultiplicata abscissarum. Itaque sensus est, velocitates descensui adhuc deficientes esse in ratione spatiorum adhuc limiti penetrationis deficientium, secundum certum aliquem numerum constantem multiplicata. Hoc ex eo demonstratur, quod ambo possunt intelligi progressionis Geometricae, si tempora insumta sint progressionis Arithmeticae per art. 1 prop. 3 et art. 2 prop. 4, et utrobique numeri maximi lo-

garithmus est 0, minimi infinitus, per art. 1 prop. 4 et art. 2 prop. 5. Cum numerus rationem multiplicans est rationalis, oritur aliqua linea paraboloeides aut hyperboloeides Geometriae communis. Porro hic numerus quibusdam experimentis inveniri potest.

4) Inveniri potest linea projectionis AP, seu relatio inter coordinatas AG spatium descensus et AM spatium progressionis per se uniformis. Nam art. 2 propos. 3 datur relatio simplex inter tempus insumtum, spatium descensu percursum AG, et velocitatem descensu acquisitam in G. In hac relatione pro tempore substituatur AM, ope relationis inter ipsa datae artic. 1 propos. 3, restat ergo relatio inter AG et AM, quae etsi sit transcendens, tamen nihil aliud supponit quam logarithmos.

Artic. IV.

De Resistentia Medii respectiva, si motus per se uniformis a medio uniformi retardatur proportione velocitatis,

quemadmodum fit considerata tantum medii densitate, nulla habita ratione tenacitatis.

1) Diminutiones velocitatum sunt in ratione composita velocitatum praesentium et incrementorum spatii. Quae est hypothesis casus praesentis.

2) Si velocitates residuae (ut MB seu LT fig. 15) sint ut numeri, spatia percursa (BT seu ML) sunt ut logarithmi. Eodem modo demonstratur ut art. 1 prop. 3, si pro spatiis illic positis ponas velocitates, et pro temporibus spatia.

3) Si tempora insumta, certa quantitate constanti aucta, sint ut numeri, spatia percursa sunt ut logarithmi. Nam spatii elementis existentibus aequalibus, temporis elementa sunt reciproce ut velocitates, hoc est crescunt progressione Geometrica (per praeced.), ergo (ex quadratura logarithmicae) tempora constanti quantitate aucta etiam sunt progressionis Geometricae.

4) Hinc etiam tempora constanti quantitate aucta sunt reciproce ut velocitates residuae. Patet ex consideratione praecedentis. Constans autem illa quantitas est tempus finitum, quo percurreretur spatium infinitum, si prima velocitas ea proportione cresceret, qua nunc a resistentia medii diminuitur. Et potest inveniri haec quantitas duobus experimentis, ex collatis spatiis et

temporibus, imo unico experimento, in quo considerantur tempus et velocitas.

Artic. V.

Si motus a gravitate acceleratus a medio uniformi retardetur proportione velocitatis.

1) Est hoc loco hypothesis 1. eadem cum hypothesi unica articuli praecedentis.

2) Et hypothesis 2. est eadem cum hypothesi 2. articuli secundi.

3) Resistentia est ad impressionem novam, a gravitate eodem temporis elemento factam (seu diminutio velocitatis ad accessionem) ut quadratum excessus velocitatis maximae super acquisitam est ad quadratum maximae*). Nam ex prop. 4 (hic) sequitur resistentias esse in composita ratione elementorum temporis et quadratorum velocitatum; at impressiones novae sunt ut elementa temporis per prop. 2, et in casu maximae velocitatis diminutio et accessio velocitatis sunt aequales. Unde facile concluditur propositum.

4) Si rationes inter summam et differentiam velocitatis maximae et minoris assumtae sint ut numeri, tempora, quibus assumtae velocitates sunt acquisitae, erunt ut logarithmi. Cum enim incrementum velocitatis sit differentia inter impressionem et resistentiam, hinc (ex praecedenti) statim sequitur impressionem esse ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis assumtae. Ex quo scimus per quadraturas, summam impressionum inde ab initio, quae est proportionalis insumto tempori, esse ut logarithmum, si numerus sit qualem in propositione hac enuntiavimus.

5) Velocitas maxima est talis exclusive, seu nunquam attingi potest, etsi ad eam intervallo inassignabili accedatur. Nam cum ratio est aequalitatis, seu cum velocitas assumta est incipiens sive infinite parva, tempus (adeoque logar.) est 0, et proinde cum sit ratio infinita, hoc est cum velocitas assumta est ipsamet maxi-

*) In der Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens (Bd. II. S. 75) findet sich folgende Verbesserung dieser Stelle: Resistentia est ad impressionem gravitatis ut quadratum velocitatis acquisitae ad quadratum velocitatis maximae.

ma, logarithmus rationis est infinitus. Itaque ad eam velocitatem acquirendam infinito tempore opus foret. Inveniri autem potest maxima velocitas per duo experimenta, collatis temporibus et velocitatibus, item per prop. 3.

6) Si velocitates acquisitae (AV fig. 17) sint ut sinus (arcuum HK portionum quadrantis circularis HKB), erunt spatia percursa (AS) ut logarithmi sinuum complementi (VK), posito radium seu sinum totum (AB) esse ut velocitatem maximam. Nam ex hypothesi 2. sequitur incrementa spatii esse in ratione composita velocitatum acquisitarum et impressionum gravitatis, sed impressiones sunt ad incrementa velocitatis, ut enunciatum est in demonstratione prop. 4. Hinc sequitur incrementa spatii esse in ratione composita incrementorum velocitatis et velocitatum directa, et reciproca ratione excessus quadrati maximae velocitatis super quadratum assumtae. Unde scimus per quadraturas sequi propositum. Patet hinc logarithmum sinus totius esse 0 (cum velocitas est 0), at evanescentis sinus complementi (cum velocitas est maxima) logarithmum seu spatium esse infinitum, unde rursus patet velocitatem maximam nusquam attingi.

7) Si spatia percursa (AS fig. 17) sint ut logarithmi sinuum (KV arcuum BK), tempora insumta sunt ut logarithmi rationum, quae sunt inter sinum versum (BV) et (VD) complementum ejus ad (BD) diametrum seu duplum sinus totius (AB). Patet ex collatis propositionibus 4 et 6.

Artic. VI.

Si grave projiciatur in medio uniformi resistentiam habente respectivam,

seu feratur motu composito ex motibus duorum articulorum praecedentium. Sit (fig. 17) projectio in AM et parallelis, descensus in AS et parallelis, angulo MAS quocunque; locus motus compositi P habetur completo parallelogrammo MASP.

1) Inveniri potest linea projectionis (seu relatio inter AS et AM). Ex spatio AS datur (per artic. 5 prop. 6) AV velocitas descendendi in S seu in P. Ex hac (per prop. 7) datur tempus insumtum. Ex hoc (per artic. 4 prop. 3) datur spatium AM seu SP. Ex datis igitur lineis abscissis AS dantur ordinatae SP, ac proinde lineae puncta inveniri possunt.

2) Inveniri potest lineae tangens, seu ipsius mobilis in ea

directio. In AM sumatur MN, quae sit ad MP, ut velocitas in M, inventa per tempus assumtum (artic. 4. prop. 4) ad velocitatem in S, inventam per idem tempus (artic. 5 prop. 4), et juncta NP tanget curvam in puncto P. Et cum eadem sit velocitas descendendi in P, quae in S, itemque velocitas persequendi projectionis directionem in P, quae in M, patet qualis illa sit in puncto P; patet etiam qua vi mobile in ipsa linea projectionis feratur, velocitas tota in linea est ad velocitatem descensus, ut NP ad MP.

Possemus etiam in unum componere resistentiam absolutam ex articulis 1, 2, 3, et respectivam ex artic. 4, 5, 6, uti certe revera concurrunt in natura, sed prolixitas hic vitanda est. Multa etiam hinc deduci possent praxi accommodata, sed nobis nunc fundamenta Geometrica jecisse suffecerit, in quibus maxima consistebat difficultas. Et fortassis attente consideranti vias quasdam novas vel certe satis antea impeditas aperuisse videbimur. Omnia autem respondent nostrae Analysi infinitorum, hoc est calculo summarum et differentiarum (cujus elementa quaedam in his Actis dedimus), communibus quoad licuit verbis hic expresso.

Occasione eorum quae de usu pulveris pyrii mechanico in Lipsiensibus pariter Actis ac Roterodamensibus Novellis vidi, dicam virum celeberrimum Thevenotium, quod mihi constet, de tali re cogitasse ad Hydraulica negotia, unde et mihi aliqua porro meditandi materia nata est, quam comprehendat *Περιάνδρου Κλεόϑης*. Quod obiter hic adjicere volui.

Additio *).

Postquam Meditationes quasdam de Medii resistentia in his Actis publicavi, venere in manus meas, quae Viri in Mathematica naturae cognitione praecellentissimi Hugenius et Newtonus in novissimis operibus de eodem argumento sunt commentati. Animadverti autem eos respectivam tantum (quam voco) resistentiam attigisse, qualem scilicet sentit corpus in liquido tenacitate notabili carente, velut in aëre, non vero absolutam, quae oritur a tenacitate medii aut asperitate superficiei contactus attritum efficiente, inter quas multum interesse jam tum ostendi, cum respectiva

---

*) Dieser Zusatz findet sich in Act. Erudit. Lips. an. 1691.

habeat respectum ad celeritatem mobilis, eaque aucta crescat, absoluta non item. Circa respectivam video nos iisdem fundamentis inaedificasse, etsi prima fronte aliud videri possit. Ipsi enim statuunt resistentias in duplicata ratione velocitatum, ego vero absolute loquendo resistentias (quas decrementis velocitatis a medii densitate ortis existimo) esse dixi in ratione composita velocitatum et elementorum spatii, quae scilicet velocitatibus respondentibus decurri inchoantur; unde jam elementis temporis sumtis aequalibus (quo casu elementa spatii decurrenda velocitatibus proportionalia sunt) utique resistentiae erunt in duplicata ratione velocitatum, quod etiam annotaveram sub art. 5 prop. 3. Nec dissentit conclusio circa relationem inter tempora et velocitates in gravi per medium descendente. Hanc enim ad sectorem hyperbolicum reduxit Newtonus, ad seriem infinitam Hugenius, quam invenit pendere a quadratura hyperbolae, nos ad logarithmos artic. 5 prop. 4 tanquam perfectissimum talia exprimendi modum praebentes. Nempe sit velocitas maxima a, praesens v, tempus t fiet $= \int dv . aa : \overline{aa - vv}$, quo posito t sunt ut logarithmi rationum $a + v$ ad $a - v$; fiet etiam $t = \frac{1}{1} v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 + \frac{1}{7} v^7$ etc. posita a unitate. Circa compositionem motus in medio resistente rectissime monuit celeberrimus Hugenius, eam non ita simpliciter locum habere, ut in motu libero, itaque ea quam exposui articulo 3 et 6 ita accipienda est verbi gratia, ac si corpus aliquod moveatur in medio secundum unam legem motus compositi, et huic ipsi corpori (veluti navi) sit inclusum medium ejusdem cum priori naturae, in quo iterum aliud corpus feratur, cujus jam motus ex communi navis motu et ipsius proprio velut projectionem faciet ita se habentem ut descripsimus.

VIII.

TENTAMEN DE MOTUUM COELESTIUM CAUSIS*).

(Erste Bearbeitung.)

Constat Veteres, praesertim qui Aristotelis et Ptolomaei placita secuti sunt, nondum agnovisse naturae majestatem,

*) Leibniz befand sich zu Rom, als er die obige Abhandlung schrieb. Wie aus dem Nachstehenden hervorgeht, scheint er anfangs

quo nostro demum et praecedenti aevo praesentius illuxit, ex quo Copernicus pulcherrimam Pythagoreorum Hypothesin, quam ipsi

---

die Absicht gehabt zu haben, dieselbe in Rom drucken zu lassen; es schwebte ihm indess das Schicksal Galiläi's lebhaft vor Augen und vorsichtig beschloss er zunächst über die Stimmung des kirchlichen Censurgerichts Genaueres zu erfahren. Er verfasste deshalb das folgende Promemoria und übersandte es einem Priester, um dessen Urtheil zu vernehmen.

Praeclarum Ciceronis dictum est: opinionum commenta delet dies, naturae judicia confirmat. Id nos circa optimam Copernicani Systematis explicandi rationem experimur, quae novis quotidie inventis eo pervenit, ut jam vix quisquam sit Insignium Mathematicorum qui non praeferendam fateatur si per superiorum decreta censuramque liceret. Unde jam olim Christophorus Clavius Societatis Jesu, Mathematicus celebris, cum senex nova per Telescopium inventa coelestia et imprimis lunulas Joviales intellexissit, actum esse exclamavit de recepta Astronomia. Videbat enim vim maximam Analogiae, quam postea nova reperta Annuli et Comitum Saturni tam manifestam reddidere, ut vix ei amplius resisti possit. Et Claudius des Chales ex eadem Societate Jesu, vir in his studiis versatissimus, ingenue fassus est vix aliam Hypothesin sperari posse, quae phaenomenis tam pulchre pleneque satisfaciat. Absurdam quidem in Philosophia non esse, ut olim credebatur, concedent hodie plerique omnes. Ricciolus ipse omnia argumenta vulgaria contra eam allata rejecit excepto uno quod sumitur a motu gravium aut projectorum, sed hoc quoque nullam vim habere Gassendus, P. Stephanus de Angelis et Joh. Alphonsus Borellus evicerunt.

Quod attinet ad argumenta Theologica ab auctoritate Scripturae Sacrae sumta fassi sunt P. Mersennus Ordinis Minimorum, et P. Honoratus Fabrius Soc. Jesu nihil prohibere quin Ecclesia post agnitam aliquando ab eruditis rationum naturalium efficaciam pondusque maximum declaret, verba autorum sacrorum sic posse accipi, ut accipiuntur verba omnium Mathematicorum qui licet novum systema sequantur, semper tamen dicent et dicere debent solem occidere et oriri, quoties theoriam planetarum non ex professo tractant.

Interim merito censurae subjecta est eorum audacia, qui minus reverenter de Scriptura Sacra sentire visi sunt, quasi scilicet non satis accurate sit locuta eo praetextu quod finis ejus non sit docere philosophiam sed viam salutis. Honorificentius enim et verius est agnoscere in sacris libris omnes scientiarum quoque thesauros reconditos latere, et de rebus non minus Astronomicis quam aliis omnibus rectissima dici, quod salvo etiam novo systemate asseri potest. Nam autores sacri aliter sine absurditate non poterant sensa animi exprimere, etiamsi millies verum ponatur systema novum. Et ridiculus foret Historicus,

fortasse magis suspicione libasse quam recte constituisse videntur ex tenebris revocatam, summa simplicitate phaenomenis satisfacere

---

quamcunque demum in Mathematicis opinionem secutus, qui non solem sed terram oriri aut occidere dictitaret.

Ut vero res intelligatur exactius, sciendum est Motum ita sumi ut involvat aliquid respectivum et non posse dari phaenomena ex quibus absolute determinetur motus aut quies; consistit enim motus in mutatione situs seu loci. Et ipse locus rursus aliquid relativum involvit, etiam ex Aristotelis sententia, qui definivit superficie ambientis Hinc in rigore omne systema defendi potest, ita ut ne ab angelo quidem Metaphysica certitudine aliquid absoluti determinari inde queat quoniam ipsa conditio est legum motus, ut omnia eodem modo in phaenomenis eveniant, nec dijudicari possit utrum et quatenus corpus aliquod datum quiescat vel moveatur, nisi rationem majoris explicabilitatis habendo, idque adeo verum est ut ne vis quidem agendi verum sit motus absoluti indicium. Ut si globus in navi manu impulsus currat per lineam rectam horizontalem a prora versus puppim, et navis interim aequali celeritate moveatur directione contraria a puppi ad proram, nullus erit motus globi absolute loquendo, absolute enim globus in eodem manet loco spatii ut apparet spectanti ex ripa immota, et tamen globus habet motum respectivum, relatione eorum quae sunt in navi, et licet (ex hypothesi) quiescat absolute et in rigore, tamen aliquid in navi oppositum frangere potest. Itaque quemadmodum quoties de navi et his quae in ea fiant, ut de impressione manus in globum aut ruptura alicujus vasis vitrei quod in navi forte globo obstiterat agitur, omnes vere et recte dicemus, globum moveri; respectu vero ripae rursus vere et recte dicemus globum quiescere, cum semper eundem situm ad omnia puncta immota in ripa assumta servet, ita eodem modo dicemus veram esse non minus Doctrinam Sphaericam Ptolemaei, quam Doctrinam Theoricam Copernici; et tam ineptum esse motum terrae infercire explicationi sphaericae primi mobilis quam ineptum est per innumeros epicyclos et eccentricos theoriam planetarum tradere velle, quam Hypothesis nova vel potius antiqua renovata mira simplicitate intellectui exhibet. Unde patet, qui Hypothesin Copernici veram esse dicunt, sic sentire vel intelligi debere, ut sit optima hoc est ad explicanda phaenomena aptissima, neque aliam in re quae sua natura respectum involvit veritatem locum habere. Atque his recte perceptis quilibet salva censura novum systema sequi et summo gradu Copernicanus esse potest.

Id vero agnosci tandem aliquando summe interest et pietatis et sententiarum quas consistere non posse cum obsequio fidei quidam non sine alterutrius injuria suspicantur, quibus obsistendum esse merito decrevit postremum Concilium in Laterano, sufficit igitur eorum damnare audaciam, qui scripturam minus accurate de rebus astrorum locutam dicere non verentur, de cetero aliis autem . . . .

. . libertate statuendi de veriore Hypothesi; ex quo res ipsa osten

ostendit. Tycho autem Copernicum in summa systematis (excepta Solis Terraeque transpositione) secutus, ad observationes solito accuratiores animum adjecit, et orbium solidorum apparatum minime decorum ex coelo sustulit. Etsi autem ex Herculeis laboribus suis non satis fructus perceperit, partim praejudiciis quibusdam exclusus, partim morte praeventus, divina tamen providentia factum est, ut observationes ejus et molimina venerint in manus

---

it, systema novum uti hodie explicatur neque absurdum esse neque temere defendi, sed maximis niti argumentis, et salva fide catholica multos viros magnos doctrinae et pietatis ad ejus defensionem inclinare. Atque hac sane censurae pristinae explicatione tolletur scrupulus qui multos male habet et praeveniet censores revocandi aliquando dicti necessitatem, neque sese torrenti proficientis seculi ac publicae auditorum voci frustra opponent. Quia et falsis eorum improperationibus occurretur qui veritatem apud Catholicos opprimi jactant et evectas mentes ab Ecclesiae communione avertunt. Idem honoris Italiae interest; ita enim praestantia ingenia non ibi minus quam apud alias gentes frui poterunt luce seculi, et praeclaris inventis incumbere, quae nunc ab aliis praeripiuntur. Neque aliam ego summorum virorum mentem esse puto, penes quos Censurae vis est.

Et vero tanta est Copernicani systematis praestantia ad explicanda phaenomena planetarum, ut fatendum sit Astronomum qui id non intelligeret in meris tenebris versaturum, tantaque in dies nova inventa ejus harmoniam et simplicitatem confirmant, ut verendum sit ne qui ipso uti nolunt, ipsius Dei gloriam obscurent, ademta agnoscendae in tantis operibus admirabilis ejus sapientiae occasione. Id vero nunc maxime (si unquam) dici posse videtur, ex quo nova quaedem lux exorta est de physicis motus planetarii causis, cujus leges universales mira felicitate explicantur motu composito ex circulatione harmonica circa solem et solicitate quadam velut magnetica planetae ad solem tanquam gravis ad centrum, quae non tam per modum hypotheseos assumuntur quam per regressum geometricum ex phaenomenis demonstrantur, ut jam de optimo systemate vix amplius dubitandi locus aliquis relictus esse videatur.

Das Vorstehende übersandte Leibniz mit folgendem Schreiben:

Ad R. P. B.

Rogo Reverentiam Vestram ut mihi sententiam suam circa doctrinam in charta adjecta expressam schedula consignet, utrum nimirum qui ita statuit, in censuras contra absolutam Copernicani Systematis defensionem latas non incurrat. Quod vel ideo expeto, quia fieri potest, ut mihi quam primum circa haec publicandi aliquid occasio nascatur. Atque ita R^{a} V^{a} fortasse non me tantum, sed et rem publicam literariam obstringet. Me commendo R^{ae} V^{ae} servus humillimus

G. L.

Viri incomparabilis Johannis Kepleri, cui fata servaverant, primus publicaret mortalibus.

Jura poli, rerumque fidem legesque Deorum.

Hic ergo invenit, quemlibet planetam primarium orbitam desc bere ellipticam, in cujus altero focorum sit Sol, ea lege motus, ut diis e Sole ad planetam ductis, areae sempei abscindantur tempori proportionales. Idem deprehendit, plures planetas ejusdem system habere tempora periodica in sesquiplicata ratione distantiarum n diarum a Sole, mire profecto triumphaturus, si scivisset (qu praeclare Cassinus notavit) etiam Jovis et Saturni satelli easdem leges servare respectu suorum planetarum primariora quas isti erga Solem. Sed tantarum tamque constantium veritat causas dare nondum potuit, tum quod Intelligentiis aut sympath rum radiationibus inexplicatis haberet praepeditam mentem, t quod nondum illius tempore Geometria interior et scientia motu eo, quo nunc, profecissent. Aperuit tamen et rationibus indag dis aditum. Nam ipsi primum indicium debetur verae causae g vitatis, et hujus naturae legis, a qua gravitas pendet, quod co pora rotata conantur a centro recedere per tangentem, et ideo in aqua festucae vel paleae innatent, rotato vase aqua in vortic acta, festucis densior atque ideo fortius quam ipsae excussa a n dio, festucas versus centrum compellit, quemadmodum ipse dise duobus et amplius locis in Epitome Astronomiae exposuit, qua quam adhuc subdubitabundus et suas ipse opes ignorans, nec sa conscius quanta inde sequerentur tum in Physica tum speciatim Astronomia. Sed his deinde egregie usus est Cartesius, e more suo autorem dissimulavit. Miratus autem saepe sum, qu Cartesius legum coelestium a Keplero inventarum rationes redd ne aggressus est quidem, quantum constat, sive quod non sa conciliare posset cum suis placitis, sive quod felicitatem inve ignoraret nec putaret tam studiose a natura observari.

Porro cum minime physicum videatur, imo nec admiran Dei machinamentis dignum, Intelligentias peculiares itine directrices assignare sideribus, quasi Deo deessent rationes eade corporeis legibus perficiendi, et vero orbes solidi dudum a explosi, sympathiae autem et magnetismi aliaeque id genus a strusae qualitates aut non intelligantur, aut ubi intelliguntur, co porearum impressionum effectus apparituræ judicentur; nihil ali ego quidem superesse judico, quam ut causa motuum coelestiu

a motibus aetheris, sive ut astronomice loquar, ab orbibus deferentibus quidem, sed fluidis, oriuntur. Haec sententia vetustissima est, etsi neglecta: nam Leucippus Epicuro prior eam adeo expressit, ut in systemate formando ipsum adhibuerit δίνης (verticis) nomen, et audivimus, quomodo Keplerus motu aquae in verticem actae gravitatem adumbraverit. Et ex itinerario Monconisii discimus, jam tum Torricellii fuisse sententiam (et ut suspicor, etiam Galilaei, cujus iste discipulus erat), totum aetherem cum planetis motu Solis circa suum centrum acti circumagi, ut aqua a baculo in medio vasis quiescentis circa suum axem rotato, et ut paleas seu festucas aquae innatantes, ea citra medio propiora celerius circumire. Sed haec generaliora non difficulter in mentem veniunt. Nobis vero propositum est, ipsas motuum leges distinctius explicare, quod longe altioris indaginis esse res docebit. Et cum aliqua in eo genere nobis lux affulserit, et inquisitio commode admodum et naturaliter successisse videatur, in eam spem erectus sum, veris motuum coelestium causis a nobis appropinquatum esse.

1) Ut ergo rem ipsam aggrediamur, ante omnia demonstrari potest, secundum naturae leges omnia corpora, quae in fluido lineam curvam describunt, ab ipsius fluidi motu agi. Omnia enim curvam describentia ab ea recedere conantur per rectam tangentem (ex natura motus), opportet ergo esse quod coerceat. Nihil autem contiguum est nisi fluidum (ex hypothesi) et nullus conatus coercetur nisi a contiguo et moto (ex natura corporis), fluidum ergo ipsum in motu esse necesse est.

2) Hinc sequitur, planetas moveri a suo aethere, seu habere orbes fluidos deferentes vel moventes. Omnium enim consensu lineas curvas describunt, nec possibile est phaenomena explicari, suppositis motibus rectilineis tantum. Itaque (per praecedentem) moventur a fluido ambiente. Idem aliter demonstrari potest ex eo quod motus planetae non est aequabilis, seu aequalibus temporibus aequalia spatia describens. Unde etiam necesse est, ut a motu ambientis agatur.

3) Circulationem voco Harmonicam, si velocitates circulandi, quae sunt in aliquo corpore, sint radiis seu distantiis a centro circulationis reciproce proportionales, vel (quod idem) si ea proportione decrescant velocitates circulandi circa centrum, in qua crescunt distantiae a centro, vel brevissime, si crescant velo-

citates circulandi proportione viciniarum. Ita enim si radii seu distantiae crescant aequabiliter seu arithmetice, velocitates decrescent harmonica progressione. Itaque non tantum in arcubus circuli, sed et in curva alia quacunque describenda circulatio harmonica locum invenire potest. Ponamus mobile M (fig. 18) ferri in curva quavis $_3M\,_2M\,_1M$ (vel $_1M\,_2M\,_3M$) et aequalibus temporis elementis describere elementa curvae $_3M\,_2M$, $_2M\,_1M$, intelligi potest motus compositus ex circulari circa centrum aliquod ut $\odot$ (velut $_3M\,_2T$, $_2M_1T$) et rectilineo velut $_2T\,_2M$, $_1T_1M$ (sumtis $\odot_2T$ aequ. $\odot_3M$, et $\odot_1T$ aequ. $\odot_2M$), qualis motus intelligi etiam potest dum regula seu recta rigida indefinita $\odot n$ movetur circa centrum $\odot$, et interim mobile M movetur in recta $\odot n$. Nihil autem refert, quis sit motus rectilineus, quo ad centrum acceditur vel ab ipso receditur (quem voco motum paracentricum), modo circulatio ipsius mobilis M, ut $_3M_2T$, sit ad circulationem aliam ejusdem mobilis, $_2M_1T$, ut $\odot_1M$ ad $\odot_2M$, hoc est si circulationes aequalibus temporum elementis factae sint reciproce ut radii. Cum enim arcus isti elementarium circulationum sunt in ratione composita temporum et velocitatum, tempora autem elementaria assumantur aequalia, erunt circulationes ut velocitates, itaque velocitates reciproce ut radii erunt, adeoque circulatio dicetur harmonica.

4) Si mobile feratur circulatione Harmonica (quicunque sit motus Paracentricus), erunt areae radiis e centro circulationis ad mobile ductis abscissae temporibus insumtis proportionales, et vicissim. Cum enim arcus Circulares Elementares, ut $_1T\,_2M$, $_2T\,_3M$, sint incomparabiliter parvi respectu radiorum $\odot_2M$, $\odot_3M$, erunt differentiae inter arcus et sinus eorum rectos (ut inter $_1T\,_2M$ et $_1D\,_2M$) ipsismet differentibus incomparabiles, ac proinde (per Analysin nostram infinitorum) habentur ea pro nullis, et arcus et sinus pro coincidentibus. Ergo $_1D_2M$ ad $_2D_3M$ ut $\odot_3M$ ad $\odot_2M$, seu $\odot_1M$ in $_1D_2M$ aequ. $\odot_2M$ in $_2D_3M$, ergo et aequantur horum dimidia triangula nempe $_1M_2M\odot$ et $_2M_3M\odot$, quae cum sint elementa areae $A\odot MA$, itaque aequalibus ex hypothesi sumtis temporis elementis, etiam areae elementa sunt aequalia et vicissim, ac proinde areae $A\odot MA$ sunt temporibus, quibus percursi sunt arcus AM, proportionales.

5) Assumsi inter demonstrandum quantitates incomp

rabiliter parvas, verbi gratia differentiam duarum quantitatum communium ipsis quantitatibus incomparabilem. Sic enim talia, ni fallor, lucidissime exponi possunt. Itaque si quis nolit adhibere infinite parvas, potest assumere tam parvas quam sufficere judicat, ut sint incomparabiles et errorem nullius momenti, imo dato minorem, producant. Quemadmodum terra pro puncto, seu diameter terrae pro linea infinite parva habetur respectu coeli, sic demonstrari potest, si anguli latera habeant basin ipsis incomparabiliter minorem, angulum comprehensum fore recto incomparabiliter minorem, et differentiam laterum fore ipsis differentibus incomparabilem; item differentiam sinus totius, sinus complementi et secantis fore differentibus incomparabilem; item differentiam chordae, arcus et tangentis. Unde cum hae sint ipsae infinite parvae, erunt differentiae infinities infinite parvae, et sinus versus etiam erit infinities inifinite parvus adeoque recto incomparabilis. Et infiniti sunt gradus tam infinitorum, quam infinite parvorum. Et possunt adhiberi triangula communia inassignabilibus illis similia, quae in Tangentibus, Maximisque et Minimis, et explicanda curvedine linearum usum habent maximum; item in omni pene translatione Geometriae ad naturam, nam si motus exponatur per lineam communem, quam dato tempore mobile absolvit, impetus seu velocitas exponetur per lineam infinite parvam, et ipsum elementum velocitatis, quale est gravitatis solicitatio, vel conatus centrifugus, per lineam infinities infinite parvam. Atque haec Lemmatum loco annotanda duxi pro Methodo nostra quantitatum incomparabilium et Analysi infinitorum tanquam Doctrinae hujus novae Elementa.

6) Ex his jam consequens est, planetas moveri circulatione Harmonica, primarios circa Solem, satellites circa suum primarium, tanquam centrum. Radiis enim ex centro circulationis ductis areas describunt temporibus proportionales (per observationes). Ergo temporum elementis positis aequalibus est triang. ${}_1M_2M\odot$ aequ. triang. ${}_2M_3M\odot$. et proinde $\odot_1M$ ad $\odot_2M$ est ut ${}_2D_3M$ ad ${}_1D_2M$, quod est circulationem harmonicam esse.

7) Consentaneum etiam est, Aetherem seu Orbem fluidum cujusque planetae moveri circulatione harmonica; nam supra ostensum est, nullum corpus in fluido sponte moveri linea curva, erit ergo in aethere circulatio, eamque rationis est credere consentientem circulationi planetae, ita ut sit etiam

circulatio aetheris cujusque planetae harmonica, hoc est si orbis planetae fluidus in innumeros orbes circulares concentricos exiguae crassitudinis cogitatione dividatur, quilibet suam habebit propriam circulationem tanto velociorem proportione, quanto quisque erit propior Soli. Sed hujus motus in aethere alias exactius reddetur ratio.

8) Itaque ponemus planetam moveri motu duplici seu composito ex circulatione harmonica orbis sui fluidi deferentis et motu paracentrico, quasi cujusdam gravitatis seu attractionis, hoc est impulsus versus Solem seu planetam primarium. Facit autem circulatio aetheris, ut planeta circuletur harmonice, non velut motu proprio, sed quasi tranquilla natatione in fluido deferente cujus motum sequitur, unde nec impetum circulandi velociorem retinet, quem habuerat in orbe inferiore seu propiore, sed eum elanguescentem, dum superiores (majori velocitati quam suae resistentes) trajicit, continue deponit, et sese orbi quem accedit insensibiliter accommodat. Vicissim dum a superioribus ad inferiores tendit, impetum eorum accipit. Idque eo facilius fit, quia ubi semel consensit planetae motus cum praesentis orbis motu, postea a proximis parum differt.

9) Explicata circulatione harmonica, veniendum est ad Motum paracentricum planetarium, ortum ex impressione excussoria circulationis et attractione solari inter se compositis. Liceat autem appellare attractionem, licet revera sit impulsus, utique enim Sol quadam ratione tanquam magnes concipi potest; ipsae autem actiones magneticae a fluidorum impulsibus haud dubie derivantur. Unde etiam vocabimus Solicitationem Gravitatis, concipiendo planetam tanquam grave tendens ad centrum, nempe Solem. Pendet autem species orbitae a speciali lege attractionis. Videamus igitur quae lex attrahendi lineam ellipticam faciat, idque ut consequamur, in Geometriae adyta parumper ingrediamur necesse est.

10) Cum omne mobile a linea curva quam describit recedere conetur per Tangentem, licebit conatum hunc vocare excussorium, ut in motu fundae, cui aequalis requiritur vis, quae mobile coërcet, ne evagetur. Hunc conatum metiri licebit perpendiculari ex puncto sequenti in tangentem puncti praecedentis inassignabiliter distantis. Et cum linea est circularis, hanc vim celeberrimus Hugenius,

qui primus eam considerationem tractavit, appellavit **centrifugam**. Omnis autem conatus excussorius est respectu velocitatis seu impetus ex conatu repetito aliquandiutino concepti infinite parvus, quemadmodum et solicitatio gravitatis, quae homogeneae cum ipso est naturae. Unde et eadem causa utriusque confirmatur. Nec proinde mirum est, quod voluit Galilaeus, percussionem esse infinitam comparatione gravitatis nudae seu, ut ego loquor, simplicis conatus, cujus vim ego **mortuam** vocare soleo, quae agendo demum concipiens impetum repetitis impressionibus viva redditur.

11) **Conatus centrifugus** seu conatus excussorius circulationis **exprimi potest per PN sinum versum anguli circulationis** $_1M \odot N$ (vel quod ob differentiam radiorum inassignabilem eodem redit, per $_1D_1T$), nam sinus versus aequatur perpendiculari ex uno extremo arcus circuli puncto in tangentem alterius ductae, qua conatum excussorium expressimus in praecedenti (potest etiam exprimi conatus centrifugus per PV, differentiam radii et secantis ejusdem anguli, cujus differentiae discrimen a sinu verso est **infinitesies infinities infinite parvum** adeoque nullissimum respectu radii). Hinc porro cum sinus versus sit in duplicata ratione chordae seu arcus inassignabilis sive velocitatis, sequitur **conatus centrifugos mobilium aequabili motu aequales circulos describentium esse in duplicata ratione velocitatum, inaequales describentium esse in ratione composita ex quadrata velocitatum et reciproca radiorum***).

12) **Conatus centrifugi mobilis harmonice circulantis sunt in ratione radiorum reciproca triplicata.** Sunt enim (per praecedentem) in reciproca radiorum et directa duplicata velocitatum, id est (quia velocitates circulationis harmonicae sunt reciproce ut radii) duplicata reciproca radiorum; ex simplice autem reciproca et duplicata reciproca fit reciproca triplicata. Pro calculo sit ϑa planum constans aequale semper duplo triangulo elementari $_2M\,_3M \odot$ seu rectangulo $_2D\,_3M$ in $\odot_3M$ radium seu r, ergo $_2D\,_3M$ erit $\vartheta a : r$ seu ϑa divis. per r, jam $_2D\,_2T$ conatus centrifugus aequ. $_2D\,_3M$ quadr. divis. per bis $\odot\,_3M$, ergo aequ. $\vartheta\vartheta aa : 2r^3$.

---

*) Siehe in Bezug auf die num. 11, 12, 15, 21, 27, 30 die Abhandlung: Illustratio Tentaminis de motuum coelestium causis.

13) Si motus paracentricus (recessus a centro Ω, vel ad ipsum accessus) sit aequabilis, et circulatio harmonica, linea motus ΩMG erit spiralis ex centro Ω incipiens, cujus ea est proprietas, ut segmenta ΩGMΩ sint pro- portionalia radiis, id est hoc loco chordis ΩG ex centro eductis, sunt enim tam areae, hoc est segmenta, quam (ob aequa- bilem recessum) radii temporibus proportionales. Multae sunt aliae notabiles hujus spiralis proprietates, nec difficilis constructio. Imo generalis datur methodus in circulatione Harmonica si ex radiis dentur tempora, aut velocitates paracentrici motus, aut saltem elementa impetuum seu solicitationes gravitatis, construendi lineas saltem suppositis quadraturis.

14) Solicitatio paracentrica, seu gravitatis vel levitatis exprimitur recta ${}_3ML$ ex puncto curvae ${}_3M$ .i. puncti praecedentis inassignabiliter distantis ${}_2M$ tangentem ${}_2ML$ (pro- ductam in L) acta, radio praecedenti ⊙${}_2M$ (ex centro ⊙ in punc- tum praecedens ${}_2M$ ducto) parallela.

15) In omni circulatione harmonica elementum impetus paracentrici (hoc est incrementum aut decrementum velocitatis descendendi versus centrum vel ascendendi a centro) est differentia vel summa solicitationis paracen- tricae (hoc est impressionis a gravitate vel levitate, aut causa simili factae) et dupli conatus centrifugi (at ipsa circula- tione harmonica orti), summa quidem, si levitas adsit; differentia si gravitas: ubi praevalente gravitatis solicitatione crescit descen- dendi, vel decrescit ascendendi velocitas, ut praevalente dupl[o] conatu centrifugo, contra. Ex ${}_1M$ et ${}_3M$ normales in ⊙${}_2M$ sint ${}_1MN$ et ${}_3M{}_2D$; cum ergo triangula ${}_1M{}_2M$⊙ et ${}_2M{}_3M$⊙ sint aequalia ostensa ob circulationem harmonicam, erunt (ob basin communem ⊙${}_2M$) et altitudines ${}_1MN$ et ${}_3M{}_2D$ aequales. Jam sumta ${}_2MG$ aequali L_3M, jungatur ${}_3MG$ parallela ipsi ${}_2ML$; igitur congrua erunt triangula ${}_1MN{}_2M$ et ${}_3M{}_2DG$, et erit ${}_1M{}_2M$ aequ. G_3M, et N_2M aequ. G_2D. Porro in recta ⊙${}_2M$ (si opus producta, quod semper subintelligo) sumatur ⊙P aequ. ⊙${}_1M$, et ⊙${}_2T$ aequ. ⊙${}_3M$, erit P_2M differentia inter radios ⊙${}_1M$ et ⊙${}_2M$, et ${}_2T{}_2M$ differentia inter radios ⊙${}_2M$ et ⊙${}_3M$. Jam P_2M aequ. (N_2M seu) $G_2D + NP$, et ${}_2T{}_2M$ aequ. ${}_2MG + G_2D - {}_2D{}_2T$, ergo P_2M - ${}_2T{}_2M$ (differentia differentiarum) erit $NP + {}_2D{}_2T - {}_2MG$, hoc e[st] (quia NP et ${}_2D{}_2T$ sinus versi duorum angulorum et radiorum i[n]

comparabiliter differentiae coincidunt) hic ${}_2D_3T - {}_2MG$. Jam differentia radiorum exprimit velocitatem paracentricam, differentia differentiarum exprimit elementum velocitatis paracentricae. Est autem ${}_2D_3T$ vel NP conatus centrifugus circulationis, quippe sinus versus (per 11) et ${}_2MG$ seu ${}_2ML$ est solicitatio gravitatis (per praecedentem). Itaque elementum velocitatis paracentricae aequatur differentiae inter duplum conatum centrifugum NP seu ${}_2D_3T$ et simplicem solicitationem gravitatis G_2M aut (quod eodem modo concluditur) summae ex duplo conatu centrifugo et simplici solicitatione levitatis.

16) Datis incrementis aut decrementis velocitatis ascendendi aut descendendi, datur solicitatio gravitatis levitatisve, aut vice versa. Patet ex praecedenti, nam conatus centrifugus semper dari censetur, cum sit in ratione triplicata reciproca radiorum (per 15).

17) Aequalibus temporum elementis incrementa angulorum circulationis harmonicae sunt in ratione duplicata reciproca radiorum. Nam circulationes sunt in ratione composita angulorum et radiorum, et circulationes elementares, cum sint harmonicae, sunt in ratione reciproca radiorum, ergo anguli elementares sunt in ratione radiorum reciproca duplicata. Tales sunt fere motus apparentes diurni ex Sole spectati (dies enim hic sufficienter exiguae sunt partes temporis, inprimis pro planetis remotioribus), qui erunt circiter in ratione reciproca quadratorum distantiae, ita ut in distantia dupla tantum quarta pars anguli eodem temporis elemento absolvatur, in tripla tantum nona.

18) Si ellipsis describatur circulatione mobilis harmonica circa focum tanquam circulationis centrum, erunt inter se haec tria: circulatio ${}_2T_3M$ vel ${}_2D_3M$ (haec enim comparabiliter non differunt), velocitas paracentrica ${}_2D_3M$, et velocitas ipsius mobilis (ex ipsis composita) in ipsa orbita elliptica, nempe ${}_2M_3M$, respective ut haec alia tria: axis transversus BE, media proportionalis inter differentiam et summam distantiae focorum inter se F☉ et differentiae ☉φ distantiarum puncti orbitae ${}_3M$ a focis, ac denique dupla media proportionalis inter ☉${}_3M$ et F${}_3M$ distantias ejusdem puncti a duobus focis. Eadem haec suo modo et in hyperbola vera sunt. In parabola quantitatibus quae ibi infinitae sunt evanescentibus, fient circulatio, velocitas paracentrica, et velocitas ex ipsis composita, quae est in ipsa orbita respective,

ut latus rectum, media proportionalis inter latus rectum et excessum radii super radium omnium minimum (qui est quarta pars lateris recti) et denique dupla media proportionalis inter radium et latus rectum. Horum veritas ex communibus conicorum elementis derivari potest, si ponatur rectam $_3MR$ curvae (vel ejus tangenti) perpendicularem in MR Axi $A\Omega$ occurrere in R, et in eam ex focis normales agi FQ, $\odot$H; patet $\odot$H, H$_2$M, $_2$M$\odot$ esse ipsis $_1$M $_2$D, $_2$D $_3$M, $_1$M $_3$M, hoc est velocitati paracentricae, circulationi et velocitati in ipsa orbita proportionales. Sufficit igitur ostendi latera trianguli $_2$MH$\odot$ esse inter se, ut enuntiavimus. Quod facilius fiet, considerando triangula $_2$MQF et $_2$MH$\odot$ esse similia, et praeterea esse F$_2$M ad $\odot_2$M ut FR ad $\odot$R, unde per analysin communem propositum concludetur. Sequitur hinc, permutatis licet focis, ut alter pro altero centrum circulationis harmonicae attractionisque fiat, eandem quae ante manere rationem circulationis et velocitatis paracentricae in quovis puncto.

19) Si mobile quod gravitatem habet, vel ad centrum aliquod trahitur, qualem planetam respectu Solis ponimus, feratur in ellipsi (aut alia sectione coni) circulatione harmonica, sitque in foco ellipseos centrum tam attractionis quam circulationis, erunt attractiones seu gravitatis solicitationes, ut quadrata circulationum directe, seu ut quadrata radiorum sive distantiarum a foco reciproce. Hoc ita invenimus non ineleganti specimine nostri calculi differentialis vel analyseos infinitorum. $A\Omega$ sit q; $\odot$F, e; BE, b (hoc est $\sqrt{qq-ee}$), $\odot_2$M radius r; $\odot\varphi$ (seu $\odot_2$M$-$F$_2$M) $2r-q$ seu per compendium p; et latus rectum WX sit a aequ. bb : q. Duplum elementum areae seu duplum triangulum $_1$M$_2$M$\odot$ quod semper aequale est, sit ϑa, posito a latere recto et ϑ repraesentante elementum temporis semper aequale; et $_2$D$_3$M circulatio erit $\vartheta a : r$ (vid. jam supra 12); porro differentia radiorum $_2$D$_2$M vocetur dr, et differentia differentiarum ddr. Per praecedentem autem est dr (seu $_2$D$_2$M) ad $\vartheta a : r$ (seu ad $_2$D$_3$M) ut $\sqrt{ee-pp}$ ad b. Ergo $brdr = \vartheta a\sqrt{ee-pp}$, quae est aequatio differentialis. Hujus autem aequatio differentio-differentialis (secundum leges calculi a nobis alias in Actis istis explicati) est $b\,dr\,dr + b\,r\,ddr = -2pa\vartheta dr : \sqrt{ee-pp}$, quarum duarum aequationum ope tollendo dr, ut restet tantum ddr, fiet $ddr = bbaa\vartheta\vartheta - 2aaqr\vartheta\vartheta, : bbr^3$, unde habetur propositum. Nam

ddr, velocitatis paracentricae elementum, est differentia inter $bba\vartheta\vartheta : bbr^3$, hoc est $aa\vartheta\vartheta : r^3$, qui est duplus conatus centrifugus (per 12 supra) et inter $2aaqr\vartheta\vartheta : bbr^4$, hoc est (quia $bb : q = a$) $2a\vartheta\vartheta : rr$; oportet ergo (per 15) ut $2a\vartheta\vartheta : rr$ sit solicitatio gravitatis, quae ducta in constantem $a : 2$ dat $aa\vartheta\vartheta : rr$, quadratum circulationis. Sunt ergo solicitationes gravitatis ut quadrata circulationis directe, et proinde ut quadrata radiorum reciproce. Eadem conclusio et in hyperbola et parabola succedit, maxime autem in circulo qui est simplicissima ellipsis. Ratio autem discriminis inter has conicas sectiones, et quando circuli et ellipses prae aliis generentur, infra apparebit.

20) Planeta idem attrahitur a Sole diversimode, et quidem in duplicata ratione viciniarum, ita ut idem duplo vicinier quadruplo fortius, triplo vicinier noncuplo fortius ad descendendum versus Solem nova quadam impressione perpetuo sollicitetur. Patet ex praecedenti, posito Planetam ellipsin describere, ac circulari harmonice, ac praeterea continuo impelli versus Solem. Video hanc propositionem jam tum innotuisse etiam viro celeberrimo Isaaco Newtono, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non possim judicare, quomodo ad eam pervenerit.

21) Patet etiam solicitationem gravitatis in Planetam esse ad conatum Planetae centrifugum (seu excussorium ab ipsa circulatione harmonica eum rapiente in orbem atque adeo excutere conante profectum) ut distantia praesens a Sole ad quartam partem lateris recti ellipseos planetariae, seu ut r ad $a : 4$, ac proinde rationes ipsae gravitatis ad conatum centrifugum sunt planetae distantiis a Sole proportionales.

22) Velocitas planetae circa Solem ubique major est velocitate paracentrica, hoc est accedendi ad Solem vel ab eo recedendi. Cum enim sit circulatio ad paracentricam ut b ad $\sqrt{ee - pp}$ (per 18, adde calculum ad 19), erit major illa quam haec, si $bb + pp$ major quam ee, quod utique fit, cum bb major quam ee, seu b axis transversus quam e distantia focorum. Id vero in ellipsibus planetariis nobis notis semper contingit, quae non usque adeo a circulis differunt.

23) In Aphelio A et Peripelio Ω sola est circulatio sine accessu et recessu, in Perihelio maxima, in Aphelio minima.

In media autem planetae distantia a Sole (quae est in ipsis extremis axis transversi B et E) velocitas accessus recessusve est ad circulationem in ratione distantiae inter focos ad axem transversum, seu e ad b. Ibi enim p evanescit.

24) Maxima est planetae velocitas accedendi ad Solem vel ab eo recedendi, cum W⊙ vel X⊙, distantia planetae a Sole, est aequalis dimidio ellipseos lateri recto, tunc enim (per 19 vel 21) fit $ddr = o$, cum $r = a : 2$. Itaque si ex Sole tanquam centro, dimidio latere recto ⊙W tanquam radio, describatur circulus, is ellipsin planetae in duobus punctis maximae paracentricae velocitatis W et X secabit, quae in uno ut W erit accedendi, in altero X recedendi. Minima sive nulla est in Aphelio et Perihelio, sive in ellipsis utroque vertice A et Ω.

25) Semper in ellipsi, adeoque et semper in planeta conatus centrifugus recedendi a Sole, seu conatus excussorius circulationis harmonicae, minor est solicitatione gravitatis, seu attractione centrali Solis. Est enim (per 21) attractio ad conatum centrifugum ut distantia a Sole seu foco ad quartam partem lateris recti, semper autem in ellipsi distantia a foco major quarta lateris recti parte.

26) Impetus quos planeta attractione Solis continuata, durante itinere concepit, sunt ut anguli circulationis, seu quos radii ex Sole ad primum et postremum itineris punctum ducti comprehendunt, sive ut motus apparens seu iter spectatum ex Sole. Sic impetus impressus durante itinere A_1M est ad impetum impressum durante itinere A_2M, ut angulus $A⊙_1M$ ad angulum $A⊙_2M$. Sunt enim angulorum incrementa ut impressiones gravitatis (per 17 et 19), ergo et summae summis proportionales, nempe anguli circulatione absoluti summis impressionum seu impetibus inde conceptis. Hinc in puncto W, ubi normalis ordinata ex Sole ellipsi occurrit, impetus inde ab Aphelio A conceptus, est dimidia pars impetus concepti ab Aphelio ad Perihelium; est autem ibi ⊙W distantia a Sole, ipsum dimidium latus rectum. Et impetus itinere quovis conceptus est ad conceptum semirevolutione, ut angulus circulationis ad duos rectos. Intelligo autem impetus a gravitate vel attractione impressos per se ac solos, non detractis nec computatis impetibus contrariis ab excussorio conatu impressis.

27) Sed operae pretium est distinctius ex causis assignatis

explicare *totam Planetae revolutionem gradusque accessus et recessus erga Solem.* Planeta igitur in maxima digressione A seu Aphelio positus minorem quidem et conatum centrifugum circulationis excutientis et attractorium gravitatis solicitantis experitur, quam si Soli propior esset. Est tamen in ea distantia, nempe in vertice remotiore a Sole, fortior gravitas quam duplus conatus centrifugus (per 21), quia $\odot$A distantia Aphelii seu verticis remotioris a Sole seu foco major est dimidio latere recto $\odot$W. Descendit itaque planeta versus Solem itinere AMEWΩ, et continue crescit descendendi impetus, ut in gravibus acceleratis, quam diu manet nova gravitatis solicitatio fortior duplo novo conatu centrifugo; tamdiu enim crescit impressio accedendi super impressionem recedendi, adeoque absolute crescit accedendi velocitas, donec in locum perveniatur, ubi aequantur duae illae novae contrariae impressiones, id est in locum W, ubi distantia a Sole $\odot$W aequatur dimidio lateri recto. Ibi ergo velocitas accedendi est maxima, et crescere desinit (per 24). Exinde autem etsi pergat planeta accedere ad Solem usque ad Ω, velocitas tamen accedendi rursus decrescit, praevalente conatu duplo centrifugo super gravitatis impressionem, idque tamdiu continuatur, donec impressiones centrifugae in unum collectae ab initio A hucusque, impressiones gravitatis etiam ab initio hucusque collectas praecise consumunt, seu quando totus impetus recedendi (conceptus ex singulis impressionibus centrifugis collectis) toti impetui accedendi (ex gravitatis impressionibus continue repetitis concepto) tandem aequatur, ubi cessat omnis accessio, atque is locus ipsum est Perihelium Ω, in quo Planeta est Soli maxime vicinus. Postea autem continuato motu, cum hactenus accesserit, nunc recedere incipit, tenditque ab Ω per X versus A. Nam duplus conatus centrifugus qui praevalere coeperat super gravitatem inde a W usque ad Ω, adhuc pergit praevalere ab Ω usque ad X, ac proinde cum ab Ω incipiat planeta quasi de novo moveri, quippe prioribus impetibus contrariis mutuo sublatis, praevalet etiam recessus inde ab Ω, et recedendi velocitas continue crescit usque ad X, sed incrementum tamen ejus seu nova impressio decrescit, donec ista nova impressio ad recedendum, seu duplus conatus centrifugus, novae impressioni ad recedendum seu gravitati iterum fit aequalis, nempe in X. Itaque in X est maxima recedendi velocitas. Et ex eo praevalet gravitas seu nova impressio accedendi, licet adhuc

satis diu praevaleat totus recedendi impetus seu summa omnium impressionum recedendi inde ab Ω acquisitarum, super totam impetum accedendi inde ab Ω denuo impressum. Sed cum tamen hic magis crescat quam ille, post X, tandem ei fit aequalis in A, ubi mutuo destruuntur et recessus cessat, id est reditur ad Aphelium A. Atque ita omnibus impressionibus pristinis contrariarum aequalium compensatione consumtis, res redit ad statum primum, atque omnia de integro perpetuis lusibus repetuntur, donec longa dies perfecto temporis orbe, rerum constitutioni mutationem notabilem afferat.

28) Habemus ergo in motu planetae elliptico sex puncta inprimis notabilia: quatuor quidem obvia, A et Ω Aphelii et Perihelii, itemque E et B mediae distantiae (nam ⊙B vel ⊙E est dimidius axis major AΩ, adeoque medium arithmeticum inter ⊙A maximam, et ⊙Ω minimam digressionem), et duo a nobis addita, W et X extrema lateris recti WX ad axem in foco ⊙ ordinatim applicati, quae sunt puncta maximae velocitatis, illud W recedendi, hoc X accedendi (per 24). Ubi etiam (per 26) impetus a continua gravitatis impressione conceptus ab A usque ad W praecise est dimidius ejus, qui toto descensu ab A usque ad Ω concipitur; similiter conceptus ab Ω usque ad X, dimidius ejus qui concipitur ab Ω usque ad A: et omnino impetus a gravitate concepti per AW, WΩ, ΩX, XA sunt aequales.

29) Tempus jam est, ut tradamus causas, quae speciem ellipseos Planetariae definiunt. Datur focus ellipseos ⊙, qui est locus Solis. Dato jam loco A, ubi Planetam Sol trahere incipit, velut maxima planetae distantia, datur remotior ab hoc foco ellipseos vertex. Data porro ratione gravitatis seu virtutis, qua Sol planetam trahere incipit, ad conatum centrifugum, qua ibi circulatio planetam excutere et a Sole repellere nititur, hinc datur et latus rectum ellipseos principale WX seu ordinatim applicata in foco ⊙. Nam ⊙A data, est ad ⊙W semilatus rectum, in ratione data attractionis Solaris ad duplum conatum centrifugum. Quodsi jam quarta pars lateris recti detrahatur a maxima digressione data A⊙, erit residuum ad A⊙ ut A⊙ ad AΩ: datur ergo AΩ major axis ellipseos seu latus transversum. Datis ergo punctis ⊙, A, W vel X, datur et Ω, atque hinc porro et C centrum ellipseos, et alter focus F, et axis transversus BE, adeoque ellipsis. Nec minus dantur omnia, si pro A initio daretur Ω.

30) Ex his simul patet, quomodo ellipsis, vel qui sub ea continetur circulus, non alia conica sectio, a planetis describatur. Et circulus quidem oritur, cum attractio gravitatis et dupla vis centrifuga a circulatione orta ab initio attractionis sunt aequales; ita enim aequales manebunt, nulla existente causa accessus aut recessus; sed cum initio (vel in statu destructorum priorum impetuum contrariorum accedendi recedendive, qui initio aequivalent, hoc est in Aphelio vel Perihelio) attractio et duplus conatus centrifugus sunt inaequales, modo (per 25) conatus centrifugus simplex sit minor attractione, describitur ellipsis; et praevalente attractione, initium est Aphelium, sin praevaleat duplus conatus centrifugus, est Perihelium. Si conatus centrifugus simplex attractioni sit aequalis, parabola; si major, hyperbola orietur, cujus focus intra ipsam sit Sol. Quod si Planeta non gravitate, sed levitate esset praeditus, nec traheretur, sed repelleretur a Sole, hyperbolae opposita orietur, cujus nempe focus extra ipsam Sol esset.

Duo jam in hoc argumento potissimum praestanda supersunt, unum, ut explicemus, quis motus aetheris planetas graves faciat seu versus Solem pellat, et quidem in duplicata ratione viciniarum; deinde quae sit causa comparationis motuum inter diversos planetas systematis ejusdem, ita ut tempora periodica sint in sesquiplicata ratione mediarum distantiarum, seu quod eodem redit, axium majorum ellipticorum: id est, distinctius explicari debet motus vorticis Solaris seu aetheris, systema unumquodque constituentis. Sed haec cum altius repetenda sint, brevitati hujus Schediasmatis includi non possunt, et quid nobis consentaneum visum sit, rectius separatim exponetur.

IX.

TENTAMEN DE MOTUUM COELESTIUM CAUSIS.

(Zweite Bearbeitung)

Constat Veteres, praesertim qui Aristotelis et Ptolemaei placita secuti sunt, nondum satis agnovisse naturae majestatem, quae

nostro demum et praecedenti aevo praesentius illuxit, ex quo repertum est, Hypothesin quae primarios Planetas circa solem agit phaenomenis pulchre satisfacere. Haec mirifice illustrata sunt Tychonis observationibus, quibus ille solito accuratioribus animum adjecit primus, et orbium solidorum apparatum minime decorum ex coelo sustulit. Etsi autem ex Herculeis laboribus suis non satis fructus perceperit, partim praejudiciis quibusdam exclusus, partim morte praeventus, divina tamen providentia factum est, ut observationes ejus et molimina venerint in manus Viri incomparabilis, cui fata servaverant ut jura poli rerumque fidem legesque Deorum primus publicaret mortalibus. Hic ergo invenit, quemlibet planetam primarium orbitam describere ellipticam, in cujus altero focorum sit Sol, ea lege motus, ut radiis e Sole ad planetam ductis, areae semper abscindantur temporibus proportionales. Idem deprehendit, plures planetas ejusdem systematis habere tempora periodica in sesquiplicata ratione distantiarum mediarum a Sole, mire profecte triumphaturus, si scivisset (quod praeclare Cassinus notavit) etiam Jovis et Saturni satellites easdem leges servare respectu suorum planetarum primariorum, quas isti erga Solem. Sed tantarum tamque constantium veritatum causas dare nondum potuit, tum quod Intelligentiis aut sympathiarum radiationibus inexplicatis haberet praepeditam mentem, tum quod nondum illius tempore Geometria interior et Scientia motuum eo quo nunc profecissent. Aperuit tamen et rationibus indagandis aditum. Nam ipsi primum indicium debetur usus physici ejus naturae legis, a qua vel pendet gravitas vel saltem mirifice illustratur, quod corpora rotata conantur a centro recedere per tangentem, et ideo si in aqua festucae vel paleae innatent, rotato vase aqua in vorticem acta, festucis densior atque ideo fortius quam ipsae excussa a medio, festucas versus centrum compellit, quemadmodum ipse diserte duobus et amplius locis in Epitome Astronomiae exposuit, quanquam adhuc subdubitabundus et suas ipse opes ignorans nec satis conscius quanta inde sequerentur tum in Physica tum speciatim in Astronomia. Sed his deinde egregie usus est Cartesius, etsi more suo autorem dissimularit. Miratus autem saepe sum, quod Cartesius legum coelestium a Keplero inventarum rationes reddere ne aggressus est quidem, quantum constat, sive quod non satis conciliare posset cum suis placitis, sive quod felicitatem inventi ignoraret nec putaret tam studiose a natura observari.

Porro cum minime physicum videatur, imo nec admirandis Dei machinamentis dignum, Intelligentias peculiares itineris directrices assignare sideribus, quasi Deo deessent rationes eadem corporeis legibus perficiendi, et vero orbes solidi dudum sint explosi, sympathiae autem et magnetismi aliaeque id genus abstrusae qualitates aut non intelligantur, aut ubi intelliguntur, corporearum impressionum effectus appariturae judicentur; nihil aliud ego quidem superesse judico, quam ut causa motuum coelestium a motibus aetheris, sive ut astronomice loquar, ab orbibus deferentibus quidem sed fluidis oriantur. Haec sententia vetustissima est, etsi neglecta: nam Leucippus eam adeo expressit, ut in systemate formando ipsum adhibuerit δίνης (vorticis) nomen, et audivimus, quomodo Keplerus motu aquae in vorticem actae gravitatem adumbraverit. Et ex itinerario Monconisii discimus, jam tum Torricellii fuisse sententiam (et ut suspicor, etiam Galilaei, cujus iste discipulus erat), ut paleas seu festucas aquae innatantes, sic astra, medio propiora, celerius circumire. Sed haec generaliora non difficulter in mentem veniunt. Nobis vero propositum est, ipsas motuum leges distinctius explicare, quod longe altioris indaginis esse res docebit. Et cum aliqua in eo genere nobis lux affulserit et inquisitio commode admodum et naturaliter successisse videatur, in eam spem erectus sum, veris motuum coelestium causis a nobis appropinquatum esse.

Constat et egregiis Gilberti cogitationibus, omne corpus mundanum majus, quoad nobis cognitum est, Magnetis referre naturam, et praeter vim directricem, polos quosdam respicientem, vim habere attrahendi cognata (minimum) corpora intra sphaeram suam, quam in terrestribus vocamus gravitatem, et analogia quadam ad sidera transferemus. Sed non satis constat, quae sit vera phaenomeni tam late patentis causa, et utrum eadem quae in Magnete. Quanquam autem problema demonstratione solvi nondum possit, habemus tamen quae mirifice consentiunt inter se magnaque verisimilitudine commendantur. Equidem asseri potest, Attractionem Gravium fieri radiatione quadam corporea, inmaterialia enim explicandis corporeis phaenomenis adhiberi non debent. Deinde consentaneum est, esse in globi corpore conatum explosivum materiae inconvenientis sive perturbantis seu non satis apto ad motus liberrime exercendos loco positae, unde per circumpulsionem attrahatur alia consentiens seu motum ejusmodi habens, ut motum attrahentis in-

testinum minus perturbet, exemplo flammae, in qua expulsionem unius et attractionem alterius ipsi sensus docent. Quodsi quis jam altius ista repeti desideret, is cogitet Globum fluidum fuisse, atque adeo in se motum varium intestinum habuisse, motibus ambientium sese accommodantem, et instar guttae olei in aqua natantis fuisse rotundatum, ut ambientia quam minimum perturbarentur, et tunc quoque cum paulatim induruit, pervium mansisse et meatus convenientes motibus fluidi residui ingredientis retinuisse. Et quidem natura fluidi est motus intestinos habere varios, qui ubi ab ambientibus coërcentur ne avolet materia, redeunt in se ipsos adeoque in circulares abeunt, et circulos magnos affectant, quia ita maximum retinent conatum recedendi. A quo jam detruduntur ea corpora, quibus minus hujus fluidi includitur seu in quibus minor conatus recedendi. Itaque si vis centrifuga adhibenda est ex Kepleri invento, non deduci debet ex motu aetheris in aequatore et parallelis qui ad axem telluris detruderet, sed ut jam olim annotare memini, circulis magnis quorum idem cum globo centrum, quales sunt meridiani, exemplo ejus motus qui in magnetis atmosphaera apparet, licet enim in fluido motus sit circularis varius in omnes partes in circulis magnis quibuscunque, nihil tamen prohibet esse quosdam polos, per quorum meridianos sit validior materiae cujusdam cursus ad systematis situm accommodatus. Ita variae causae assignatae coincidunt inter se hac explicandi ratione habemusque simul radiationem sphaericam, attractionem magnetis, explosionem perturbantis, fluidi motum intestinum, circulationem atmosphaerae conspirantes vim centrifugam. Sed quaecunque sit causa gravitatis, sufficere nobis potest Globum attrahentem radios materiales radiis lucis analogos propellere seu impulsuum lineas emittere in omnem plagam a centro recedentes; non quasi partes a tellure ad grave usque pervenire necesse sit, sed quod materia materiam contiguam impellente impetus propagetur ut in lumine et sono, et liquoribus motis. Quanquam erraverint, quibus persuasum fuit propagationem alicujus effectus sensibilis fieri posse in instanti. Radii autem ut ita dicam Magnetici seu quibus attractio efficitur, consistunt in conatu recessivo fluidi cujusdam insensibilis, subtilissime quidem divisibilis, sed confertissimi, cui cum interponantur corpora porosa, qualia sunt terrestria quae non tantundem in pari spatio materiae a centro recedere conantis continent adeoque minore levitate praedita sunt, necesse est fluido emisso praevalente,

terrestria versus centrum detrudi. Unde apparet esse debere aliam Materiam fluidam fluido illo, quod gravitatem facere et quod a centro propelli diximus, longe subtiliorem nec directionem ejus sequentem, sed proprios suos exercentem motus, non minus quam ipsa materia magnetica in aëre aut aqua facit. Nam necesse est ut materia quaedam alia transeat per poros corporum terrestrium minores sed creberrimos, priorem excludentes. Et quo major pars corporis terrestris materiae priori impervia est nec nisi alteram illam longe tenuiorem admittens, eo gravius specie fit corpus seu solidius censeri potest. Et fieri posset ut omnia corpora terrestria constarent ex massa homogenea adeoque poros subtiliores ubique aequaliter disseminatos habente, gravitas autem specifica major minorve ex minore majoreve hiatuum ejus et porositatum illarum crassiorum seu gravifico fluido perviarum copia orietur, prorsus ut ex eodem metallo corpora diversae gravitatis specificae formari possunt, quorum alia pro varietate cavitatum in aqua subsident, alia natabunt. Caeteris autem paribus, eademque existente gravitate specifica, solicitatio tamen ad centrum tendendi major minorve erit pro quantitate radiationis, quae aestimanda est ad exemplum lucis. Quemadmodum enim dudum demonstratum est a Viris doctis, corpora illuminari a lucido in ratione reciproca duplicata distantiarum, ita dicendum est corpora quoque attracta gravitare tanto minus quanto majus est quadratum distantiae ab attrahente. Utriusque eadem et manifesta ratio est. Nempe circa centrum lucidum vel radians R (fig. 19) describantur superficies sphaericae concentricae per A et per L vel ductis rectis RAL, RCN abscindantur harum portiones quae fiunt arcubus similibus et similiter positis ABC, LMN, rotatis circa axem seu radium arcus bisecantem RBM; porro lux vel vis attractiva per unamquamque superficiem uniformiter est' diffusa seu partes aequales ejusdem superficiei aequaliter illuminantur sive solicitantur; itaque tota lux vel vis superficiei ABC est ad lucem vel vim, superficiei LMN in ratione composita intensionis seu illuminationis et extensionis seu superficierum; sed tantum est lucis seu vis attractivae in superficie ABC quantum in superficie LMN, ergo intensiones sunt reciproce ut extensiones, hoc est illuminationes vel gravitatis solicitationes sunt reciproce ut superficies, sed superficies ABC et LMN sunt ut quadrata diametrorum RA, RL. Itaque illuminationes vel gravitatis solicitationes sunt reciproce ut quadrata distantiarum a

centro radiante vel attrahente. Hoc autem a priori nobis deprehensum, mox iterum sua sponte a posteriori per calculum analyticum ex phaenomenis planetarum communibus ductum nascetur mirifico consensu rationum et observationum, et insigni confirmatione veritatis. Quae enim sequuntur, non constant Hypothesibus, sed ex phaenomenis per leges motuum concluduntur; sive enim detur sive non detur attractio planetarum ex sole, sufficit a nobis eum colligi accessum et recessum, hoc est distantiae incrementum vel decrementum, quem haberet si praescripta lege attraheretur. Et sive circuletur revera circa solem, sive non circuletur, sufficit ita situm mutare respectu solis ac si circulatione harmonica moveretur, et proinde Principia intelligendi mire simplicia et foecunda reperta esse, qualia nescio an olim homines vel sperare ausi fuissent. Quantum autem hinc de ipsis motuum causis sit concludendum, prudentiae cujusque aestimandum relinquemus, fortasse enim eo res jam perducta est, ut Poëta intelligens non amplius dicere ausit Astronomis:

Talia frustra
Quaerite quos agitat mundi labor, at mihi semper
Tu quaecunque paret tam crebros causa meatus
Ut superi voluere late.

1) Ut ergo rem ipsam ex phaenomenis conficere aggredimur, ante omnia demonstrari potest, secundum naturae leges omnia corpora, quae in fluido lineam curvam describunt, ab ipsius fluidi motu agi. Omnia enim curvam describentia ab ea recedere conantur per rectam tangentem (ex natura motus), oportet ergo esse quod coërceat seu renovet causam curvitatis. Nihil autem contiguum est nisi fluidum (ex hypothesi) et nullus conatus coërcetur nisi a contiguo et moto (ex natura corporis), fluidum ergo ipsum in motu esse necesse est.

2) Hinc sequitur, planetas moveri a suo aethere seu habere orbes fluidos deferentes vel moventes. Omnium enim consensu lineas curvas describunt, nec possibile est phaenomena explicari, suppositis motibus rectilineis tantum. Itaque (per praecedentem) moventur a fluido ambiente. Idem aliter demonstrari potest ex eo quod motus planetae non est aequabilis seu aequalibus temporibus aequalia spatia describens. Unde etiam necesse est, ut a motu ambientis agatur. Et cum experiamur omnes planetas in eadem fere coeli regione et ad easdem partes ferri, con-

consentaneum est communem esse communis effectus causam, a motu scilicet aetheris circa solem, adeoque planetas habere orbes fluidos deferentes.

3) *Circulationem voco Harmonicam*, si velocitates circulandi, quae sunt in aliquo corpore, sint radiis seu distantiis a centro circulationis reciproce proportionales, vel (quod idem) si ea proportione decrescant velocitates circulandi circa centrum, in qua crescunt distantiae a centro, vel brevissime, si crescant velocitates circulandi proportione viciniarum. Ita enim si radii seu distantiae crescant aequabiliter seu arithmetice, velocitates decrescent harmonica progressione. Itaque non tantum in arcubus circuli, sed et *in curva alia quacunque describenda circulatio harmonica locum invenire potest.* Ponamus mobile M (fig. 18) ferri in curva quavis ${}_3M_2M_1M$ (vel ${}_1M_2M_3M$) et aequalibus temporis elementis describere elementa curvae ${}_3M_2M$, ${}_2M_1M$, intelligi potest motus compositus ex circulari circa centrum aliquod ut $\odot$ (velut ${}_3M_2T$, ${}_2M_1T$) et rectilineo velut ${}_2T_2M$, ${}_1T_1M$ (sumtus $\odot_2T$ aequ. $\odot_3M$, et $\odot_1T$ aequ. $\odot_2M$), qualis motus intelligi etiam potest, dum regula seu recta rigida indefinita $\odot\pi$ movetur circa centrum $\odot$, et interim mobile M movetur in recta $\odot\pi$. Nihil autem refert, quis sit motus rectilineus, quo ad centrum acceditur vel ab ipso receditur (quem voco *motum paracentricum*), modo circulatio ipsius mobilis M ut ${}_3M_2T$ sit ad circulationem aliam ejusdem mobilis ${}_2M_1T$, ut $\odot_1M$ ad $\odot_2M$, hoc est si circulationes aequalibus temporum elementis factae sint reciproce ut radii. Cum enim arcus isti elementarium circulationum sint in ratione composita temporum et velocitatum, tempora autem elementaria assumantur aequalia, erunt circulationes ut velocitates, itaque et velocitates reciproce ut radii erunt, adeoque circulatio dicetur harmonica.

4) *Si mobile feratur circulatione harmonica* (quicunque sit motus paracentricus), *erunt areae radiis ex centro circulationis ad mobile ductis abscissae temporibus insumtis proportionales, et vicissim.* Cum enim arcus circulares elementares, ut ${}_1T_2M$, ${}_2T_3M$, sint incomparabiliter parvi respectu radiorum $\odot_2M$, $\odot_3M$, erunt differentiae inter arcus et sinus eorum rectos (ut inter ${}_1T_2M$ et ${}_1D_2M$) ipsismet differentiis incomparabiles, ac proinde (per *Analysin nostram infinitorum*) habentur ea pro nullis, et arcus et sinus pro coincidentibus. Ergo ${}_1D_2M$ ad ${}_2D_3M$ ut $\odot_2M$ ad $\odot_1M$, seu $\odot_1M$ in

${}_1D_2M$ aequ. $\odot_2M$ in ${}_2D_3M$, ergo et aequantur horum dimidia triangula, nempe ${}_1M_2M\odot$ et ${}_2M_3M\odot$, quae cum sint elementa areae $A\odot MA$, itaque aequalibus ex hypothesi sumtis temporis elementis, etiam areae elementa sunt aequalia, et vicissim, ac proinde areae $A\odot MA$ sunt temporibus, quibus percursi sunt arcus AM, proportionales.

5) Assumsi inter demonstrandum quantitates incomparabiliter parvas, verbi gratia differentiam duarum quantitatum communium ipsis quantitatibus incomparabilem. Sic enim talia, ni fallor, lucidissime exponi possunt. Itaque si quis nolit adhibere infinite parvas, potest assumere tam parvas quam sufficere judicat, ut sint incomparabiles et errorem nullius momenti, imo dato minorem producant. Quemadmodum terra pro puncto seu diameter terrae pro linea infinite parva habetur respectu coeli, sic demonstrari potest, si anguli latera habeant basin ipsis incomparabiliter minorem, angulum comprehensum fore recto incomparabiliter minorem, et differentiam laterum fore ipsis differentibus incomparabilem; item differentiam sinus totius, sinus complementi et secantis fore differentibus incomparabilem; item differentiam sinus, chordae, arcus et tangentis. Unde cum hae quatuor sint ipsae infinite parvae, erunt differentiae infinities infinite parvae, et sinus versus etiam erit infinities infinite parvus adeoque recto incomparabilis. Et infiniti sunt gradus tam infinitorum quam infinite parvorum. Et possunt adhiberi triangula communia inassignabilibus illis similia, quae in Tangentibus Maximisque et Minimis et explicanda Curvedine linearum usum habent maximum, item in omni pene translatione Geometriae ad naturam, nam si motus exponatur per lineam communem, quam dato tempore mobile absolvit, impetus seu velocitas exponetur per lineam infinite parvam, et ipsum elementum velocitatis, quale est gravitatis solicitatio, vel conatus centrifugus, per lineam infinities infinite parvam. Atque haec Lemmatum loco annotanda duxi pro Methodo nostra quantitatum incomparabilium et Analysi infinitorum tanquam Doctrinae hujus novae Elementa.

6) Ex his jam consequens est, planetas moveri circulatione harmonica, primarios circa Solem, satellites circa suum primarium, tanquam centrum. Radiis enim ex centro circulationis ductis, areas describunt temporibus proportionales (per observationes). Ergo temporum elementis positis aequalibus est triang.

$_1M_2M\odot$ aequ. triang. $_2M_2M\odot$, et proinde $\odot_1M$ ad $\odot_2M$ est ut $_2D_2M$ ad $_1D_1M$; quod est circulationem harmonicam esse.

7) Consentaneum etiam est, Aetherem seu Orbem fluidum cujusque planetae moveri circulatione harmonica; nam supra ostensum est, nullum corpus in fluido sponte moveri linea curva, erit ergo et in aethere circulatio, eamque rationis est credere consentientem circulationi planetae, ita ut sit etiam circulatio aetheris cujusque planetae harmonica, alioqui perturbarent sese mutuo aether et planeta. Credibile enim est planetas in materia aliqua ferri, quae respectu ipsorum notabilis sit crassitiei, adeoque motu suo dissentaneo motui ipsorum esset obstitura. Hanc enim dari tanquam orbem communem deferentem liquidum omnium planetarum, commune eorum iter suadet.

8) Itaque ponemus planetam moveri motu duplici, seu composito ex circulatione harmonica orbis sui fluidi deferentis et motu paracentrico, quasi cujusdam gravitatis seu attractionis, hoc est impulsus versus solem seu planetam primarium. Facit autem circulatio aetheris, ut planeta circuletur harmonice, non velut motu proprio, sed quasi tranquilla natatione in fluido deferente cujus motum sequitur, ob perfectum consensum motuum aetheris et planetae, in quos post depositas luctationes conspirarunt.

9) Explicata circulatione harmonica, veniendum est ad Motum paracentricum planetarium, ortum ex impressione excussoria circulationis et attractione solari inter se compositis. Liceat autem appellare attractionem, licet revera sit impulsus, utique enim Sol quadam ratione tanquam magnes concipi potest; ipsae autem actiones magneticae a fluidorum impulsibus haud dubie derivantur. Unde etiam vocabimus Solicitationem Gravitatis, concipiendo planetam tanquam grave tendens ad centrum, nempe Solem. Pendet autem species orbitae a speciali lege attractionis. Videamus igitur, quae lex attrahendi lineam ellipticam faciat, idque ut consequamur, in Geometriae adyta parumper ingrediamur necesse est.

10) Cum omne mobile a linea curva quam describit recedere conetur per tangentem, licebit conatum hunc vocare excussorium, ut in motu fundae, cui aequalis requiritur vis, quae mobile coerceat ne evagetur. Hunc conatum metiri licebit perpendiculari ex puncto sequenti in tangentem

puncti praecedentis inassignabiliter distantis. Et cum linea est circularis, hanc vim celeberrimus Hugenius, qui primus eam Geometrice tractavit, appellavit centrifugam. Omnis autem conatus excussorius est respectu velocitatis seu impetus ex conatu repetito aliquandiutino concepti infinite parvus, quemadmodum et solicitatio gravitatis, quae homogeneae cum ipso est naturae. Nec proinde mirum est, quod voluit Galilaeus, percussionem esse infinitam comparatione gravitatis nudae, seu ut ego loquor, simplicis conatus, cujus vim ego mortuam vocare soleo, quae agendo demum concipiens impetum repetitis impressionibus viva redditur.

11) Conatus centrifugus seu conatus excussorius circulationis exprimi potest per PN sinum versum anguli circulationis $_1M\odot N$ vel per $_1D_1T$, nam sinus versus aequatur perpendiculari ex uno extremo arcus circuli puncto in tangentem alterius ductae, qua conatum excussorium expressimus in praecedenti (potest etiam exprimi conatus centrifugus per PV, differentiam radii et secantis ejusdem anguli, cujus differentiae discrimen a sinu verso est infinitesies infinities infinite parvum adeoque nullissimum respectu radii). Hinc porro cum sinus versus sit in duplicata ratione chordae seu arcus inassignabilis sive velocitatis, sequitur conatus centrifugos mobilium aequales circulos describentium esse in duplicata ratione velocitatum, inaequales describentium esse in ratione composita ex quadrata velocitatum et reciproca radiorum. Pro calculo analytico conatus centrifugus vel sinus versus $_2D_2T$ sit x, velocitas circulationis seu sinus rectus $_2D_2M$ sit y, radius $\odot_2M$ sit r; erit ex communi geometria $x = yy : 2r - x$ seu x ad y ut y ad $2r - x$. Sed x est incomparabiliter infra r, ergo evanescit in quantitate $2r - x$ et fit $x = yy : 2r$ seu conatus centrifugus $_2D_2T$ est ad circulationem $_2D_2M$ ut circulatio ad velocitatem qua opus esset ad totam diametrum seu ad duplam a centro distantiam eodem temporis elemento transmittendam.

12) Conatus centrifugi mobilis harmonice circulantis sunt in ratione radiorum reciproca triplicata. Sunt enim (per praecedentem) in reciproca radiorum et directa duplicata velocitatum, id est (quia velocitates circulationis harmonicae sunt reciproce ut radii) duplicata reciproca radiorum; ex simplice autem reciproca et duplicata reciproca fit reciproca tri-

plicata. Pro calculo sit ϑa planum constans aequale semper duplo triangulo elementari ${}_2M_3M\odot$ seu rectangulo ${}_2D_3M$ in $\odot_2M$ radium seu r, ergo ${}_2D_3M$ erit $\vartheta a : r$ seu ϑa divis. per r; jam ${}_2D_2T$ conatus centrifugus aequ. ${}_2D_2M$ quadr. divis. per bis $\odot_2M$, ergo aequ. $\vartheta\vartheta aa : 2r^2$.

13) Si *motus paracentricus* (recessus a centro Ω vel ad ipsum accessus) sit *aequabilis*, et circulatio harmonica, *linea motus* ΩMG *erit spiralis* ex centro Ω incipiens, cujus ea est proprietas, ut segmenta $\Omega GM\Omega$ sint proportionalia radiis, id est hoc loco chordis ΩG ex centro eductis; sunt enim tam areae, hoc est segmenta, quam (ob aequabilem recessum) radii temporibus proportionales. Multae sunt aliae notabiles hujus spiralis proprietates, nec difficilis constructio. Imo *generalis datur methodus* in circulatione harmonica, si ex radiis dentur tempora, aut velocitates paracentrici motus, aut saltem elementa impetuum seu solicitationes gravitatis, *construendi lineas* saltem suppositis quadraturis.

14) *Solicitatio paracentrica* seu *gravitatis* seu *levitatis* exprimitur recta ${}_3ML$ ex puncto curvae ${}_3M$ in puncti praecedentis inassignabiliter distantis ${}_2M$ tangentem ${}_2ML$ (productam in L) acta, radio praecedenti $\odot_2M$ (ex centro $\odot$ in punctum praecedens ${}_2M$ ducto) parallela, concipiendo scilicet hanc solicitationem impedire, quominus mobile a curva recedat.

15) In *omni circulatione harmonica elementum impetus paracentrici* (hoc est incrementum aut decrementum velocitatis descendendi versus centrum vel ascendendi a centro) *est differentia vel summa solicitationis paracentricae* (hoc est impressionis a gravitate vel levitate aut causa simili factae) *et dupli conatus centrifugi* (ab ipsa circulatione harmonica orti), summa quidem si levitas adsit; differentia si gravitas: ubi praevalente gravitatis solicitatione crescit descendendi, vel decrescit ascendendi velocitas, at praevalente duplo conatu centrifugo, contra. Ex ${}_1M$ et ${}_3M$ normales in $\odot_2M$ sint ${}_1MN$ et ${}_3M_2D$; cum ergo triangula ${}_1M_2M\odot$ et ${}_2M_3M\odot$ sint aequalia ostensa ob circulationem harmonicam, erunt (ob basin communem $\odot_2M$) et altitudines ${}_1MN$ et ${}_3M_2D$ aequales. Jam sumta ${}_2MG$ aequali L_3M, jungatur ${}_3MG$ parallela ipsi ${}_2ML$; igitur congrua erunt triangula ${}_1MN_2M$ et ${}_3M_2DG$, et erit ${}_1M_2M$ aequ. G_3M, et N_2M aequ. G_2D. Porro in recta $\odot_2M$ (si opus producta, quod semper subintelligo)

sumatur $\odot P$ aequ. $\odot_1 M$, et $\odot_2 T$ aequ. $\odot_3 M$, erit $P_2 M$ differentia inter radios $\odot_1 M$ et $\odot_2 M$, et ${}_2T_2M$ differentia inter radios $\odot_2 M$ et $\odot_3 M$. Jam P_2M aequ. (N_2M seu) $G_2D + NP$, et ${}_2T_2M$ aequ. ${}_2MG + G_2D - {}_2D_2T$, ergo $P_2M - {}_2T_2M$ (differentia differentiarum) erit $NP + {}_2D_2T - {}_2MG$, hoc est (quia NP et ${}_2D_2T$ sinus versi duorum angulorum et radiorum incomparabiliter differentium coincidunt) bis ${}_2D_2T - {}_2MG$. Jam differentia radiorum exprimit velocitatem paracentricam, differentia differentiarum exprimit elementum velocitatis paracentricae. Est autem ${}_2D_2T$ vel NP conatus centrifugus circulationis, quippe sinus versus (per 11) et ${}_2MG$ seu ${}_2ML$ est solicitatio gravitatis (per praecedentem). Itaque elementum velocitatis paracentricae aequatur differentiae inter duplum conatum centrifugum NP seu ${}_2D_2T$ et simplicem solicitationem gravitatis G_2M, aut (quod eodem modo concluditur) summae ex duplo conatu centrifugo et simplici solicitatione levitatis.

16) Datis incrementis aut decrementis velocitatis ascendendi aut descendendi, datur solicitatio gravitatis levitatisve, aut vice versa. Patet ex praecedenti, nam conatus centrifugus semper dari censetur, cum sit in ratione triplicata reciproca radiorum (per 12).

17) Aequalibus temporum elementis incrementa angulorum circulationis harmonicae sunt in ratione duplicata reciproca radiorum. Nam circulationes sunt in ratione composita angulorum et radiorum, et circulationes elementares, cum sint harmonicae, sunt in ratione reciproca radiorum, ergo anguli elementares sunt in ratione radiorum reciproca duplicata. Tales sunt fere motus apparentes diurni ex Sole spectati (dies enim hic sufficienter exiguae sunt partes temporis, inprimis pro planetis remotioribus), qui erunt circiter in ratione reciproca quadratorum distantiae, ita ut in distantia dupla tantum quarta pars anguli eodem temporis elemento absolvatur, in tripla tantum nona.

18) Si ellipsis describatur circulatione mobilis circa focum tanquam circulationis centrum, erunt inter se haec tria: circulatio ${}_2T\,{}_3M$ vel ${}_2D\,{}_3M$ (haec enim comparabiliter non differunt), velocitas paracentrica ${}_2D\,{}_2M$, et velocitas ipsius mobilis (ex ipsis composita) in ipsa orbita elliptica, nempe ${}_2M\,{}_3M$, respective ut haec alia tria: axis transversus BE, media proportionalis inter differentiam et summam distantiae focorum inter se $F\odot$ et differentiae

$\odot\varphi$ distantiarum puncti orbitae ${}_3M$ a focis, ac denique dupla media proportionalis inter $\odot\,{}_3M$ et $F\,{}_3M$ distantias ejusdem puncti a duobus focis. Eadem haec suo modo et in Hyperbola vera sunt. In Parabola quantitatibus quae ibi infinitae sunt evanescentibus, fient circulatio, velocitas paracentrica et velocitas ex ipsis composita quae est in ipsa orbita, respective ut latus rectum, media proportionalis inter latus rectum et excessum radii super radium omnium minimum (qui est quarta pars lateris recti), et denique dupla media proportionalis inter radium et latus rectum. Horum veritas ex communibus Conicorum elementis derivari potest, si ponatur rectam ${}_3MH$ curvae (vel ejus tangenti) perpendicularem in ${}_3M$, axi $A\Omega$ occurrere in R, et in eam ex focis normales agi FQ, $\odot H$; patet ${}_3MH$, $H\odot$, $\odot\,{}_3M$ esse ipsis ${}_3M\,{}_2D$, ${}_2D\,{}_2M$, ${}_2M\,{}_3M$, hoc est velocitati circulationis, velocitati paracentricae et velocitati toti in ipsa obita proportionales. Ponatur enim ${}_3MH$ ipsi $\odot\,{}_2M$ occurrere in ב, patet ob angulum $H\,{}_3M\,{}_2M$ rectum (nam arcus inassignabilis ${}_2M\,{}_3M$ habetur pro linea recta) esse triangula ב$H\odot$ et ${}_3M\,{}_2D\,{}_2M$ similia, angulum ${}_3M\,{}_2M\,{}_2D$ aequalem esse angulo ב$\odot H$, id est, angulo ${}_3M\odot H$ (quia angulus ${}_3M\odot{}_2M$ est inassignabilis seu infinite parvus), itaque triangula ${}_3MH\odot$ et ${}_3M\,{}_2D\,{}_2M$ sunt similia. Unde sequitur proportio assignata. Sed jam ostendendum est rectas ${}_3MH$, $H\odot$, $\odot\,{}_3M$ se habere dicto modo: Quia recta ${}_3MH$ (ex constructione) normalis est ad ${}_3M\,{}_2M$, arcum Ellipseos (aut Sectionis conicae in genere) ejusve tangentem in puncto ${}_3M$, ideo (primo) aequales sunt (ex Conicis) anguli $H\,{}_3MF$ et $H\,{}_3M\odot$. Similia igitur sunt (2do) triangula angulos ad H et Q rectos habentia ${}_3MH\odot$ et ${}_3MQF$, et posito $F\odot$ a ${}_3MH$ secari in R est (3tio) $\odot R$ ad FR ut ${}_3M\odot$ ad ${}_3MF$, segmenta scilicet baseos $\odot F$ ut latera ${}_3M\odot$, ${}_3MF$ trianguli $\odot\,{}_3MF$, cujus quippe angulus ad verticem est bisectus. Praeterea (4to) et triangula $\odot HR$, FQR sunt similia, ergo (5to) latera eorum homologa sunt ut $\odot R$ ad ER seu (per 3) ut ${}_3M\odot$ ad ${}_3MF$ adeoque ut latera homologa triangulorum similium ${}_3MH\odot$ et ${}_3MQF$; porro (6to) ${}_3M\odot + {}_3MF$ aequ. $A\Omega$ ex natura Ellipseos, et ${}_3M\odot - {}_3MF$ (7mo) vocetur $\odot\varphi$ et (8vo) differentia inter quadrata $A\Omega$ axis majoris seu recti (seu distantia verticum) et BE axis transversi seu conjugati vel minoris seu distantiae mediarum digressionum aequatur quadrato distantiae focorum seu $A\Omega$ qu. — $\odot F$ qu. aequ. BE qu. seu aequ. rectangulo sub $A\Omega$ latere transverso et XW latere recto (quod latus rectum invenimus

aequale duplae ordinatim applicatae ad axem in foco). Constat etiam (9mo) in omni triangulo, si angulus ad verticem sit bisectus, rectam bisecantem esse ad rectam quae potest differentiam inter potestates summae laterum trianguli baseos, ut media proportionalis inter latera est ad laterum summam. Itaque (10mo) MR est ad rectam quae potest $A\Omega$ qu. — $\odot F$ qu. id est (per 8) ad BE, ut media proportionalis inter ${}_3M\odot$ et ${}_3MF$ seu (per 6 et 7) ut dimidium latus de $A\Omega$ qu. — $\odot\varphi$ qu. est ad $A\Omega$. Rursus (11mo) MR . $\overline{\odot H + QF}$ aequ. duplo triangulo $\odot {}_3MF$, quod etiam habetur, si media proportionalis inter summam et differentiam baseos et summae ex lateribus ducatur in dimidiatam mediam proportionalem inter summam et differentiam baseos et differentiae laterum (per notum canonem investigandi aream trianguli ex datis lateribus). Ergo (per 11 et 12) fiet (13mo) MR in $\overline{\odot H + FQ} = \sqrt{A\Omega \text{ qu.} - \odot F \text{ qu.}}$ seu (per 8) BE in dimid. $\sqrt{\odot F \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ seu fiet MR ad BE ut dimid. $\sqrt{\odot F \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ ad $\odot H + FQ$. Ergo (per 10 et 13) fit (14mo) $\sqrt{A\Omega \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ ad $A\Omega$ ut $\sqrt{\odot F \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ ad $\overline{\odot H + FQ}$ seu fit $\odot H + QF$ ad $A\Omega$ ut $\sqrt{\odot F \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ ad $\sqrt{A\Omega \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$; sed ($15^{mo}$) $\odot H + FQ$ ad ${}_3M\odot + {}_3MF$ seu ad $A\Omega$ est ut $\odot H$ ad ${}_3M\odot$ (per 5). Ergo (per 14 et 15) fit (16mo) $\odot H$ ad ${}_3M\odot$ ut $\sqrt{\odot F \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ ad $\sqrt{A\Omega \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ et proinde (17mo) ${}_3M\odot$ qu. — $\odot H$ qu. id est ${}_3MH$ qu. est ad ${}_3M\odot$ qu. ut $A\Omega$ qu. — $\odot\varphi$ qu. demto $\odot F$ qu. — $\odot\varphi$ qu. seu ut $A\Omega$ qu. — $\odot F$ qu. seu ut BE qu. est ad $A\Omega$ qu. — $\odot\varphi$ qu. Itaque ex 15 et 17 (18mo) fiunt inter se ${}_3MH$ (quae ut velocitas circulandi), $H\odot$ (quae ut velocitas paracentrica) et $\odot {}_3M$ (quae ut velocitas in orbita) ut sunt inter se BE, $\sqrt{\odot F \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ seu) med. prop. inter $\odot F + \odot\varphi$ et $\odot F - \odot\varphi$) et $\sqrt{A\Omega \text{ qu.} - \odot\varphi \text{ qu.}}$ (seu dupla med. prop. inter ${}_3M\odot$ et ${}_3MF$), quod asserebatur. Hinc etiam enuntiatio talis fieri potest: *Si quid moveatur in Ellipsi, velocitas circulandi circa focum est ad velocitatem paracentricam, nempe descendendi ad focum vel a foco recedendi, ut axis minor seu transversus est ad latus differentiae inter potestatem distantiae focorum inter se et potestatem differentiae distantiarum mobilis a focis.* Et quoniam in hac enuntiatione foci indifferenter tractantur, hinc sequitur permutatis licet focis, ut alter pro altero centrum circulationis attractionisque fiat, eandem in quovis puncto manere rationem circulationis ad descensum seu ad

velocitatem paracentricam. Jam ex puncto Ellipseos $_2M$ agatur in axem ordinata (normalis scilicet) $_2MY$, patet (19mo) rectang. ex $_2MY$ in $F\odot$ aequari duplo triangulo $_2M\odot F$ adeoque (per 12 et 13) aequari (20mo) ipsi BE in dimid. $\sqrt{\odot F\,qu. - \odot\varphi\,qu.}$ seu bis $_2MY$ in $F\odot$ est ad BE qu. ut $\sqrt{\odot F\,qu. - \odot\varphi\,qu.}$ est ad BE. Sed et (per 18) erat velocitas circulationis ad paracentricam ut $\sqrt{\odot F\,qu. - \odot\varphi\,qu.}$ ad BE, ideo fiet (21mo) paracentrica velocitas ad circulatoriam in Ellipsi ut bis $_2MY$ in $F\odot$ ad BE qu. seu ut duplam ordinatam ad distantiae focorum et axi minori tertiam proportionalem. Et proinde (22do) *in Ellipsi rationes velocitatum paracentricarum focum respicientium ad circulatorias respondentes sunt ordinatis proportionales seu quod idem est, rationes velocitatis, qua planeta accedit ad Solem aut ab eo recedit, ad velocitatem ejusdem simul circulandi circa Solem sunt distantiis planetae a linea absidum proportionales.* Atque ita si una ratio accessus vel recessus ad coexistentem circulationem sit duplicata vel triplicata (etc.) rationis quam alius accessus vel recessus habet ad circulationem sibi coexistentem, erit logarithmus ordinatae a priori mobilis loco in axem ductae duplus vel triplus logarithmi ordinatae a posteriori mobilis loco in axem ductae. *Rationes* scilicet accipio hoc loco tanquam numeros, qui toties contineant unitatem, quoties antecedens rationis continet consequens. Et dupla vel tripla ratio fit duplo vel triplo facto antecedente vel dimidiato aut tertiato consequente; sed duplicatam vel triplicatam voco rationem, cujus duplus vel triplus est logarithmus, seu quae est ut quadratum vel cubus prioris, hoc est quae est inter quadrata aut cubos terminorum prioris. Similiter etiam (23^{tio}) *in Ellipsi rationes velocitatum in orbita ad coexistentes velocitates circulandi circa alterutrum focorum sunt inter se ut mediae proportionales inter distantias mobilis a focis,* ut patet ex 18; et proinde, in motibus planetarum Ellipticis, si una ratio inter velocitatem planetae in sua orbita et velocitatem qua accedit Soli aut ab eo recedit, sit alterius hujusmodi rationis duplicata vel triplicata (etc.), erit summa ex logarithmis distantiarum mobilis a focis in priori casu dupla vel tripla (etc.) summae similis in posteriori casu. Restat ut motum in Ellipsi secundum radios ex focis ductos cum motu secundum axem eique parallelas seu secun-

dum abscissas (ut antea cum ordinatis seu axi transverso parallelis) comparemus. Est autem (24to) RY ad YC ut latus rectum (quod nos ostendimus esse aequ. XW) ad $A\Omega$ latus transversum seu axem majorem, ut ab aliis jam ostensum est; jam (25to) BC aequ. $\overline{CY - RY}$, ergo (26to) (per 24 et 25) RC est ad CY ut $\overline{A\Omega - XW}$ ad $A\Omega$; sed (27mo) RC id est dimid. $\overline{\odot R - FR}$ est ad $F\odot$ (seu $\odot R + FR$) ut dimid. $\odot\varphi$ (seu ut dimid. $\overline{{}_3M\odot - {}_3MF}$) est ad $A\Omega$ (seu ${}_3M\odot + {}_3MF$), omnia enim utrobique proportionalia per 5. Ergo (per 26 et 27) componendo rationem CY ad RC, et RC ad $F\odot$ fit (28vo) CY ad $F\odot$ ut dimid. $\odot\varphi$ ad $\overline{A\Omega - XW}$ vel (29mo) quia $\overline{A\Omega - XW}$ (per 8) est ad $F\odot$ ut $F\odot$ ad $A\Omega$, ergo componendo rationem posteriorem analogiae artic. 29 cum ratione priore analogiae artic. 28 et vicissim priorem illius cum posteriore hujus fit (30mo) CY ad $A\Omega$ ut dimid. $\odot\varphi$ ad $F\odot$. Itaque, quia $A\Omega$ et $F\odot$ sunt constantes, erunt (31mo) CY abscissae ex axe inde a centro ipsis $\odot\varphi$ differentiis distantiarum puncti Ellipseos a duobus focis proportionales. Jam (32mo) incrementa vel decrementa differentiarum inter distantias a focis seu ipsarum $\odot\varphi$ sunt dupla incrementa ipsarum $\odot{}_3M$ distantiarum ab alterutro foco, seu crementa sive velocitates quibus ipsae $\odot\varphi$ magnitudinem mutant sunt duplae velocitatum quibus eam mutant (hoc est crescunt vel decrescunt) ipsae $\odot{}_3M$. Ergo (33^{tio}) crementa (hoc est incrementa vel decrementa) abscissarum CY sunt proportionalia crementis radiorum $\odot{}_3M$ ex foco eductorum, seu (34to) velocitates quibus punctum ${}_3M$ in Ellipsi motum distantiam mutat ab axe conjugato BE, proportionales sunt velocitatibus quibus distantiam mutat ab alterutro foco $\odot$. Quae quidem omnia hoc articulo fusius exponere placuit, ut motus planetarum Elliptici proprietates memorabiles melius intelligerentur.

19) Si mobile quod gravitatem habet, vel ad centrum aliquod trahitur, qualem planetam respectu Solis ponimus, feratur in Ellipsi (aut alia sectione coni) circulatione harmonica, sitque in foco Ellipseos centrum tam attractionis quam circulationis, erunt attractiones seu gravitatis solicitationes ut quadrata circulationum directe, seu ut quadrata radiorum sive distantiarum a foco reciproce. Hoc ita invenimus non ineleganti specimine nostri Calculi differentialis vel Analyseos infinitorum. $A\Omega$ sit q;

$\odot F$, e; BE, b (hoc est $\sqrt{qq - ee}$); $\odot {}_2M$ radius r: $\odot \varphi$ (seu $\odot {}_2M - F {}_2M$) $2r - q$ seu per compendium p, et latus rectum WX sit a aequ. $bb : q$. Duplum elementum areae seu duplum triangulum ${}_1M_2M\odot$ quod semper aequale est sit ϑa, posito a latere recto et ϑ repraesentante elementum temporis semper aequale, et ${}_2D {}_3M$ circulatio erit $\vartheta a : r$ (vid. jam supra 12). Porro differentia radiorum (${}_3D {}_2M$) vocetur dr, et differentia differentiarum ddr. Per praecedentem autem est dr (seu ${}_2D {}_2M$) ad $\vartheta a : r$ (seu ad ${}_2D {}_3M$) ut $\sqrt{ee - pp}$ ad b; ergo $brdr = \vartheta a \sqrt{ee - pp}$, quae est aequatio differentialis. Hujus autem aequatio differentio-differentialis, secundum leges calculi a nobis peculiari capite huic tractatui inserto (supra....) explicatas, est $bdr\,dr + brddr = -2pa\vartheta dr : \sqrt{ee - pp}$, quarum duarum aequationum ope tollendo dr, ut restet tantum ddr, fiet $ddr = bbaa\vartheta\vartheta - 2aaqr\vartheta\vartheta, : bbr^3$, unde habetur propositum. Nam ddr, velocitatis paracentricae elementum, est differentia inter $bbaa\vartheta\vartheta : bbr^3$, hoc est $aa\vartheta\vartheta : r^3$ qui est duplus conatus centrifuges (per 12 supra), et inter $2aaqr\vartheta\vartheta : bbr^3$, hoc est (quia $bb : q = a$) $2a\vartheta\vartheta : rr$; oportet ergo (per 15) ut $2a\vartheta\vartheta : rr$ sit solicitatio gravitatis, quae ducta in constantem $a : 2$ dat $aa\vartheta\vartheta : rr$ quadratum circulationis. Sunt ergo solicitationes gravitatis ut quadrata circulationis directe, et proinde ut quadrata radiorum reciproce. Eadem conclusio et in Hyperbola et Parabola succedit, maxime autem in Circulo, qui est simplicissima Ellipsis. Ratio autem discriminis inter has conicas sectiones, et quando Circuli et Ellipses prae aliis generentur, infra apparebit.

Si quis specimen calculi quod hoc loco edidimus distinctius sibi explicari desideret, praesertim cum supra differentialem quidem explicuerimus, at differentio-differentialis mentionem fecerimus nullam, tanquam ex priori fluentis, is sic habeto: In aequatione differentiali $brdr = \vartheta a \sqrt{ee - pp}$ (1) pro dr scribatur m compendii causa, et pro $ee - pp$ scribatur n, fiet $brm = \vartheta a \sqrt{n}$, cujus aequationis aequatio differentialis (id est absolute differentio-differentialis) ex novo algorithmo generali a nobis tradito est $brdm + bmdr = \vartheta adn : 2\sqrt{n}$ (2); est autem $m = dr$ et dm proinde ddr, et quia $n = ee - pp$, hinc $dn = -2pdp$, at $dp = 2dr$, quia $p = 2r - q$ (nam ${}_3M\odot - {}_3MF =$ bis ${}_3M\odot - A\Omega$). Ita in aequatione (2) nempe differentio-differentiali pro m, dm, n, dn substituendo valores inventos habebimus $brddr + bdrdr = -2a\vartheta pdr : \sqrt{ee - pp}$ (3), ubi pro $dr : \sqrt{ee - pp}$ substituendo ex aequ. 1. $\vartheta a : br$ et pro bdrdr substituendo

$\vartheta\vartheta aa\,\overline{ee - pp} : brr$, sublatisque fractionibus ex aequ. 3. fiet $ddr = \overline{- ee + pp - 2pr}\,\vartheta\vartheta aa : bbr^3$ (4). Jam $ee = qq - bb$ et $p = 2r - g$, itaque $- ee + pp - 2pr = - 2rq + bb$ (5). Ergo denique ex aequ. 4. fit $ddr = - 2rq\vartheta\vartheta aa + bb\vartheta\vartheta aa, : bbr^3$ (6) seu quia $qa = bb$, fiet $ddr = \vartheta\vartheta aa : r^3, - 2\vartheta\vartheta a : r^2$, seu ddr est differentia inter quantitates supra dictas $\vartheta\vartheta aa : r^3$, duplum conatum centrifugum, et $2a\vartheta\vartheta : rr$, solicitationem gravitatis qua mobile in orbita retinetur. Quanquam autem operae pretium visum fuerit definire solicitationis hujus quantitatem hac quam aperuimus via, ut appareret resolutio elementi paracentrici seu incrementi decrementive accessus recessusve respectu foci seu Solis in duos conatus, quorum unus aequalis sit duplo conatui centrifugo, si motus praesens Ellipticus fieret per circulationem harmonicam paracentrico motui compositam, alter aequalis sit solicitationi gravitatis qua motus praesens effici posset, si hac mobile in orbita retineri poneretur, secundum demonstrata articuli 15; quoniam tamen alia via sine calculo ex notatis alibi theorematibus nostris et adhibitis Lemmatibus Incomparabilium a nobis introductis inveniri potest solicitatio gravitatis, eam quoque vel consensus gratia annotare placet, praesertim cum sic quoque non spernendae se aperiant meditationes generales. Igitur rectae duae ad curvam perpendiculares in punctis $_2M$ et $_3M$ inassignabiliter distantibus, nempe $_2MS$ et $_3MS$, concurrant in S, id erit centrum circuli curvam in M osculantis, hoc est intus vel extus lineam tangentium circulorum maximi vel minimi seu eundem cum linea angulum contactus ad rectam tangentem facientis, quod in circulo tali cum curva contactus communi perfectionis genus osculi nomen a me accepit; idemque centrum est punctum curvae, cujus evolutione linea proposita describitur, quod describendi genus primus invenit Hugenius. Producatur et recta $_2MG$ tangenti in $_2M$ parallela, donec ipsi $_2MS$ occurrat ad angulos scilicet rectos in K. Jam ut $_2MG$ est solicitatio gravitatis, quatenus gravitate mobile in orbita retineri concipitur, ita $_2MK$ est conatus excussorius, quo mobile ab orbita recedere tentat ex impetu concepto, per dicta supra artic. 10, qui differt a conatu centrifugo $_2T\,_2D$, quo mobile recedere conatur a centro circulationis ⊙, nam conatus centrifugus, ut supra diximus, est species tantum simplicissima conatus excussorii, cum scilicet motus est circularis. Ob triangula autem similia $_2MKG$ et $_2M\,_2DG$ (primo) in omni linea solicitatio gravitatis $_2MG$ est ad

conatum excussorium $_2MK$ ut $_3MG$, id est $_2M_3M$ elementum curvae seu velocitas in orbita est ad $_3M_2D$ velocitatem circulationis; sed porro ob triangula similia SK_3M et $_2MK_2M$ ipsa $_3MK$, id est $_3M_2M$ (2do) velocitas in orbita est media proportionalis inter $_2MK$ conatum excussorium et SK, id est S_2M, quae repraesentat velocitatem, qua eodem tempore quo percurritur curvae elementum perveniri posset a curvae puncto M ad S centrum circuli osculantis, quae velocitas incomparabiliter major est velocitate circulationis, ut haec conatu excussorio. Igitur in omni Motus linea conatus excussorii $_2MK$ sunt in ratione composita ex ratione duplicata directa velocitatum in orbita $_2MK$ vel $_3M_2M$ et reciproca simplice semidiametrorum osculationis SM. Sed magnitudinem semidiametri osculationis sic inveniemus: $_2MS$ secet $A\Omega$ in ψ; per $_2M$ ducatur axi parallela secans $_3MY$ in ω, et ex ψ agatur in $_2MS$ perpendicularis, patet (3^{tio}) ψR (differentiam inter $\odot\psi$ et $\odot R$) esse ad $_3M_2D$ differentiam inter $\odot_3M$ et $\odot_2M$ ut $\odot R$ ad $\odot_2M$ seu ut $\odot F$ ad $A\Omega$ (per num. 5 articuli praecedentis 18). Et per num. 13 et sequentes ejusdem est (4to) dimidia differentia ipsarum $\odot M$, seu tota differentia ipsarum $\odot M$, seu $_3M_2D$ est ad differentiam ipsarum CY seu ad $_2M\omega$ etiam ut $\odot F$ ad $A\Omega$. Ergo (per 3 et 4) erit (5to) ψR ad $_2M\omega$ ut $\odot F$ quad. ad $A\Omega$ quad., et (6to) $_2M_3M$ ad $_3M_2D$ in ratione composita $_2M_3M$ ad $_2M\omega$ et ($_2M\omega$ ad $_3M_2D$ seu) $A\Omega$ ad $\odot F$. Jam quia recta $_2M_3M$ differt incomparabili parvitate a normali ex $_2M$ in $_3MS$, etiam angulus $_2M_3MS$ incomparabili parvitate differt a recto, id est rectus est; itaque triangula S_3M_2M et $S\pi\psi$ similia sunt, estque adeo (7mo) S_3M ad SR ut $_2M_3M$ ad $\psi\pi$. Sed ratio $_2M_3M$ ad $\psi\pi$ componitur ex rationibus $_2M_3M$ ad $_2M\omega$ et $_2M\omega$ ad ψR (id est per 5. $A\Omega$ quad. ad AF quad.) et ψR ad $\psi\pi$ (id est ob triangula $\psi\pi R$ et $_2M\omega_3M$ similia, $_2M_3M$ ad $_2M\omega$). Itaque erit $_2M_3M$ ad $\psi\pi$ seu S_3M ad SR in duplicata ratione composita ex $_2M_3M$ ad $_2M\omega$, et $A\Omega$ ad $\odot F$ seu (per 6) erit (8vo) S_3M ad SR in duplicata ratione $_2M_3M$ ad $_3M_2D$ sive velocitatis in orbita ad velocitatem paracentricam, id est (per num. 18 articuli praecedentis 18) in simplici ratione $A\Omega$ quad. — $\odot F$ quad. ad $\odot F$ quad. — $\odot\varphi$ quad. Ergo S_3M — SR seu $_3MR$ est ad S_3M ut $A\Omega$ quad. — $\odot\varphi$ quad. demto $\odot F$ quad. — $\odot\varphi$ quad. (id est ut $A\Omega$ quad. — $\odot F$ quad., id est (9no) ut BE quad.) est ad $A\Omega$ quad. — $\odot\varphi$ quad., seu in Ellipsi

recta MS semidiameter circuli osculantis seu semidiameter osculationis est ad $_3MR$ perpendicularem Ellipsi ductam usque ad axem, scilicet majorem, ut quadruplum rectangulum sub distantiis a focis seu sub $_3M\odot$ et $_3MF$ (quod aequari ipsi $A\Omega$ quad. — $\odot\varphi$ quad. constat ex articuli praeced. 18 num. 6 et 7) ad quadratum sub axe minore vel conjugato. Quod ipsum in transitu annotasse pretium operae est. Id est (10mo) SM ad $_3MR$ (per 9 hic et per 18 artic. praeced.) in duplicata ratione velocitatis circulandi ad velocitatem in orbita, seu quadratum rectae $_2M_3M$ (repraesentantis velocitatem in orbita) applicatum ad $_3MR$ aequatur quadrato rectae $_3M_2D$ (repraesentantis velocitatem circulandi) applicato ad SM. Sed (per 2 hic) in omni linea conatus excussorius fit quadrato velocitatis in orbita applicato ad semidiametrum osculationis. Ergo (11mo) in linea Elliptica conatus excussorius fit quadrato velocitatis circulandi $_3M_2D$ applicato ad $_3MR$ perpendicularem Ellipsi productam ad axem. Inventa jam lege conatus excussorii in Ellipsi, ita facile absolvetur demonstratio: per num. 10 artic. 18 praeced. est $_3MR$ ad latus de $A\Omega$ quad. — $\odot\varphi$ quad. ut dimid. BE ad totam $A\Omega$, id est (per num. 8 ejusdem artic. praeced.) ut semilatus rectum ad BE. Ergo vicissim semilatus rectum est ad $_3MR$ ut BE ad latus de $A\Omega$ quad. — $\odot\varphi$ quad., id est (per num. 18 artic. praeced.) ut $_3M_2D$ ad $_2M_3M$, seu (per num. 1 articuli hujus) ut $_2MK$ ad $_2MG$. Itaque (12mo) ut est semilatus rectum ad $_3MR$ (perpendicularem in Ellipsin ab ipsa ad axem pertinentem), ita est $_2MK$ (conatus excussorius) ad $_2MG$ (solicitationem gravitatis), seu $_2MG$ in semilatus rectum aequatur facto ex $_2MK$ in $_3MR$, id est (per num. 11 artic. hujus) quadrato de $_3M_2D$. Ergo (13tio) $_2MG$ (quae repraesentat solicitationem gravitatis) ducta in semilatus rectum ($\odot$W) aequatur quadrato ipsius $_3M_2D$ repraesentantis velocitatem circulationis, seu in literis exprimendo, quia $_3M_2D$ circulatio (per superiora sub initium hujus articuli) est $\vartheta a:r$, fit $_2MG$ solicitatio gravitatis aequ. $2\vartheta\vartheta a:rr$, prorsus ut antea in hoc ipso praesente articulo per viam diversam, nempe ope calculi nostri differentialis et theorematis articulo 15 propositi inveneramus. Adeoque solicitationes gravitatis in Ellipsi sunt quadratis circulationum proportionales, et quia harmonicae circulationes seu circulandi velocitates sunt reciproce proportionales radiis seu ipsis $\odot$M distantiis a centro circulationis, id est a foco Ellipseos, nempe pro planetis Sole, per artic. 8 hujus

Tentaminis, ideo denique (14to) solicitationes gravitatis in mobili quod harmonica circulatione simulque motu paracentrico focum respiciente Ellipsin describit (quales sunt planetae circa Solem gyrantes) sunt in reciproca proportione duplicata distantiarum a foco tanquam circulationis et attractionis centro.

20) **Planeta idem attrahitur a Sole diversimode, et quidem in duplicata ratione viciniarum**, ita ut idem duplo vicinior quadruplo fortius, triplo vicinior noncuplo fortius ad descendendum versus Solem nova quadam impressione perpetuo solicitetur. Patet ex praecedenti, posito Planetam Ellipsin describere ac circulari harmonice, ac praeterea continue impelli versus Solem. Video hanc propositionem jam tum innotuisse etiam illi celeberrimo Isaaco Newtono, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non possim judicare, quomodo ad eam pervenerit. Ita habemus consensum pulcherrimum eorum quae supra a priori conclusimus ex lege radiationis attractoriae, et eorum quae nunc ex phaenomenis, id est natura motus Elliptici planetarum secundum situm ex Sole tanquam foco abscissas aequabilis a Keplero ex Tychonis et suis observationibus stabilita et a posteris comprobata sponte nascuntur.

21) Patet etiam **solicitationem gravitatis in Planetam esse ad conatum Planetae centrifugum** (seu excussoriam ab ipsa circulatione harmonica eum rapiente in orbem atque adeo, excutere conante profectum) **ut distantia praesens a Sole ad quartam partem lateris recti Ellipseos planetariae**, seu ut r ad a : 4, ac proinde rationes ipsae gravitatis ad conatum centrifugum sunt planetae distantiis a Sole proportionales.

22) **Velocitas planetae circa Solem ubique major est velocitate paracentrica, hoc est accedendi ad Solem vel ab eo recedendi.** Cum enim sit circulatio ad paracentricam ut b ad $\sqrt{ee-pp}$ (per 18, adde calculum ad 19), erit major illa quam haec, si bb + pp major quam ee, quod utique fit, cum bb major quam ee, seu b axis transversus quam e distantia focorum. Id vero in Ellipsibus planetariis nobis notis semper contingit, quae non usque adeo a circulis differunt.

23) In Aphelio A et Perihelio Ω sola est circulatio sine accessu et recessu, in Perihelio maxima, in Aphelio minima. In media autem planetae distantia a Sole (quae est in ipsis extremis axis

transversi B et E) velocitas accessus recessusve est ad circulationem in ratione distantiae inter focos ad axem transversum, seu e ad b; ibi enim p evanescit.

24) Maxima est planetae velocitas accedendi ad Solem vel ab eo recedendi, cum W⊙ vel X⊙ distantia planetae a Sole est aequalis dimidio Ellipseos lateri recto, tunc enim (per 19 vel 21) fit ddr = 0, cum r = a : 2. Itaque si ex Sole tanquam centro, dimidio latere recto ⊙W tanquam radio describatur circulus, is Ellipsin planetae in duobus punctis maximae paracentricae velocitatis W et X secabit, quae in uno ut W erit accendi, in altero X recedendi. Minima sive nulla est in Aphelio et Perihelio, sive in Ellipsis utroque vertice A et Ω.

25) Semper in Ellipsi adeoque et semper in planeta conatus centrifugus recedendi a Sole seu conatus excussorius circulationis harmonicae minor est solicitatione gravitatis seu attractione centrali Solis. Est enim (per 21) attractio ad conatum centrifugum ut distantia a Sole seu foco ad quartam partem lateris recti, semper autem in Ellipsi distantia a foco major quarta lateris recti parte.

26) Impetus quos planeta attractione Solis continuata, durante itinere concepit sunt ut anguli circulationis, seu quos radii ex Sole ad primum et postremum itineris punctum ducti comprehendunt, sive ut motus apparens seu iter spectatum ex Sole. Sic impetus impressus durante itinere A_1M est ad impetum impressum durante itinere A_2M ut angulus $A⊙_1M$ ad angulum $A⊙_2M$. Sunt enim angulorum incrementa ut impressiones gravitatis (per 17 et 19), ergo et summae summis proportionales, nempe anguli circulatione absoluti summis impressionum seu impetibus inde conceptis. Hinc in puncto W ubi normalis ordinata ex Sole Ellipsi occurrit, impetus inde a Aphelio A conceptus est dimidia pars impetus concepti ab Aphelio ad Perihelium; est autem ibi ⊙W, distantia a Sole, ipsum dimidium latus rectum. Et impetus itinere quovis conceptus est ad conceptum semirevolutione, ut angulus circulationis ad duos rectos. Intellige autem impetus a gravitate vel attractione impressos per se ac solos, non detractis nec computatis impetibus contrariis ab excussorio conatu impressis.

27) Sed operae pretium est distinctius ex causis assignatis explicare totam Planetae revolutionem gradusque

Unde accessus et recessus erga Solem. Planeta igitur in maxima digressione A seu Aphelio positus minorem quidem et conatum centrifugum circulationis excutientis et attractorium gravitatis solicitantis experitur, quam si Soli propior esset. Est tamen in ea distantia, nempe in vertice remotiore a Sole, fortior gravitas quam duplus conatus centrifugus (per 21), quia ⊙A, distantia Aphelii seu verticis remotioris a Sole seu foco, major est dimidio latere recto ⊙W. Descendit itaque planeta versus Solem itinere AMEWΩ, et continue crescit descendendi impetus, ut in gravibus acceleratis, quamdiu manet nova gravitatis solicitatio fortior duplo novo conatu centrifugo, tamdiu enim crescit impressio accedendi super impressionem recedendi, adeoque absolute crescit accedendi velocitas, donec in locum perveniatur, ubi aequantur duae illae novae contrariae impressiones, id est in locum W, ubi distantia a Sole ⊙W aequatur dimidio lateri recto. Ibi ergo velocitas accedendi est maxima et crescere desinit (per 24). Exinde autem etsi pergat planeta accedere ad Solem usque ad Ω, velocitas tamen accedendi rursus decrescit, praevalente conatu duplo centrifugo super gravitatis impressionem, idque tamdiu continuatur, donec impressiones centrifugae in unum collectae ab initio A hucusque, impressiones gravitatis etiam ab initio hucusque collectas praecise consumunt, seu quando totus impetus recedendi (conceptus ex singulis impressionibus centrifugis collectis) toti impetui accedendi (ex gravitatis impressionibus continue repetitis concepto) tandem aequatur, ubi cessat omnis accessio, atque is locus ipsum est Perihelium Ω, in quo Planeta est Soli maxime vicinus. Postea autem continuato motu, cum hactenus accesserit, nunc recedere incipit, tenditque ab Ω per X versus A. Nam duplus conatus centrifugus qui praevalere coeperat super gravitatem inde a W usque ad Ω, adhuc pergit praevalere ab Ω usque ad X, ac proinde cum ab Ω incipiat planeta quasi de novo moveri, quippe prioribus impetibus contrariis mutuo sublatis, praevalet etiam recessus inde ab Ω, et recedendi velocitas continue crescit usque ad X, sed incrementum tamen ejus seu nova impressio decrescit, donec ista nova impressio ad recedendum seu duplus conatus centrifugus novae impressioni ad recedendum seu gravitati iterum fit aequalis, nempe in X. Itaque in X est maxima recedendi velocitas. Et ex eo praevalet gravitas seu nova impressio accedendi, licet adhuc satis diu praevaleat totus recedendi impetus seu summa omnium impressionum recedendi inde

ab Ω acquisitarum, super totum impetum accedendi inde ab Ω denuo impressum. Sed cum tamen hic magis crescat quam ille, post X, tandem ei fit aequalis in A, ubi mutuo destruuntur, et recessus cessat, id est reditur ad Aphelium A. Atque ita omnibus impressionibus pristinis contrariarum aequalium compensatione consumtis, res redit ad statum primum, atque omnia de integro perpetuis lusibus repetuntur, donec longa dies perfecto temporis orbe, rerum constitutioni mutationem notabilem afferat. Illud autem egregium est, quod ex singulari privilegio circulationis harmonicae compositio motuum physica consentit cum Geometrica, nam si planeta cum aethere deferente alia quam harmonica circulatione moveretur, non possent consentire motus planetae et motus aetheris, sed planeta ex impetu concepto pristino vel velocius vel tardius ipso aethere ambiente circularetur, unde perpetuus esset conflictus seu motuum perturbatio. Et supponi potest ita initio contigisse, donec post colluctationem planeta aetherque ambiens in motus conspirantes consensere. Nunc enim, quod mirabile est, dum aether circulatur harmonice, planeta in eo perinde movetur ac in vacuo, tanquam solo concepto impetu pristino et superveniente gravitatis solicitatione moveretur nec adesset deferens fluidum, manifestum enim est, nihil interesse utrum motum in ${}_2M_3M$ componas ex motu in ${}_2M_2D$ (paracentrico) et in ${}_2D_3M$ (circulatorio harmonico), an vero ex conatu in ${}_3MG$ (gravitatis solicitantis) et impetu semel concepto in G_3M vel ${}_2ML$ (aequali pristino impetui ${}_1M_2M$). Et quoniam ipsa vi hujus compositionis impetus pristini cum gravitate nascitur talis planetae velocitas circulatoria, qualem Analysis Geometrica exhibet (nempe harmonica), quam eandem esse contingit cum velocitate circulatoria aetheris ambientis, vicissim fit ut planeta ita circuletur in aethere, quasi ab ipso placidissime deferretur ut infixus in aliquo solido orbe quantum ad hanc circulationem. Unde etiam analysis conatus paracentrici geometrica in solicitationem gravitatis et duplum conatum centrifugum, id est duplum ejus qui esse debere videretur, nil turbat in compositione physica, postquam nunc planeta ob consensum circulandi semel acceptum non amplius ab aethere deferente vim recipit, sed movetur tanquam liber et sui juris, atque ita licet non amplius physice patiatur, tamen Geometrice exhibet circulationem. Loquor autem de illo aethere deferente qui in magno orbe cum planetis fertur in zodiaco circa Solem, analogus vento illi constanti apud nos in-

tam liquidi spiritui circa globum telluris et secum aliquando in-lusos fluctus. Sed hoc aethere incomparabiliter subtilior est materia illa quae ipsam gravitatem et magnetismum sive in tellure sive in magno orbe facit, et fortasse non planetarum tantum motus, sed et ipsum ventum eos deferentis producit, dum scilicet impetui ab hujus vapti materia undecunque concepto (cum nihil penitus quiescat in natura) accedens a subtilissimo fluido solicitatio gravitatis harmonicam circulationem efficit in quovis ventum componente corpore (modo explicato), qui impetus eo jam reductus erit, ut motus inde natus ex accedente solicitatione gravitatis maxime consentiat motui planetarum. Interim non putandum est, haec omnia Geometrica quadam praecisione et absoluta exactitudine fieri, cum ob omnium planetarum, imo corporum Universi actionem in se invicem nihil sit tale in natura; quod omnino definitas et a finitae virtutis mente cogitabiles habeat proprietates ideales Geometricas Dynamicasque; sufficit enim aberrationes materiae ab ideis definitis non esse magnas respectu sentientis. Quousque autem sint notabiles observationibus, indagandum est, ut paulatim ipsae quoque deviationes primariae repertis causis ad certas leges alligentur. Sed nunc in viam redeamus.

28) Habemus ergo in Motu Planetae Elliptico sex puncta inprimis notabilia: quatuor quidem obvia, A et Ω Aphelii et Perihelii, itemque E et B mediae distantiae (nam ⊙B vel ⊙E est dimidius axis major AΩ adeoque medium arithmeticum inter ⊙A maximam et ⊙Ω minimam digressionem), et duo a nobis addita W et X extrema lateris recti WX ad axem in foco ⊙ ordinatim applicati, quae sunt puncta maximae velocitatis, illud W recedendi, hoc X accedendi (per 24), ubi etiam (per 26) impetus ex continua gravitatis impressione conceptus ab A usque ad W praecise est dimidius ejus, qui toto descensu ab A usque ad Ω concipitur; similiter conceptus ab Ω usque ad X dimidius ejus qui concipitur ab Ω usque ad A. Et omnino impetus a gravitate concepti per AW, WΩ, ΩX, XA sunt aequales.

29) Tempus jam est, ut tradamus causas quae speciem Ellipseos planetariae definiunt. Datus focus Ellipseos ⊙, qui est locus Solis. Dato jam loco A ubi Planetam Sol attrahere incipit, velut maxima planetae distantia, datur remotior ab hoc foco Ellipseos vertex. Data porro ratione gravitatis seu virtutis, qua Sol planetam trahere incipit, ad conatum centrifugum, qua ibi cir-

culatio planetam excutere et a Sole repellere nititur, hinc datur et latus rectum Ellipseos principale WX seu ordinatim applicata in foco ⊙. Nam ⊙A data, est ad ⊙W semilatus rectum, in ratione data attractionis solaris ad duplum conatum centrifugum. Quod si jam quarta pars lateris recti detrahatur a maxima digressione data A⊙, erit residuum ad A⊙ ut A⊙ ad AΩ; datur ergo AΩ major axis Ellipseos seu latus transversum. Datis ergo punctis ⊙, A, W vel X, datur et Ω, atque hinc porro et C centrum Ellipseos, et alter focus F, et axis transversus BE, adeoque Ellipsis. Nec minus dantur omnia, si pro A initio daretur Ω.

30) Ex his simul patet, quomodo Ellipsis vel (qui sub ea continetur) circulus, non alia conica sectio, a planetis describatur. Et circulus quidem oritur, cum attractio gravitatis et dupla vis centrifuga a circulatione orta ab initio attractionis sunt aequales; ita enim aequales manebunt, nulla existente causa accessus aut recessus. Sed cum initio (vel in statu destructorum priorum impetuum contrariorum accedendi recedendive, qui initio aequivalent, hoc est in Aphelio vel Perihelio) attractio et duplus conatus centrifugus sunt inaequales, modo (per 25) conatus centrifugus simplex sit minor attractione, describitur Ellipsis, et praevalente attractione, initium est Aphelium, sin praevaleat duplus conatus centrifugus, est Perihelium. Si conatus centrifugus simplex attractioni sit aequalis, Parabola, si major, Hyperbola orietur, cujus focus intra ipsam sit Sol. Quod si Planeta non gravitate, sed levitate esset praeditus, nec traheretur, sed repelleretur a Sole, Hyperbolae opposita oriretur, cujus nempe focus extra ipsam Sol esset. Manifestum autem est ideo planetas nostros non ferri in Parabola aut Hyperbola, quia si unquam sic moti fuere, dudum in mundana spatia abscessere, neque enim tales lineae redeunt in se. An Cometae in Parabolis Hyperbolisve aut similibus ferantur, an potius ipsorum quoque motus post longa intervalla ad priora vestigia revertantur, observationibus relinquendum est. Porro Planetariae Ellipses vel ideo non admodum a circulis abeunt, quod ita minus pugnant inter se, nec circuli tamen perfecti evasere, quod alii planetae aliis soliditate adeoque potentia praevaluere, quae res et distantias eorum definivit. Caeterum superesset ut distinctius exponeremus motum vorticis solaris, ut in eo gravitatis atque magnetismi causae legesque melius intelligi possent perfectiusque a priori explicaretur radiatio, cujus naturae jam tum convenire ostendimus gravitatis

solicitationis esse in duplicata ratione viciniarum; et praeterea ipsas etiam diversorum ejusdem systematis planetarum motus comparari, quo eaque intelligatur, cur ex miranda Kepleri observatione tempora periodica sint in sesquiplicata ratione distantiarum. Sed haec peculiarem operam merentur omnia, ut pro dignitate tractari possint, nec commode Schediasmati ab hac tractatione alieno et illis tantum in specimen apposito, quo melius meditationum nostrarum dynamicarum usus appareret, nec proinde nimis extendendo, includi possunt.

Beilage.

Leibniz an Hugens *).

Je suis bien marri de n'avoir sçeu la nouvelle obligation que je vous avois apres tant d'anciennes, que par votre lettre de Voorburg du 24. d'Aoust, je me suis d'abord informé où pouvoit estre demeuré vostre paquet, et enfin on me l'a apporté il y a quelques semaines; je vous en dois remercier de toutes les manieres. Vos presens me sont precieux, et je puis dire, que celuy que vous me fistes à Paris de vôtre excellent ouvrage sur les pendules a esté un de plus grands motifs des progrés que j'aye peutestre faits depuis dans ces sortes de sciences. Car m'efforçant de vouloir entendre des pensées qui passoient de beaucoup les connoissances que j'avois alors en ces matieres, je m'estois enfin mis en estat de vous imiter en quelque chose. Apres cela vous pouvés juger quel estat je dois faire de ce qui vient de vostre part, puisque cela me porte tousjours des lumieres. Et rien n'en avoit plus besoin que la lumière même. Quand vôtre traité sur ce sujet ne me seroit venu que par les voyes ordinaires des libraires, je ne l'aurois pas moins consideré comme une grace que vous m'auriés faite, le bien que vous avés fait à tous, touchant plus particulierement ceux qui en peuvent profiter d'avantage par le goust qu'ils prennent à la matiere. Maintenant que vous m'envoyés vous mêmes vôtre ouvrage si attendu depuis tant d'années, cette distinction favorable m'oblige

*) Dieser Brief ist in mehreren Entwürfen und in zwei von Leibniz revidirten Abschriften vorhanden.

ençor plus etroitement, et me fait joindre la reconnoissance que je vous en dois, à celle qui m'est commune avec tout le genre humain, dont vous augmentés le veritable thresor par vos decouvertes importantes, quoyque le nombre de ceux qui en puissent connoistre le prix soit mediocre. Je me sçay bon gré d'en estre: ille se profecisse sciat, cui ista valde placuerint. Si j'avois l'âge et le loisir du temps de mon sejour à Paris, j'espererois qu'il me pourroit servir en Physique comme vôtre premier present me fit avancer en Geometrie. Mais je suis distrait par des occupations bien differentes qui semblent me demander tout entier. Et ce n'est que par échappades que je puis m'en écarter quelques fois, cependant le plaisir et l'utilité qu'il y a à communiquer avec vous me fait profiter de l'occasion. J'ay lû vôtre ouvrage avec la plus grande avidité du monde; je l'avois fait chercher à Hambourg il y a déjà quelques mois, mais on me manda, que quelque peu d'exemplaires qui y estoient venus estoient déjà disparus.

L'usage que vous faites des ondes pour expliquer les effects de la lumiere m'a surpris, et rien n'est plus heureux que cette facilité, avec laquelle cette linge qui touche toutes les ondes particulieres et compose l'onde generale satisfait aux loix de reflexion et de refraction connues par l'experience. Mais quand j'ai vû que la supposition des ondes spheroidales vous sert avec la même facilité à resoudre les phenomenes de la refraction disdiaclastique du cristal d'Islande, j'ay passé de l'estime à l'admiration. Le bon Pere Pardies parloit aussi d'ondes, mais il estoit bien éloigné de ces considerations comme vous avés remarqué vous même p. 18. où vous dites qu'on le pourra voir si son écrit a esté conservé. Mais sans chercher cet écrit on le pourra juger par un petit livre de dioptrique du Pere Ango Jesuite, qui avoue d'avoir eu les papiers du P. Pardies entre les mains, et d'en avoir puisé la consideration des ondes. Mais lors qu'il pretend d'en tirer la regle des sinus pour la refraction (car c'estoit là, où je l'attendois), il se trompe fort, ou plustost il se mocque de nous en forgeant une demonstration apparente qui suppose adroitement ce qui est en question. Je voudrois que vous eussiés voulû nous donner au moins vos conjectures sur les couleurs et je voudrois sçavoir aussi quelle est vôtre pensée de l'attraction que M. Newton reconnoist après le P. Grimaldi dans la lumiere à la p. 231 de ses Principes,

item quelles sont les experiences nouvelles sur les couleurs que M. Newton vous a communiquées, si vous trouvés à propos d'en faire part. Le crystal d'Islande n'a-t-il rien fourni de particulier sur les couleurs?

Apres avoir bien consideré le livre de M. Newton que j'ay vû à Rome pour la premiere fois, j'ay admiré comme de raison quantité de belles choses qu'il y donne. Cependant je ne comprends pas comment il conçoit la pesanteur, ou attraction. Il semble que selon luy ce n'est qu'une certaine vertu incorporelle et inexplicable, au lieu que vous l'expliqués tres plausiblement par les loix de la mecanique. Quand je faisois mes raisonnemens sur la Circulation harmonique, c'est à dire, reciproque aux distances, qui me faisoit rencontrer la regle de Kepler [du tems proportionel aux aires], je voyois ce privilege excellent de cette espece de circulation: qu'elle est seule capable de se conserver dans un milieu qui circule de même, et d'accorder ensemble durablement le mouvement du solide et du fluide ambiant. Et c'estoit là la raison Physique que je pretendois donner un jour de cette circulation, les corps y ayant esté determinés pour mieux s'accorder ensemble. Car la circulation harmonique seule a cela de propre que le corps qui circule ainsi, garde precisement la force de sa direction ou impression precedente tout comme s'il estoit mû dans le vuide par la seule impetuosité jointe à la pesanteur. Et le même corps aussi est mû dans l'ether comme s'il y nageoit tranquillement sans avoir aucune impetuosité propre, ny aucun reste des impressions precedentes, et ne faisoit qu'obeïr absolument à l'ether qui l'environne, quant à la circulation (le mouvement paracentrique mis à part), car comme j'avois monstré dans les Actes de Leipzig p. 89 au mois de Fevrier 1689, la circulation $D_1 M_2$ ou $D_2 M_3$ estant harmonique, et $M_3 L$ parallele à $\odot M_2$, rencontrant la direction precedente $M_1 M_2$ prolonguée en L, à lors $M_1 M_2$ est égale à $M_2 L$ (ou à GM_1 le graveur a oublié la lettre G entre T_2 et M_2 marquée dans ma description) et par consequent la direction nouvelle $M_2 M_3$ est composée tant de la direction precedente $M_2 L$ jointe à l'impression nouvelle de la pesanteur, c'est à dire à LM_3, que de la velocité de circuler de l'ether ambiant $D_1 M_3$ en progression harmonique jointe à la velocité paracentrique déjà acquise $M_2 D_1$ en progression quelconque. Mais quelque autre circulation qu'on suppose hors l'harmonique, le corps gardant l'im-

pression precedente $M_2 L$ ne pourra pas observer la loy de la circulation $D_1 M_3$ que le tourbillon ou l'ether ambiant luy voudra prescrire, ce qui fera naître un mouvement composé de ces deux impressions. C'est pourquoy les corps circulans tant liquides que solides après bien des combats et contestations ont esté enfin reduits à cette seule espece, où ils s'accordent avec ceux qui les environnent, et où chacun ne va que comme seul ou comme dans le vuide. Cependant je ne m'estois pas avisé de rejetter avec M. Newton l'action de l'ether environnant. Et encor à present je ne suis pas encor bien persuadé qu'il soit superflu. Car bien que M. Newton satisfasse quand on ne considere qu'une seule planete ou satellite, neantmoins il ne sçauroit rendre raison par la seule trajection jointe à la pesanteur, pour quoy toutes les planetes d'un même systeme vont à peu pres le même chemin et dans le même sens. C'est ce que nous ne remarquons pas seulement dans les planetes du soleil, mais encor dans celles de Jupiter et dans celles de Saturne. C'est une marque bien evidente, qu'il y a quelque raison commune qui les y a determinés, et quelle autre raison pourroit-on apporter plus probablement, que celle d'une espece de tourbillon ou matiere commune, qui les emporte? Car de recourir à la disposition de l'auteur de la nature, cela n'est pas assés philosophique, quand il y a moyen d'assigner des causes prochaines; et il est encor moins raisonnable d'attribuer à un hazard heureux cet accord des planetes d'un même systeme, qui se trouve dans tous ces trois systemes, c'est à dire dans tous ceux qui nous sont connus. Il m'etonne aussi que M. Newton n'a pas songé à rendre quelque raison de la loy de la pesanteur, où le mouvement Elliptique m'avoit aussi mené. Vous dites fort bien, Monsieur, pag. 161 qu'elle merite qu'on en cherche la raison. Je seray bien aise d'avoir vôtre jugement sur ce que j'avois pensé là dessus, et que j'avois gardé pour une autre fois, quand j'avois donné mes premieres pensées dans les Actes comme j'ay declaré sur la fin. En voicy deux voyes, vous jugerés laquelle vous semble preferable, et si on les peut concilier: concevant donc la pesanteur comme une force attractive qui a ses rayons à la façon de la lumiere, il arrive que cette attraction garde precisement la même proportion que l'illumination. Car il a esté demonstré par d'autres que les illuminations des objets sont en raison reciproque doublée des distances du point lumineux, d'autant que les illumi-

nations en chaque endroit des surfaces spheriques sont en raison reciproque des dites surfaces spheriques par lesquelles la même quantité de lumiere passe. Or les surfaces spheriques sont comme les quarrés des distances. Vous jugerés, Monsieur, si on pourroit concevoir, que ces rayons viennent de l'effort de la matiere qui tache de s'eloigner du centre. J'ay pensé encor à une autre façon qui ne reussit pas moins, et qui semble avoir plus de rapport à vôtre explication de la pesanteur par la force centrifuge de la circulation de l'ether, qui m'a tousjours parue fort plausible. Je me sers d'une hypothese qui me paroist fort raisonnable. C'est qu'il y a la même quantité de puissance dans châque orbite ou circonference circulaire concentrique de cette matiere circulante; ce qui fait aussi qu'elles se contrebalancent mieux et que chaque orbe conserve la sienne. Or j'estime la puissance ou force par la quantité de l'effect, par exemple la force d'élever une livre à un pied est le quart de la force capable d'élever une livre à quatre pieds, à quoy on n'a besoin que du double de la vistesse; d'où il s'ensuit que les forces absolues sont comme les quarrés des vistesses. Prenons donc par exemple deux orbes ou circonferences concentriques; comme les circonferences sont proportionelles aux rayons ou distances du centre, les quantités des matieres de châque orbe fluide le sont aussi; or si les puissances de deux orbes sont égales, il faut que les quarrés de leur velocités soyent reciproques à leur matieres, et par consequent aux distances; ou bien les velocités des orbes seront en raison reciproque soubsdoublée des distances du centre. D'ou suivent deux corollaires importans, tous deux verifiés par les observations. Le premier est, que les quarrés des temps periodiques sont comme les cubes des distances. Car les temps periodiques sont en raison composée de la directe des orbes ou distances et de la reciproque des velocités; et les velocités sont en raison soubsdoublée des distances; donc les temps periodiques sont en raison composée de la simple des distances et de la soubsdoublée des distances; c'est à dire les quarrés des temps periodiques sont comme les cubes des distances. Et c'est justement ce que Kepler a observé dans les planetes du soleil, et ce que les découvertes des satellites de Jupiter et de Saturne ont confirmé merveilleusement, suivant ce que j'avois vû remarqué par M. Cassini. L'autre Corollaire est celuy dont nous avons besoin pour la pesanteur, sçavoir que les tendences centri-

fuges sont en raison doublée reciproque des distances. Car les tendences centrifuges des circulations sont en raison composée de la directe des quarrés des velocités et de la reciproque des rayons ou distances. Or icy les quarrés des velocités sont aussi en raison reciproque des distances, donc les tendences centrifuges sont en raison reciproque doublée des distances, justement comme les pesanteurs doivent estre. Voila à peu près ce que j'avois reservé à un autre discours, lorsque je donnois mes essais au public, mais il y a de l'avantage à vous faire part des pensées qu'on a, puisque c'est le moyen de les rectifier. C'est pourquoy je vous supplie de me faire part de vôtre jugement la dessus. Après ces heureux accords vous ne vous étonnerés peutestre pas, Monsieur, si j'ay quelque penchant à retenir les tourbillons et peutestre ne sont-ils pas si coupables, que M. Newton les fait. Et de la maniere que je les conçois, les trajections mémes servent à confirmer les orbes fluides deferans. Vous dirés peutestre d'abord, Monsieur que l'hypothese de quarrés des vistesses reciproques aux distances ne s'accorde pas avec la circulation harmonique. Mais la réponse est aisée: la circulation harmonique se rencontre dans châque corps à part, comparant les distances differentes qu'il a, mais la circulation harmonique en puissance (où les quarrés des velocités sont reciproques aux distances) se rencontre en comparant des differens corps, soit qu'ils décrivent une ligne circulaire, ou qu'on prenne leur moyen mouvement (c'est à dire le resultat equivalent en abregé au composé des mouvemens dans les distances differentes) pour l'orbe circulaire qu'ils décrivent. Cependant je distingue l'ether qui fait la pesanteur (et peutestre aussi la direction ou le parallelisme des axes) de celuy qui defere les planetes, qui est bien plus grossier.

Je ne suis pas encor tout à fait content des loix Elastiques qu'on donne, car il semble que l'experience ne s'accorde pas assés avec la regle, que les extensions des cordes (par exemple) sont comme les forces qui les tendent. C'est pourquoy j'en desire sçavoir vôtre sentiment. Quant à la resistence du milieu je crois d'avoir remarqué que les theoremes de M. Newton au moins quelques uns que j'avois examinés s'accordoient avec les miens. Ce qu'il appelle la resistence en raison doublée des velocités (en cas des temps égaux) n'est autre que celle, que j'appelle la resistence respective, qui m'est en raison composée des velocités et des ele-

mens de l'espece, sans considerer si les temps sont pris égaux ou non, de sorte que je crois que je ne me suis point éloigné encor de ce que vous en avés donné; mais il me faudroit du temps pour y mediter.

So viel enthalten die beiden Abschriften; in dem zweiten Entwurfe, der weiter geht, finden sich noch einige Stellen, die bemerkenswerth sind:

J'ay tousjours du penchant à croire que la variation de l'eguille aimantée a une cause reglée; quand on la decouvrira un jour, elle servira encor à mieux connoistre nostre systeme. M. Neuton n'y a pas touché, je ne doute point que vous n'y aies pensé, Monsieur, et je souhaitterois d'en sçavoir vôtre sentiment.

Kepler s'est avisé le premier qu'on pourroit expliquer la pesanteur par l'effort que font les corps circulans de s'éloigner du centre, pensée dont M. des Cartes s'est fait honneur dépuis.

X.

DE CAUSA GRAVITATIS, ET DEFENSIO SENTENTIAE AUTORIS DE VERIS NATURAE LEGIBUS CONTRA CARTESIANOS.

Cum a me in his Actis demonstratum esset, eandem Motus quantitatem non semper conservari posse, sed aliam constituendam naturae legem, conatus est respondere D. Abbas D. C. *) sed mente mea non intellecta imputatisque mihi opinionibus, a quibus eram alienissimus. De quo cum fuisset admonitus, silendum putavit, sive quod agnosceret sibi satisfactum (quod tamen profiteri aequum fuisset), sive ut alias rationes taceam, quod fortasse problema quoddam occasione nostrae controversiae a me propositum nollet attingere, quod postea prorsus ut a me factum erat, solvit celeberrimus Hugenius. Ego vero nuper demonstrationem constructionis illius atque ampliationem dedi in his Actis, et ne Dn. Abbas vel alius solutionem sibi praereptam queri posset, problema non-

*) De Catelan.

nihil immutatum ita proposui ad exercendam Cartesianorum analysin: In plano Lineam invenire, iu qua descendens grave aequaliter aequalibus temporibus a puncto dato recedat vel ad punctum datum accedat. Interea alius eruditus Gallus (Cl. Dominus P.*)) Dno. Abbati succenturiatus Cartesianorum opinionem defendere aggressus est in Actis Erud. A. 1689 p. 183 seqq., qui etsi statum controversiae non satis attigisse videatur, volui tamen ejus quoque dubiis satisfacere, praesertim cum alia non contemnenda attulerit, quae illustrandi argumenti occasionem praebent. Sic igitur ille: Galilaeum supponere, quod grave cadens aequalibus temporibus aequales acquirat velocitatis gradus. Hoc Blondellum libro de Bombis experimentis probare conatum, quasi nulla ejus daretur demonstratio a priori. Sed hanc Hugenium dedisse, ponendo motum materiae, quae gravia movet, infinitae esse celeritatis prae velocitatibus gravium cadentium, quae a nobis observari possunt, ac proinde grave sive initio cum adhuc quiescit, sive postea cum jam movetur, eodem modo quoad quantitatem impressi motus seu augmentum celeritatis a motore affici, cum comparatione motoris semper pro quiescente haberi possit. Quanta autem sit motoris velocitas, ex Hypothesi Cartesiana aestimasse Hugenium, ponendo gravitatem oriri, dum materia quaedam subtilis circa terram gyrata et a centro recedens alia corpora versus terram detrudat. Itaque experimento inquisivisse, quanta vis centrifuga in parvi circuli gyro gravitati aequipolleret, atque inde collegisse, in magno circulo, qualis metitur ambitum telluris, materiam illam tanta velocitate moveri, ut millies fere in una hora totum telluris ambitum percurrere possit. Atque haec quidem pulchra sunt et digna Hugenio, sed quae Noster de suo addit, non aeque admitti possunt. Putat scilicet hinc sese tollere posse nonnullas difficultates graves, quae doctis negotium facessiverunt. Nimirum Viri clarissimi Sturmius et Bernoullius in his Actis mutua συζητήσει consideratione dignum judicaverunt, qui fieret ex hypothesi Cartesiana, quod gravia non potius ad axem, quam centrum detruderentur. Hanc difficultatem Noster cessare putat, si modo consideretur, velocitatem materiae gravitatem efficientis incomparabiliter esse majorem velocitate ipsius gyri telluris, ita enim differentiam velocitatis, quae

*) Papin.

est in aequatore vel in alio quocunque parallelo, nullius momenti esse comparatione velocitatis illius maximae. Eadem (si ipsi credimus) facilitate meo argumento satisfieri contra Cartesianos putat. Nempe quia infinita fit motoris gravium velocitas, hinc perinde ac si grave quiesceret, ut ab initio, semper aequalibus temporibus tantundem ictus imprimi, adeoque vires esse ut tempora, non ut spatia ascensuum vel descensuum, quemadmodum ego quidem existimaveram. Postremo cum Autor Novellarum Reipublicae literariae esset veritus, ne ipsa materia primi Elementi vi centrifuga a Sole recederet prae globulis secundi Elementi, atque ita dispergeretur Sol, item ne vortex telluris dispergeretur in verticem Solis, quippe majores longe circulos describentem, adeoque minori (caeteris paribus) vi centrifuga praeditum; respondit introducendo quandam partium congruitatem vel incongruitatem, quae retineat alioquin aufugituras. Hactenus ille.

Ad quae sequentia repono: (1) Galilaeus non supposuit tantum in gravibus motum aequalibus temporibus aequaliter acceleratum, sed etiam rationibus atque experimentis confirmare nisus est, nec certe temere in eam sententiam devenit. (2) Confundit noster Objector demonstrationem veritatis alicujus cum causae redditione per quandam hypothesin, nec fortasse Hugenii consilium satis percepit, cujus institutum (quantum assequi licet) in ea quam posuimus ratiocinatione non fuit demonstrare, eam esse accelerationis gravium naturam quam diximus, sed posito (ex phaenomenis forsan) talem esse, explicare modum verisimilem, quo possit oriri. (3) Absolutam autem hujus veritatis demonstrationem dedimus a priori in Dynamicis nostris, nulla hypothesi adhibita, tantum exponendo ex vulgaribus phaenomenis, grave in loco altiore et depressiore ejusdem esse ponderis, quod in differentiis altitudinum minoribus utique quoad sensum indubitabile est. (4) Hypothesis, quam Cartesianam vocat, potius Kepleriana est, etsi a Cartesio magis exculta. Nam primus omnium Keplerus invenit gravitatis originem adumbrari posse, dum fluidum aliquod ex partibus solidioribus constans, in gyrum actum et a centro recedere tentans, minus solida innatantia ad centrum detrudit. Hac ejus cogitatione, quemadmodum et aliis pluribus, in rem suam usus est Cartesius, autorem (pro more suo illaudabili) dissimulans, quemadmodum et ex Kepleri Paralipomenis in Vitellionem sumsit explicationem aequalitatis anguli incidentiae

et reflexionis, per compositionem duorum motuum, et a Snellio didicit veram regulam refractionis. Et sane licet vir summus fuerit Cartesius, his tamen artificiolis multum solidae laudis amisit apud judices intelligentes. (5) Etsi recte assumatur, incomparabiliter majorem esse velocitatem materiae gravitatem facientis, quam ipsorum apud nos gravium, non tamen necessarium hoc est ad explicandam gravium accelerationem aequabilem per vim centrifugam, uti Objector existimare videtur, forsan non percepta satis Hugenii mente. Quod ut appareat, fingamus (fig. 20) tubum horizontalem TV longissimum, utrinque clausum, plenum hydrargyro, in quo prope extremum V sit in loco G globus G vitreus, vel ex alia materia factus quae minus densa vel minus solida sit hydrargyro nec ab eo corrodatur. Si jam tubus hic cylindricus in eodem plano horizontali manens rotetur circa alterum extremum T immotum, tunc Mercurius recedere tentans a centro tendensque versus V, inde pellet globum eumque coget tendere versus T sine ullo ascensu. Imo etsi tubus nonnihil ad horizontem sit inclinatus, ita ut extremum T sit inferius quam V, nihilominus vi circulationis sufficienter rapidae effici poterit, ut globus in hydrargyro alioqui nataturus descendat ab V versus T, aptissima gravitatis repraesentatione. Causa autem, cur haec vis centrifuga materiae recedentis a centro alia minus recedentia ad centrum pellat, distincte ita explicari potest, quod materia B (Mercurius), recedens a centro T, sese insinuare conatur inter C (Mercurium) et corpus $_{1}G$ (globum), cumque Mercurius C non possit amplius propelli, obstante operculo tubi V, repelletur corpus $_{1}G$ versus T seu ad $_{2}G$. His jam positis, cum continue crescat celeritas qua globus G tendit versus centrum T, contra tubi circulantis celeritas versus centrum decrescat, fiet alicubi, velut in $_{2}G$, ut tubi circulantis et globi recta ad centrum tendentis aequalis sit velocitas. Nihilominus tamen, si tanta fingatur tubi longitudo, ut punctum $_{2}G$ adhuc longe absit a centro T, exempli causa multis miliaribus, tunc globo tendente porro a $_{2}G$ ad $_{3}G$ intervallo licet multorum passuum, non mutabitur notabiliter celeritas circulationis, nec discrimen erit notabile inter $_{2}G$ et $_{3}G$, adeoque nec mutabitur notabiliter vis centrifuga, quae globo inter $_{2}G$ et $_{3}G$ continue imprimitur; adeoque perinde erit, ac si globus in G eodem loco maneret aequalibusque temporibus aequales impressiones reciperet. Jam idem, quod in tubo finximus, in aethere contingit revera, si quidem ab ejus vi centri

fuga oritur gravitas. Nam ob maximam a centro (nempe telluris) distantiam exiguum intervallum, quo grave apud nos inter cadendum centro accedit, nullum facere potest discrimen notabile, ac proinde vel hinc oritur aequalibus temporibus aequalis celeritatum impressio, etsi non esset tanta aetheris rapiditas. At si gravitatem non a vi centrifuga circulationis, sed materia quadam, gravia venti instar versus terram pellente petamus, tum demum ad explicanda proportionalia temporibus gravitatis incrementa necessaria est, ut illa celeritas venti incomparabiliter major ea, quam gravia apud nos acquirunt.

6) Etsi valde dudum inclinaverim ipse ad gravitatem a vi centrifuga materiae aethereae circulantis repetendam, sunt tamen aliqua quae dubitationes gravissimas injecere. Et ut caetera nunc taceam, necesse est aetherem hunc circa terram moveri non in aequatore et parallelis, sed in circulis magnis, quales sunt meridiani (alioqui gravia non ad centrum, sed axem terrae tenderent), sed ita necesse est, aetherem illum versus polos esse multo confusiorem; unde non apparet, quomodo gravia eodem modo in locis aequatori et polo vicinis versus centrum impellantur, quod tamen fieri, nec discrimen observari adeo notabile, phaenomena docent. Huic difficultati si remedium haberetur, facilius credi posset excogitata a Keplero causa gravitatis. (7) Alia ejusdem assignari posset causa non obnoxia huic difficultati, concipiendo displosionem materiae cujusdam ex globo telluris aut alterius sideris in omnes partes propulsae, quae radiationem quandam producat, radiationi lucis analogam; ita enim habebimus recessum a centro materiae aethereae, quae corpora crassiora eandem (ut alibi explicabo) vim recedendi non habentia versus centrum depellet, seu gravia reddet.

8) Cogitandum etiam relinquo, an quae causa globum terrae, cum fluidus esset, rotundarit; scilicet varius in omnem plagam tendens fluidi ambientis motus (qualis guttas olei in aqua format) qui a diversae naturae partibus turbatur, etiam partes telluris ad ipsam detrudat, dum interim ipsa tellus similiter heterogenea, ut paulo ante diximus, expellit a se. (9) Miror quomodo clarissimus Objector in animum induxerit suum, posse hypothesi infinitae celeritatis circulanti aetheri attributa tolli difficultatem, quae cum alios, tum VV. Clariss. Sturmium et Bernoullium exercuit. Nam non ideo ad axem potius quam centrum telluris deprimi di-

centur gravia, quia major celeritas gyri terreni sub aequatore, quam in parallelis, sed quia ipsa materia aetherea in circulis minoribus aequatori parallelis gyrata et a centris eorum recedere tentans, gravia ad centra cujusque circuli, quae non in centrum telluris sed alias axis puncta cadunt, pelleret. Non igitur de celeritatis, sed directionis differentia quaeritur. Nec video quomodo in hac hypothesi occurri malo possit, nisi aetheri gravitatem immediate producenti motum velut magneticum ascribamus, non in aequatore et parallelis, sed in meridianis, ut jam olim a me annotatum est tam in scheda edita, tum in literis ad R. P. Kochanskium, qui eadem movebat. (10) Materiam primi Elementi Cartesiani, globulosque secundi, luminis autores, non multum moror; fictitia enim ambo censeo, et pro demonstrato habeo, nec primum nec secundum Elementum in natura dari, nec lumen in eo quem Cartesius describit conatu consistere. Caeterum quae causa guttas liquorum format, eadem et vorticem Solarem in mundo terrestremque in Solis vortice continet, explosaeque materiae suos limites circumscribit, ne, dum a centro vorticis recedere tentat, dispergatur. (11) Scilicet in omni fluido motus est varius in omnes plagas, qualem videmus in aqua baculo varie moto agitata; is autem interpositis partibus alterius texturae motusque nec satis perviis perturbatur, et obstacula repellere ac diminuere tentat: minus autem obstare constat, quae in figuras ejusdem superficiei capacissimas colliguntur. Porro non vortices tantum seu (nucleo demto) bullae, sed et omnes consistentiae seu cohaesiones primigeniae, atque ut ita dicam stamina rerum et bases texturarum a cuique massae propria et conspirante motus ratione oriuntur, quibus constitutis primae firmitatis causis, tum demum corporum (firmitatem jam hinc aliquam habentium) porro major aut minor contactus, atque inde ob ambientium resistentiam nata cohaesio in rationes venire potest. Motus scilicet vel, si mavis, vis motrix id unum est, quod materiam dividit et heterogeneam reddit, unde congruitas incongruitasque cum per se continua sit atque uniformis, ac ne figurae quidem et partes in ea reales seu actu determinatae intelligi aliter possint. Itaque cohaesionis quoque principium est, ac proinde oritur fluiditas a vario motu, firmitas a conspirante, ut jam olim explicuimus; vel potius nihil tam fluidum est, quin habeat firmitatis, nihil tam firmum, quin habeat fluiditatis gradum; sed denominationes fiunt a praedominante ad sensum.

12) Sed jam tandem ad sententiae meae defensionem veniendum est, qua fortasse non magnopere indigere adversus objectionem videri possit, quod in controversia est assumentem, nec ratiocinationis meae vim attingentem. Quia tamen Objectori tantum tribuo, ut quae ipsum decepere, etiam alios fallere posse putem, vel potius quia agnosco aliquid verbis meis ad summam claritatem defuisse, tentabo, an ipsimet, tanquam aequo judici, satisfacere possim. Demonstrabo igitur propositionem, quam negat, eaque occasione rem omnem (spero) in clara luce collocabo, postremo erroris fontem detegam. Sed ante omnia logomachiae excludenda occasio est; erunt enim, qui sibi permissum dicent vim definire per quantitatem motus, et duplicata corporis dati celeritate, vim ejus duplicatam dicere; neque hanc ego libertatem cuiquam nego, quam mihimet concedi postulo. Sed cum controversia nobis sit realis, utrum scilicet motus conservetur, an vero potius eadem quantitas virium eo sensu, prout a me accipitur, id est in ratione composita non ponderis et celeritatis, sed ponderis et altitudinis, per quam corpus ab agente vim habente attolli potest, facile de verbis transigemus. Itaque vim inaequalem habere hoc loco definiam, quorum unum si surrogare liceret in alterius locum, oriri posset motus perpetuus mechanicus; et surrogatum quidem habere dicetur vim majorem, alterum vero minorem; quod si ex surrogatione eorum tale absurdum, quale est motus perpetuus, oriri nequeat, vires ipsorum dicemus aequales. Hac definitione posita facile tanquam corollarium concedet Cl. Objector, eandem vim in corporibus conservari, seu eandem esse potentiam causae plenae, et effectus integri, vel status praecedentis et ex eo nati sequentis, ne scilicet succedat praecedenti aliquid fortius, ex quo motus perpetuus mechanicus oriri posset. Quale virium lucrum impossibile esse non diffitebitur, opinor, ut idem proinde sit in physicis et mechanicis reducere ad motum perpetuum mechanicum, et reducere ad absurdum. Hoc autem eodem sensu necesse est quoque vires esse in ratione composita ponderum et altitudinum, seu quod idem est, summam productorum ex ponderibus in altitudines (ad quas pondera attolli ex datis possunt) ductis; non vero summam factorum ex ponderibus in celeritates, ut Cartesiani sibi persuaserant, conservari. Quod ita nunc demonstrabo: ponamus (in exempli gratiam) globum A 4 librarum (fig. 33) [illegible] altitudine unius pedis $_1AE$ per lineam inclinatam $_1A_2A$

descendere, donec in planum horizontale EF perveniat, ibique procurrat ex $_{2}$A in $_{3}$A, uno celeritatis gradu per descensum quaesita. Porro in eodem plano horizontali quiescat alius globus B unius librae in loco $_{1}$B. Ponamus jam porro, omnem potentiam globi A transferri debere in globum B, ita ut A quiescente in horizontis loco $_{3}$A, solus deinde moveatur globus B. Quaeritur quantum celeritatis accipere debeat globus B, ut tantundem virium accipiat, quantum globus A habuit. Cartesiani dicent, globum B quadruplo minorem ipso A accepturum celeritatem 4 graduum seu quadruplo majorem celeritate ipsius A; tantundem enim virium habere A 4 librarum, celeritate ut 1, quantum B unius librae, celeritate ut 4. Sed ego ex tali surrogatione ostendam oriri posse motum perpetuum seu absurdum. Nam corpus B librae 1, celeritatem habens ut 4, ope ejus, motu sursum directo (ut si procurrendo ex $_{1}$B in $_{2}$B incidat in lineam inclinatam $_{2}$B$_{3}$B) ascendere poterit ad $_{3}$B seu ad altitudinem perpendicularem F$_{3}$B pedum 16, quia corpus A gradum celeritatis ut 1 acquisierat descendendo ex altitudine perpendiculari pedis 1, adeoque rursus ascendere posset ad pedem 1. Ergo gradu celeritatis quadruplo ascendi potest ad pedes 16; sunt enim altitudines, ad quas vi celeritatum ascendi potest, ut celeritatum quadrata. Sed jam hinc oriretur motus perpetuus seu effectus potentior causa. Nam globus B unius librae elevatus jam ad 16 pedes, a nobis porro sic adhiberi poterit, ut rursus inde descendens in horizontem ad $_{4}$B, facili quadam machinatione, verbi gratia, ope staterae rectilineae inclinatae, attollere possit globum A librarum 4 in horizontis loco $_{3}$A existentem, ad altitudinem perpendicularem prope 4 pedum. Sit enim statera pertingens a $_{3}$A ad $_{3}$B, in fulcro seu centro librationis C, divisa in brachia longitudine inaequalia (licet aequalia pondere) C$_{3}$A et C$_{3}$B, sic ut brachium C$_{3}$B sit paulo plusquam quadruplum brachii C$_{3}$A. Itaque globus B, incidens in extremum staterae $_{3}$B, globum A alteri extremo $_{3}$A superstantem vincet attolletque, quia major est reciproce ratio distantiarum a centro (nempe major quadrupla ex constructione), quam ponderum (quae ex hypothesi est quadrupla), et proinde B descendendo usque ad horizontem per altitudinem perpendicularem $_{3}$BF 16 pedum ex $_{3}$B in $_{4}$B, attollet A ex $_{3}$A in $_{4}$A ad altitudinem perpendicularem paulo minorem pedibus 4 defectu tam exiguo, quam velis. In praxi sufficit attolli A ad altitudinem perpendicularem pedum circiter 3, vel etiam adhuc minorem. Quod est absurdum. Initio enim A erat tantum elevatum

ad pedem 1, ipso B existente in horizonte; nunc vero in statu finali, B restituto ad horizontem, A non restitutum est ad pedem 1, quod ad summum fieri poterat remotis accidentalibus impedimentis, sed ascendit ad pedes plusquam 3 et prope 4, idque vi ipsius descensus sui ex unico illo pede, licet per interpositum corpus B, quod tamen nullam novam vim contribuisse, sed solam vim ipsius A habuisse supposuimus. Ita paene triplum virium lucrati sumus, et ut ita dicam ex nihilo eduximus: quae quidem absurda esse nemo intelligens diffitebitur. Nec jam motus perpetuus longe quaerendus est. Facile enim est efficere, ut globus A ex loco $_2A$ redeat ad primum locum $_1A$, et prius in itinere (cum lapsum habeat prope trium pedum) effectum aliquem mechanicum praestet: alia pondera elevet, machinas circumagat etc. Similiterque globus B, si locus $_2B$ tantillo altior ponatur horizonte, interim (dum A redit ad $_1A$) redire decurrendo poterit ad locum $_1B$; atque omnia redibunt ad statum priorem, effectu tamen mechanico notabili per supererogationem peracto; idemque porro repeti poterit iterum. Quae utique ferri non possunt. Hinc ut obiter dicam, ex Methodo nostra praesenti inventores motus perpetui in speciem plausibilis plerumque praebebunt occasionem novorum theorematum, quibus fallacia detegetur, ostendendo (quodam ut ita dicam Algebrae Mechanicae genere) aequationem latentem inter causam et effectum nulla arte violabilem. Et hujusmodi Aequatio nobis quoque hoc loco profuit ad veras translationis motuum leges inveniendas. Itaque dicendum est B (unius librae) si deberet accipere potentiam ipsius A (quatuor librarum) seu si A, quod prius solum movebatur, deberet redigi ad quietem motu jam solum existente in B, quod prius quieverat, remoto omni alio agente vel patiente quod aliquam novam vim addat vel partem prioris absorbeat, tunc B non nisi duplam debere accipere celeritatem ejus, quam habuerat A. Itaque enim B non nisi ad 4 pedes ascendere poterit, nec A (licet stateram adhibeas) restitui nisi ad unum nec proinde tale orietur absurdum, ut status posterior seu effectus fiat potior causa seu statu, ex quo fuit natus, sed omnia praecise compensabuntur. Itaque eadem opera conclusimus contra Cartesianos, non semper debere conservari quantitatem motus. Cum enim prius A existente in motu, haberemus corpus ut 4 celeritate praeditum ut 1; nunc post translationem habemus corpus 1 celeritate praeditum ut 2; unde quan-

titas motus in posteriore rerum statu fit tantum dimidia prioris. Erunt alii casus, ubi augebitur quantitas motus. Idemque est in aliis plurimis translationibus virium, dum corpora in se invicem agunt, ut quantitas motus differat a quantitate virium a nobis explicata (quam quantitate effectus aestimari ostendimus) adeoque servari nequeat. Et generaliter si sit corpus A praeditum initio celeritate e, corpus vero B celeritate y; at post actionem sit corpus A praeditum celeritate (e), corpus autem B celeritate (y); et similiter altitudines, ad quas corpora A et B ascendere poterant, ante actionem sint (respective) x et z, post actionem vero (x) et (z); ajo debere esse $Ax + Bz = A(x) + B(z)$ ut eadem servetur potentia; unde utique sequitur, non semper posse esse $Ae + By = A(e) + B(y)$, seu non posse eandem semper servari quantitatem motus. Superest, ut erroris fontem paucis detegamus. Et quidem Clariss. Objector infinita aetheris motoris celeritate ne quidem opus habet, et libentissime ipsi sine probatione concedo, celeritates acquisitas vel perditas libero descensu vel ascensu esse ut tempora. At ego VIRES MOTRICES, id est eas, quae conservandae sunt, ostendi non esse aestimandas gradibus celeritatis. Plerosque autem doctissimos alioqui Viros decepit praejudicium ex schola, quo concipiunt motum et celeritatem (motus gradum) tanquam realem quandam et absolutam in rebus entitatem, et quemadmodum eadem salis quantitas per minorem aut majorem aquae copiam diffunditur, qua similitudine et Rohaultius (quantum memini) utebatur. Unde mirum ipsis videtur, augeri vel minui posse quantitatem motus sine miraculo Dei creantis vel annihilantis. Sed motus in respectu quodam consistit, quin et cum rigide loquendo nunquam existat, non magis quam tempus, aliaque tota, quorum partes simul esse non possunt, eo minus mirum esse debet, quantitatem ejus eandem non conservari. Sed vis ipsa motrix (seu status rerum, unde mutatio loci nascitur) est absolutum quiddam et subsistens, ejusque adeo quantitatem a natura non curari. Unde etiam discimus aliquid aliud in rebus esse, quam extensionem et motum, quod quanti momenti sit, sciunt intelligentes. Etsi autem prima specie videatur, duplicata celeritate ejusdem corporis, duplicare et vim ejus, admitti tamen hoc non potest. At, inquies, si corpus A habeat gradum aliquem celeritatis, et eidem corpori rursus superveniat aequalis priori celeritatis gradus, utique id quod

erat prius videtur perfecte duplicatum seu repetitum: sed respondeo negando, tum demum enim id, quod prius erat, erit exacte duplicatum, cum corpori A celeritatem habenti ut 1 adjicietur aliud corpus B, aequale ipsi A, etiam celeritatem habens ut 1, quo facto fateor et vim duplicatam. Quomodo autem potentiae multiplicatio obtineatur, corpore licet non multiplicato, habetur methodo supra explicata. Fuere etiam quibus errandi causa praebita est, quod putarunt in potentia aestimanda non solius effectus, qui producitur, hoc loco habendam rationem, sed et temporis, quo producitur; itaque non debere potentiam aestimari sola ratione compositae ponderis et altitudinis, ad quam pondus per potentiam attolli potest. Et sane verum est, temporis rationem quoque habendam in illis effectibus producendis, ubi eadem potentia longiore tempore concesso majorem effectum producere potest, uti fit cum globus datam habens celeritatem, potentiam habet pondus suum transferendi in plano horizontali per datum spatium tempore dato; sed hoc in effectibus potentiisque, de quibus hic agitur, secus est, ubi vis agendo consumitur, et quidquid vi praeditum est (ut arcus tensus ad certum gradum, corpus habens certam velocitatem) si secundum unum operandi modum totam suam actionem impendat in datum pondus elevandum ad certam altitudinem, nulla alia machinatione vel artificio idem pondus faciet altius assurgere, quantocunque tempore concesso. Unde frustranea fit temporis consideratio. Cum enim pondus illud ex ea altitudine delabens possit illam ipsam vim (ut tensionem dictam illius arcus, velocitatem dictam illius corporis) praecise reproducere (abstrahendo animum ab impedimentis accidentalibus), utique pondus altius sublatum post tempus quantumcunque, mox relabendo non tantum vim dictam primam reproducere posset, sed et aliquid praeterea efficere, atque ita daretur modus per sufficientem temporis longitudinem perveniendi ad motum perpetuum mechanicum. Quod est absurdum.

XI.

DE LEGIBUS NATURAE ET VERA AESTIMATIONE VIRIUM MOTRICIUM CONTRA CARTESIANOS RESPONSIO AD RATIONES A DN. PAPINO MENSE JANUARII ANNI 1691 IN ACTIS ERUDITORUM PROPOSITAS.

Cum varia impedimenta promptius responsuro obstiterint, facile a Clarissimi Antagonistae humanitate veniam spero. Ut brevitati, qua licet, consulatur, disquisitionem de causa gravitatis cum ipso nunc sepono. Primaria de virium aestimatione quaestio est, quas scilicet semper easdem natura conservat. Plerique vim aestimant producto ex mole in velocitatem, seu quantitate motus, unde et Cartesiani volunt eandem in natura motus quantitatem conservari. Ego contra ostendi in Actis Erudit. Mart. 1686 pag. 161, cum concessum sit a plerisque, potissimum ab ipsis Cartesianis, ejusdem potentiae esse elevare unam libram ad quatuor pedes, aut quatuor libras ad unum pedem: non posse vim aestimari per quantitatem motus, nec corpus librarum 4 velocitatem habens gradus unius tantum valere, quantum corpus librae unius velocitatem habens graduum quatuor, quoniam si illud unam libram possit elevare ad pedes 4, hoc eandem possit elevare ad pedes 16. Huic meo argumento quidam respondere conati sese ita implicuerunt, ut non satis rem percepisse videantur, dum concesserunt aestimationem potentiae in ratione molis et altitudinis, ad quam moles vel pondus attolli potest. Sed Dn. P. recte vidit, hac admissa, aestimationem in ratione molis et velocitatis stare non posse; itaque de hac persuasus, illam negat Act. Erudit. April. 1689 p. 183, et argumentum quoddam suum pro velocitate in pari mole viribus proportionali affert. Ego respondens Act. Erud. Maji 1690 p. 228 et rem altius repetens, docui ex contraria sententia sequi inaequalitatem causae et effectus, imo motum perpetuum, quae absurda videantur. *Virium inaequalium* ea esse definivi, quorum si unum aliquod in alterius locum substitui supponatur, nascatur motus perpetuus, seu effectus *potior* causa, et substitutum tum esse *potentiae majoris*, id cui substituitur *minoris*. Ostendi autem machinatione quadam adhibita, si globus quadrilibris velocitatem habens ut 1 totam suam vim transferre supponatur in globum unilibrem, isque proinde secundum vulgarem sententiam

debeat recipere velocitatem ut 4, oriturum esse effectum potiorem causa, seu motum perpetuum mechanicum. *Potius* autem hic voco, in quo vel in cujus effectu continetur alterum (*inferius*), aut ejus effectus et adhuc aliquid praeterea; seu *potius* et *inferius* vel *majus* et *minus* hoc loco sunt, cum contenta (formalia vel virtualia) hujus in illius contentis insunt et aliquid praeterea. Ita potius est, quod attollere potest libram ad 16 pedes, quam quod ad 4; nam illud etiam libram attollit ad 4 pedes et praeterea adhuc ad 12 pedes.

Clarissimus P. mense Januario Actorum hujus anni partim ad meum argumentum respondet, partim ad suum, quod nectit, accuratam responsionem jure suo postulat. Sequar praeeuntem eo libentius, quod et perspicaciam ejus et candorem animadverto. Interim ad argumenti mei partem tantum respondere videtur. Concedit candide, motum perpetuum ex vulgari sententia secuturum esse, si globi 4 librarum, velocitatis ut 1, tota vis transferri possit in globum unius librae, sed hoc fieri posse negat. *Ego* (inquit p. 9 Act. Erud. hujus anni) *et motum perpetuum absurdum esse fateor, et demonstrationem ex supposita translatione esse legitimam.* Et mox, *si mihi indicet rationem aliquam, qua tota vis motrix sine miraculo ex corpore majori transferri queat in minus et quiescens, ego vel motum perpetuum, vel victas manus dabo.* De ratione hoc efficiendi postea; nunc dicam ad vim mei argumenti, ea non omnino esse opus. Mihi enim satis fuit ostendere, 4 lib. veloc. 1, et 1 lib. veloc. 4 non posse esse virium aequalium, cum si *supponimus* unum in alterius locum substitui, sequatur motus perpetuus. Non igitur opus habeo, ut ostendam modum *actu* efficiendi hanc substitutionem. Si quis autem negat meam hanc virium aequalium et inaequalium definitionem (quam tamen Dn. P. admittere visus est), ego, ne de nomine litigemus, id tantum quaeram, an non reapse natura eam observet, seu an non caveat, ut nunquam ea sibi substituat *actu*, quorum saltem alterutro alteri subrogato motus perpetuus oriri possit. Certum est experimenta prorsus favere, nec ullum exemplum in contrarium extare. Hoc concesso, non habeo opus, ut tota vis corporis majoris actu transferatur in corpus minus; sufficit mihi exempli causa (quod concedere videtur Dn. P.) totam vim minoris in majus transferri posse. Itaque si tota vis 1 libr. veloc. 4 transferatur in corpus librarum 4, et hoc

adeo secundum vulgarem sententiam recipiat velocitatem ut 1, incidetur in id absurdum (contra concessa) ut eorum unum substituatur alteri, quorum alterum possit vicissim substitui ipsi, qui motus perpetuus oriatur. Et ita sequetur, naturam in transferendis viribus aequalitatis leges non servare effectuum respectu. Quod si etiam pro parte retineri vim, et pro parte transferri ponamus in idem tamen absurdum incidemus. Erunt fortasse, qui vel omnem aequalitatis inter causam et effectum legem tollent (quales sunt qui motum perpetuum admittentes quantumvis effectum per quantulumcunque produci posse putant) vel saltem negabunt quidem motum perpetuum, seu effectum causa potiorem esse possibilem; admittent tamen, ut effectus esse possit inferior causa. Sed vix credere possum, Dn. P. huc descensurum. Cum enim effectum causa potiorem esse non posse concesserit, videretur effugium quaerentis potius quam sibi satisfacientis, causam admittere majorem effectu totali, cum utrumque aeque a ratione abhorrere videatur. Sequeretur etiam, causam non posse iterum restitui suoque effectui surrogari, quod quantum abhorreat a more naturae et rationibus rerum, facile intelligitur. Et consequens esset decrescentibus semper effectibus nec unquam rursus crescentibus, ipsam rerum naturam continue declinare perfectione imminuta (fere ut in moralibus secundum Poëtam, aetas parentum pejor avis, tulit nos nequiores etc.) nec unquam resurgere et amissa recuperare posse sine miraculo. Quae in Physicis certe abhorrent a sapientia constantiaque Conditoris. Videturque inter prima principia hujus doctrinae recipi posse, ut semper causa et effectus (integra integro) aequipolleant. Et sane ipsius Dn. P. judicium et candorem appello, an rationi consentaneum ipsi videatur, ut pro potentia quae poterat attollere unam libram ad 16 pedes, oriatur mox potentia quae possit attollere unam libram non nisi ad 4 pedes? reliqua potentia nescio quomodo amissa et ut ita dicam annihilata, sine ullo vestigio effectuque relicto, quod utique contingeret, si pro 1 lib. veloc. 4 succedere posset 4 lib. veloc. 1. Quin imo effici poterit, ut totus effectus substitutus vix millesimam aut centesimam millesimam etc. partem ejus quod causa poterat, praestare possit. Nam si pro 1 lib. veloc. 1000 substituatur 1000 lib. veloc. 1. (quod secundum vulgarem sententiam fieri potest) effectus ad millesimam partem redigitur, quae videntur perabsurda. Et generaliter posito, primum dari A veloc. c, et B veloc. e, post translationes vero et con-

cursus esse A veloc. (c) et B veloc. (e), et secundum regulam vulgarem a Cartesianis maxime defensam, servandam esse quantitatem motus seu esse Ac + Be aequ. A (c) + B (e), tales assumi possunt numeri, ut eadem absurda oriantur.

Mirarer autem, si ipsi Dn. P. nihil subnatum esset scrupuli tum hinc, tum quod videret vim meae demonstrationis inevitabilem esse, nisi aliquid sine omni ratione possibile negetur, id est nisi naturae rerum denegetur facultas efficiendi, vel immediate et directe, vel mediate et per ambages, ut tota potentia majoris corporis alicujus transferatur aliquando in quoddam corpus minus antea quiescens. Profecto sententia quae eo redacta est, ut stare non possit, si hoc reperiatur possibile, valde laborat atque in periculo versatur. Ut taceam, non videri generalem naturae legem a tali conditione debere suspendi, et suspectum esse effugium, quod nulla postulata admittit, nisi actu procurata; ut si quis Archimedi postulanti negasset, aliquam rectam alicui curvae aequalem esse, quia nullam poterat Geometrice exhibere. Itaque prope mihi persuadeo, Dn. P. expensis omnibus tandem in nostram sententiam inclinaturum. Si quis tamen absurda paulo ante indicata concoquere posset, in ejus gratiam tentabo, quod Clarissimus Antagonista postulat, modum indicare, quo natura efficere possit, ut potentia corporis majoris transferatur in minus quiescens. Possum autem affere non unum. Et quidem si concedatur, posse totam vim minoris transferri in majus sive motum sive quiescens, igitur A motum, majus B quiescente dividamus in partes ipso B minores, totius A velocitatem retinentes, et cujuslibet deinde potentiam in B transferendo successive, tota ipsius A majoris potentia translata erit in B minus quiescens. Aliter: A et B connectantur linea rigida quantum satis est longa, et in ea sumatur punctum H quod ponatur sisti, ita ut compositum non progredi quidem, rotari tamen possit circa immotum punctum H, quod sit tam vicinum ipsi A et tam remotum a B, ut celeritas, quae inter circulandum competit ipsi A, sit quantumvis parva. Ita potest A haberi pro quiescente vel quasi, et tota quasi vis ejus soluto mox nexu seu linea rigida sublata, translata erit in B. Adhibeo lineas rigidas mole carentes, exemplo aliorum, qui et puncta gravia fingunt, aliisque id genus demonstrationum subsidiis utuntur, non utique aspernandis, quando non de praxi, sed rationibus indagandis agitur. Et compertum habeo, nunquam inde aliquid falsi deduci. Cum

Florentiae essem, dedi amico aliam adhuc demonstrationem pro possibilitate translationis virium totalium etc. corpore majore in minus quiescens, prorsus affinem illis ipsis quae Clariss. Papinus ingeniosissime pro me juvando excogitavit, pro quibus gratias debeo, imo et ago sinceritate ejus dignas. Quamvis enim mox ipse respondere tentet, et pag. 11 de instantia a se ipso facta ita disserat: Ad id respondeo, negari non posse validitatem hujus argumenti, si supponamus vectem perfecte durum et rigidum, verum non datur in rerum natura ejusmodi perfecta durities, spero tamen, omnibus expensis ipsummet animadversurum, vim argumenti non ita facile eludi posse. Pro certo enim habeo, leges naturae ac motus ita debere concipi, ut nullum oriatur absurdum, etiamsi corpora summe rigida ponantur, quemadmodum et Dn. Malebranchium admonui. Neque ullum, credo, exemplum contrarium afferetur. Quin et sufficeret ad argumenti efficaciam, non esse impossibilia corpora perfecte rigida, etsi actu non darentur. Ut taceam, talia corpora secundum atomorum patronos necessario debere reperiri in natura. Quin etsi concedamus, nulla dari corpora perfecte rigida, imo nec dari posse, quoniam tamen elastica corpora promtae admodum plenaeque restitutionis in effectu rigidis aequipollent idemque cum ipsis praestant, exiguo quantum voles discrimine, itaque si ipse vectis sit sufficienter rigidus, seu restitutionis quantum satis est plenae ac promtae, effici poterit ut aberratio a perfecte rigido sit data minor, adeoque vis omnis nostro argumento manebit, nec potuit motus perpetuus (saltem in theoria) evitari, nisi nuntius mittatur opinioni Cartesianorum.

Superest ut contrario Clarissimi Antagonistae argumento satisfaciam. Ejus enim speciositate videtur unice impeditus fuisse ne meae demonstrationi manus daret, quod et ipse pag. 11 innuit cum ait: Satis est mihi aliquod Argumenti dubium ostendere; quum enim supra allata demonstratio, qua Cartesianorum sententia probatur, sit evidentissima (id cujusmodi sit, nunc videbimus), modo adversa opinio eadem certitudine non gaudeat, satis liquet priorem esse proferendam. Cum ergo dubium meae demonstrationi objectum sustulerim, nunc contrarium argumentum solvere aggrediar. Quod huc redit: Quae aequalem vincere possunt resistentiam, eorum vires sunt aequales; sed corpus A 4 li-

brarum, habens velocitatem unius gradus, et corpus B librae unius, habens velocitatem 4 graduum, aequalem vincere possunt resistentiam; ergo corporum A et B vires sunt aequales. Minorem ratiocinatione pag. 8 (ad formam Logicam redacta) probat tali prosyllogismo: Quae aequalem numerum impressionum gravitatis vincere possunt, ea aequalem vincere possunt resistentiam; sed corpora A et B aequalem numerum impressionum vincere possunt. Ergo etc. Minor hujus prosyllogismi sic porro probatur: Si corpora A et B ascendant in planis similiter inclinatis (vel etiam ambo perpendiculariter), tempora, quibus suam ascendendi vim consument seu pervenient quousque possunt, erunt ut celeritates, uti constat ex Galilaei ratiocinationibus. Sed celeritates in nostro casu sunt reciproce ut corpora A et B (ex hypothesi), ergo et tempora ascendendi sunt reciproce ut corpora A et B; sed quantitas impressionum gravitatis ascensu superanda, est in ratione composita et corporis in quod fit impressio, et temporis quo durante fit impressio (quoniam si corpus pariter et tempus dividantur in partes aequales, aequalis est impressio in qualibet parte corporis et in qualibet parte temporis). Et ratio composita eorum, quae reciproce proportionalia sunt, est ratio aequalitatis. Itaque quantitas impressionum, seu numerus aequalium impressionum gravitatis in corpora A et B est aequalis. Ad hoc argumentum respondeo negando minorem Syllogismi principalis, et ad probationem respondeo negando majorem prosyllogismi ita habentem: Quae aequalem numerum impressionum gravitatis vincere possunt, ea aequalem vincere possunt resistentiam. Hanc, inquam, propositionem nego, sumendo scilicet resistentiam pro quantitate virium contrariarum. Et ne quis temere aut affectate eam a me negari putet, sciendum est, in ea contineri id ipsum quod est in quaestione. Cum enim impressio gravitatis nihil aliud sit quam gradus velocitatis cuivis parti impressus, utique si resistentiam seu vim contrariam paterer hac impressione mensurari, concederem vim aestimandam esse ex ductu velocitatis in corporis quantitatem, seu ex quantitate motus. Atque haec quidem ad oppositum mihi argumentum.

Ego vero, ut consilii mei rationes tandem aperiam, quantitatem resistentiae seu effectus non aestimo gradibus velocitatis, hoc est entibus modalibus sive incompletis, sed substantiis seu realibus absolutis; atque in hoc neglecto πρῶτον ψεῦδος adversae partis consistere arbitror, et ea judico VIRIBUS AEQUALIA esse,

quae aequalem numerum elastrorum aequalium vi sua ad eundem possunt tensionis gradum perducere, aut quae eundem numerum librarum possunt attollere ad altitudinem eandem supra cujusque situm priorem, vel etiam (si rem a physicis concretis ad pure mechanica traducere malimus) quae aequali numero corporum aequalium eandem velocitatem imprimere possunt, aut denique quae quamcunque rem potentia praeditam (tamquam mensuram) aequali numero repetitam exhibere possunt. Et duo VIRES INAEQUALIA eam judico inter se PROPORTIONEM VIRIUM HABERE, quae est proportio inter replicationes mensurae, verb gratia inter numeros aequalium inter se elastrorum, vel ponderum aequaliter ab ipsis intendendorum aut attollendorum, vel inter numeros corporum aequalium aequalem velocitatem ab ipsis recipientium. Hac aestimandi ratione vires reducuntur ad quandam mensuram, semper sibi congruam tantumque repetendam, et eveniet ut aestimatio, facta secundum unam mensuram pro arbitrio electam, succedat etiam secundum aliam quamcunque; alioqui natura careret legibus. Ast haec non succedunt, sed invicem pugnant in aestimatione per gradus velocitatis replicatos, quam ostendi cum aliis irrefragabilibus et semper inter se consentientibus aestimandi modis non consentire: cujus rei vera atque intima causa est, quod sic nulla, accurate loquendo, vera et realis mensura adhibetur. Etsi enim (quod probe notari velim) fatear, tria corpora aequalia et aequivelocia praecise triplo plus habere potentiae, quam eorum unum, quia una eademque mensura etiam hic ter repetitur; ter enim repetitur corpus quale singulorum, certae quantitatis: non tamen ideo concedo, corpus tres habens velocitatis gradus, ter continere corpus ipsi aequale unum habens velocitatis gradum, aut adeo triplam ejus potentiam habere; etsi enim ter contineat velocitatis gradum, non tamen et quantitatem corporis ter continet, sed tamen semel. Unde patet, velocitatem ab aestimandarum virium officio a me non excludi: ostendo enim, quicquid demum ad ipsarum determinationem afferatur, ut elastrum datae tensionis pondus datae magnitudinis et elevationis, corpus datae molis et velocitatis etc. unum vel plura, si a causa possint praestari aut exhiberi, posse etiam exhiberi ab effectu, et vicissim. Et quamcunque demum realem virium mensuram assumo, semper consensum reperio etiam pro reliquis. Sed ubi modalis quaedam mensura assumta est, gradus verbi gratia velocitatis replican-

dus sine replicatione corporis (statuendo nimirum duorum corporum aequalium vires esse ut velocitates), illico induimur in absurditates, et sine causa vel amittimus partem potentiae vel lucramur. Quae in exemplum utilia esse possunt, ne abstractis nimium fidamus, neve in realis Metaphysicae praecepta impingamus. Ex his igitur intelligitur, quod hactenus a plerisque in hoc negotio non satis recte processum est, oriri ex defectu Mathesos vere generalis seu Scientiae aestimandi in universum, quae nondum, quod sciam, tradita est et cujus hic aliquod specimen damus. Quod si jam numerus vincendorum elastrorum, librarum aut aliorum effectuum realium inter se congruentium ad aestimandam potentiam adhibeatur, stare non poterit recepta opinio: mea autem indubitata prodibit, sumulque omnes illae absurditates supra hic adductae cessabunt, nec unquam substituetur alteri, cui non alterum vicissim substitui possit, neque unquam causa producere poterit, quod non effectus integer possit, aut vicissim, quae in adversa sententia locum non habent. Sed haec prolixe deducere necesse non est, cum a Dn. P. aliisque haec meditaturis facile animadvertantur. Gratissimum autem erit intelligere, an aliqua supersint, in quibus Vir Clarissimus nondum sibi satisfactum putet, quae si methodice et presso pede, ut solet, proponere volet, a me pariter ac Cultoribus harum literarum inibit gratiam. Spero enim hac ratione absolvi quod restat, et collatione inter nos continuata tanti momenti negotium (quo constituendae sunt verae leges naturae) ad finem perduci posse.

Beilage.

Aliquot viri egregii cum agnovissent Dynamicas meas rationes aliquam sive vim sive speciem habere, retenti tamen sunt quominus a vulgari sententia decederent unius potissimum argumenti speciositate, cui accurate responderi postulabant. Ego vero mihi videbar nihil omisisse quod responsione indigeret. Ut igitur res in clara luce collocaretur, recurrendum putavi ad formam logicam. Nam nihil aliud est Forma a Logicis praescripta, quam plena et ordinata expositio argumentationis. Et saepe mecum miratus sum eam non adhiberi crebrius, vel potius tunc ubi maxime exitum caperet, minime adhiberi, nempe cum scripto agitur. Nam in colloquiis et disputationibus quae viva voce instituuntur, nisi accedat consignatio in scriptis, fieri vix potest ut accuratus formae usus

diu procedat, quoniam catena illa longius producta (non magis quam calculus) mente retineri facile vix potest. Unde etiam plerumque disputantes post unum vel alterum syllogismum in liberos sermones diffundi solent. Sed ubi scripto agitur, nihil est facilius quam ultro citroque mittere et remittere sibi argumentationes et responsiones formales, et tamdiu reciprocare serram, donec appareat vel ea afferi quae non negantur, vel nullam novam propositionem afferri ad probanda quae negantur: id enim necessario apparere oportet si forma constanter servetur. Ut igitur tentarem an hac ratione inter nos controversia componi posset, rem ita ad formam revocavi.

Syllogismus principalis:

Si Materia gravifica impellens corpus grave eique dans novum continue gradum tendentiae deorsum, facit mutationem virium in ea esse semper aequalem quibuscunque descensus momentis, quemadmodum mutatio celeritatum in eodem gravi tunc semper est aequabilis; sequitur in eo corpore vim esse celeritati proportionalem.

Sed verum est prius,

Ergo et posterius.

Respondeo negando eam partem minoris, quae affirmat mutationem virium tunc esse aequalem, licet concedam eam partem quae loquitur de aequali mutatione celeritatis. Probatur haec pars negata hoc modo:

Prosyllogismus 1.

Si in casibus diversis omnia eodem modo se habeant quoad patiens aeque ac quoad agens, mutatio virium in illis casibus diversis est aequalis.

Jam si materia gravifica impellat corpus grave eique det novum continue gradum tendentiae deorsum quibuscunque momentis descensus (sive illud corpus nunc primum incipiat descendere, sive jam aliquam celeritatem descendendi acquisierit utcunque), sunt diversi casus, in quibus omnia eodem modo se habent quoad patiens aeque ac quoad agens.

Ergo si materia gravifica impellat corpus grave eique det novum continue gradum tendentiae deorsum quibuscunque descensus momentis, mutatio virium est aequalis.

Respondeo negando iterum eam partem minoris, quae affirmat,

omnia se eodem modo habere in diversis illis casibus etiam quoad patiens. Hujus ergo probatio talis allata est.

Prosyllogismus 2.

Si differentia inter duos status patientis tam exigua est, ut debeat haberi pro nulla, sequitur omnia in dictis casibus diversis sese quoad patiens eodem modo habere.

Sed verum est prius,

Ergo et posterius.

Respondeo negando minorem quae rursus sic probatur:

Prosyllogismus 3.

Si celeritas agentis (nempe materiae gravificae) est velut infinita respectu celeritatis quam habet patiens, corpus scilicet grave ab agente deorsum impulsum; sequitur differentiam inter duos status patientis quibuscunque descensus momentis (sive descendere primum incipiat patiens sive jam celeritatem descendendi utcunque sit consecutum) tam esse exiguam ut debeat haberi pro nulla.

Sed verum est prius,

Ergo et posterius.

Respondeo, posse me quidem in controversiam vocare etiam minorem hujus ultimi argumenti, quae multis dubia videbitur; sed quia mihi ipsi haec causa gravitatis, ducta a motu celerrimo materiae cujusdam tenuissimae, quam gravificam appellare compendii causa volui, verisimillima videtur, ideo omissa nunc minore, accedam ad Majorem. Hanc vero brevitatis causa possem negare simpliciter, sed tamen lucis gratia distinguere eam malo, ut distinctius appareat, quid sit quod in ea non admittam. Itaque concedo Majorem, si differentia inter duos status patientis intelligatur (1) quoad celeritatem, (2) comparatione agentis. Hoc modo concedo totum prosyllogismum 3tium, seu concedo quod differentia tunc haberi debeat pro nulla, si differentia illa, nempe inter velocitatem gravis in uno momento et velocitatem ejus vel etiam quietem in alio momento, comparetur cum velocitate ipsius agentis, quae est incomparabiliter major ipsa majore gravis velocitate, nedum differentia qua major gravis velocitas minorem vincit.

Sed prosyllogismus iste tertius hoc modo concessus nihil facit ad quaesitum. Nam ut ex parte negata in minore syllogismi

principalis apparet, non agitur de differentia quoad celeritates, se de differentia quoad vires, quae duo pro iisdem assumere esse principium petere. Deinde non quaeritur an differentia inter duo status patientis sit nulla comparatione agentis, quod est insensibil ac tenuitatis pariter celeritatisque velut infinitae, sed an sit null comparatione rerum sensibilium et nostri, imo absolute seu re spectu ordinariarum quantitatum. Fateor, si fingeremus oculum i particula materiae gravificae collocari, eum non esse observaturu notabilem differentiam inter gravis status, sed semper perinde ip fore ac si grave quiescat; verum inde non sequitur, effectuum i gravi, qui nobis debent apparere seu qui debent absolute consi derari, differentias etiam negligendas esse.

Quodsi vero Major novissimi prosyllogismi intelligatur, v de vi ipsa sive potentia, non de sola celeritate; vel de aestimation absoluta, non vero tantum comparata cum agente, tunc nego ma jorem hujus novissimi prosyllogismi. Nego scilicet primo di ferentiam inter duos gravis status quoad vires debere pro nul haberi, etiamsi ageretur de comparatione cum agente; secund nego differentiam inter duos gravis status debere pro nulla habe absolute seu quoad ordinarias quantitates.

Nempe quoad (1) licet agens celeritate sua incredibiliter vinc gravis patientis celeritatem, non idem tamen etiam locum hab quoad potentiam, quia potentia omnium consensu, non tantum celeritate, sed et ex mole aestimanda est; et tanto minor fit pote tia quanto major est tenuitas; dataque celeritate tenuitas tanta a sumi potest ut potentia fiat minor data: summa igitur agent celeritas summa ejus tenuitate repensatur. Et proinde potent qua unus gravis status vincit alium ejusdem statum, minime spe nenda est, etiamsi cum potentia materiae gravificae ipsam impe lentis conferatur.

Quoad (2) vero licet differentia inter duos gravis patient status deberet pro nulla haberi comparate cum agente, non tam debet pro nulla haberi absolute seu quoad quantitates ordinari nisi quando differentia est incomparabiliter minor iis quorum e differentia, quod hoc loco non fieri manifestum est. Nempe sint duo a et b eorumque differentia sit a—b; dico a—b n posse haberi pro nulla absolute, seu a et b non posse haberi p aequivalentibus, nisi quando a—b est incomparabiliter minor qua a, itemque incomparabiliter minor quam b. Uti differentia int

angulum rectum et angulum semicirculi seu quem radius ad circumferentiam facit, ideo habetur pro nulla, quia differentia illa est angulus contactus qui neutri eorum est comparabilis. Idemque docet calculus differentialis a me propositus et Lemmata Incomparabilium quae in Actis Eruditorum produxi, quibus observatis paralogismi evitantur, neglectis autem in abusum calculi differentialis vel infinitesimalis inciditur, ut in hac argumentatione est factum, quae speciositate sua acutissimos etiam viros fefellit. Cum ergo neque virium neque celeritatum diversarum ejusdem gravis descendentis differentia sit ipsis differentibus incomparabiliter minor, patet tantum abesse ut hoc argumento semper inferatur aequabile incrementum vel decrementum virium, ut ne quidem probetur celeritatum, quam tamen aequabilem celeritatis mutationem veram esse, aliunde constat aliaque ratione probari debet, probataque revera a me habetur non experimentis tantum, quibus adeo abunde confirmata est, sed etiam a priori.

Compendium ergo disputationis istius huc redit: Objicitur Materiam Aetheriam quae Gravia deorsum pellit, infinita velut celeritate respectu gravis moveri; itaque perinde esse ac si prae ipsa grave quiesceret; id ergo se semper eodem modo ad materiam gravificam habere, atque adeo aequale semper virium, perinde ac celeritatis, incrementum accipere. Respondetur: Differentiam inter duos Gravis status pro nulla quidem haberi posse, si celeritatum differentia cum celeritate materiae gravificae comparetur, sed minime esse spernendam, si virium differentia comparetur cum viribus materiae gravificae, cujus velocitas tenuitate repensatur, sed nec si differentia sive virium sive celeritatum non agenti, sed ipsis differentibus (in diversis scilicet gravis statibus) comparetur, hoc est si spectetur absolute.

XII.

ESSAY DE DYNAMIQUE SUR LES LOIX DU MOUVEMENT, OU IL EST MONSTRÉ, QU'IL NE SE CONSERVE PAS LA MÊME QUANTITÉ DE MOUVEMENT, MAIS LA MÊME FORCE ABSOLUE, OU BIEN LA MÊME QUANTITÉ DE L'ACTION MOTRICE.

L'opinion que la même Quantité de Mouvement se conserve et demeure dans les concours des corps, à regné long temps, et

passoit pour un Axiome incontestable chez les Philosophes modernes. On entend par la Quantité de Mouvement le produit de la Masse par la vistesse, de sorte que la masse du corps estant comme 2 et la vistesse comme 3, la quantité de mouvement du corps seroit comme 6. Ainsi s'il y avoit deux corps concourrans, multipliant la masse de chacun par sa vistesse et prenant la somme des produits, on pretendoit que cette somme devoit estre la même avant et apres le concours.

Maintenant on commence à en estre desabusé, sur tout depuis que cette opinion a esté abandonnée par quelques uns de ses plus anciens, plus habiles et plus considerables defenseurs, et sur tout par l'Auteur même de la Recherche de la Verité. Mais il en est arrivé un inconvenient, c'est qu'on s'est trop jetté dans l'autre extremité, et qu'on ne reconnoist point la conservation de quelque chose d'absolu, qui pourroit tenir la place de la Quantité de Mouvement. Cependant c'est à quoy nostre esprit s'attend, et c'est pour cela que je remarque que les philosophes, qui n'entrent point dans les discussions profondes des Mathematiciens, ont de la peine à abandonner un Axiome tel que celuy de la Quantité de mouvement conservée sans qu'on leur en donne un autre où ils se puissent tenir.

Il est vray que les Mathematiciens qui depuis long temps ont établi des regles du mouvement fondées sur des experiences, ont remarqué qu'il se conserve la même vistesse respective entre les corps concourrans. Par exemple, soit que l'un des deux repose, ou qu'ils soyent en mouvement tous deux, et qu'ils aillent l'un contre l'autre, ou du même costé, il y a une vistesse respective, avec la quelle ils approchent ou s'eloignent l'un de l'autre; et on trouve que cette vistesse respective demeure la même, en sorte que les corps s'eloignent apres le choc avec la vistesse dont ils s'estoient approchés avant le choc. Mais cette vistesse respective peut demeurer la même, quoyque les veritables vistesses et forces absolues des corps changent d'une infinité de façons, de sorte que cette conservation ne regarde point ce qu'il y a d'absolu dans les corps.

Je remarque encor une autre conservation, c'est celle de la Quantité du progrès, mais ce n'est pas non plus la conservation de ce qu'il y a d'absolu. J'appelle progrès la Quantité du mouvement avec la quelle on procede vers un certain costé, de sorte que

si le corps alloit d'un sens contraire, ce progrès seroit une quantité negative. Or lorsque deux ou plus de corps concourent, on prend le progrès du costé où va leur centre de gravité commun, et si tous ces corps vont de ce même costé, alors il faut prendre la somme des progrès de chacun pour le progrès total; et il est visible que dans ce cas le progrès total et la quantité de mouvement totale des corps sont la même chose. Mais si l'un des corps alloit d'un sens contraire, son progrès du costé dont il s'agit seroit negatif et par consequent doit estre soustrait des autres pour avoir le progrès total. Ainsi s'il n'y a que deux corps dont l'un va du costé du centre commun, et l'autre en sens contraire, il faut que de la quantité de mouvement du premier soit soustraite celle du second, et le reste sera le progrès total. Or il se trouve que le progrès total se conserve, ou qu'il y a autant de progrès du même costé avant ou apres le choc. Mais il est visible encor que cette conservation ne repond pas à celle qu'on demande de quelque chose d'absolu. Car il se peut que la vistesse, quantité de mouvement et force des corps estant tres considerables, leur progrès soit nul. Cela arrive lors que les deux corps opposés ont leur quantités de mouvemens egales. En quel cas, selon le sens qu'on vient de donner, il n'y a point de progrès total du tout.

Il y a deja long temps que j'ay corrigé et redressé cette doctrine de la conservation de la Quantité de Mouvement, et que j'ay mis à sa place la conservation de quelque autre chose d'absolu; mais justement de cette chose qu'il falloit, c'est à dire la conservation de la Force absolue, il est vray que communement on ne paroist pas estre assés entré dans mes raisons ny avoir compris la beauté de ce que j'ay observé, comme je remarque dans tout ce qu'on a publié en France ou ailleurs sur les loix du mouvement et la mecanique, même apres ce que j'ay écrit sur les Dynamiques. Mais comme quelques uns des plus profonds Mathematiciens apres bien des contestations se sont rendus à mon sentiment, je me promets avec le temps l'approbation generale. Pour revenir donc à ce que je dis de la conservation de la Force absolue, il faut savoir que l'origine de l'erreur sur la Quantité de Mouvement vient de ce qu'on l'a pris pour la Force. On estoit porté, je crois, naturellement à croire que la même Quantité de la Force totale demeure avant ou apres le choc des corps, et j'ay trouvé cela très veritable. Or la Quantité de mouvement et la Force

estant prises pour une meme chose, on a conclu que la quantité de mouvement se conservoit. Ce qui a contribué le plus à confondre la Force avec la Quantité de Mouvement, est l'abus de la Doctrine Statique. Car on trouve dans la Statique, que deux corps sont en equilibre, lorsqu'en vertu de leur situation leur vistesses sont reciproques à leur masses ou poids, ou quand ils ont la même quantité de mouvement.

Mais il faut savoir que cette egalité de la Force en ce cas vient d'un autre principe, car generalement la Force absolue doit estre estimée par l'effect violent qu'elle peut produire. J'appelle l'Effect violent qui consume la Force de l'agent, comme par exemple donner une telle vitesse à un corps donné, elever un tel corps à une telle hauteur etc. Et on peut estimer commodement la force d'un corps pesant par le produit de la masse ou de la pesanteur multipliée par la hauteur à la quelle le corps pourroit monter en vertu de son mouvement. Or deux corps estant en equilibre, leur hauteurs aux quelles ils pourroient monter ou dont ils pourroient descendre sont reciproques à leur poids, ou bien les produits des hauteurs par les poids sont egaux. Et il arrive seulement dans le cas de l'Equilibre ou de la Force morte, que les hauteurs sont comme les vistesses, et qu'ainsi les produits des poids par les vistesses sont comme les produits des poids par les hauteurs.*) Cela dis-je arrive seulement dans le cas de la Force morte, ou du Mouvement infiniment petit, que j'ay coustumé d'appeller Solicitation, qui a lieu lorsqu'un corps pesant tache à commencer le mouvement, et n'a pas encor conçû aucune impetuosité; et cela arrive justement quand les corps sont dans l'Equilibre, et tachant de descendre s'empechent mutuellement. Mais quand un corps pesant a fait du progres en descendant librement, et a conçu de l'impetuosité ou de la Force vive, alors les hauteurs aux quelles ce corps pourroit arriver, ne sont point

*) Am Rande des Manuscripts hat Leibniz bemerkt: Ainsi il est estonnant que M. des Cartes a si bien evité l'ecueil de la vistesse prise pour la force, dans son petit traité de Statique ou de la Force morte, où il y avoit aucun danger, ayant tout reduit aux poids et hauteurs, quand cela estoit indifferent, et qu'il a abandonné les hauteurs pour les vistesses dans le cas où il falloit faire tout le contraire, c'est à dire quand il s'agit des percussions ou forces vives qui se doivent mesurer par les poids et les hauteurs.

proportionelles aux vistesses, mais comme les quarrés des vistesses. Et c'est pour cela qu'en cas de force vive les forces ne sont point comme les quantités de mouvement ou comme les produits des masses par les vistesses.

Cependant il est remarquable et à contribuer à l'erreur que deux corps inegaux en force vive absolue, car c'est de quoy je parle, mais dont la quantité de mouvement est égale, peuvent s'arrester, ce qui les a fait croire absolument d'égale force, comme par exemple deux corps A de masse 3 vistesse 2, et B de masse 2 vistesse 3. Car quoyque A soit plus foible que B absolument, A ne pouvant elever une livre qu'à 12 pieds, si B peut elever une livre à 18 pieds; neantmoins dans le concours ils se peuvent arrester, dont la raison est que les corps ne s'empechent que selon les loix de la force morte ou de statique. Car estant elastiques comme on le suppose, ils n'agissent entre eux qu'en forces mortes ou selon l'equilibre dans le concours, c'est à dire par des changemens inassignables, parce qu'en se pressant, se resistant et s'affoiblissant continuellement de plus en plus jusqu'au repos, ils ne s'entredetruisent l'un l'autre à chaque moment que du mouvement infiniment petit, ou de la force morte, egale de part et d'autre; or la quantité de la force morte s'estime selon les loix de l'equilibre par la quantité de mouvement, infiniment petite à la verité, mais dont la repetition continuelle epuise enfin toute la quantité du mouvement des deux corps, laquelle estant supposée egale dans l'un et dans l'autre corps, l'une et l'autre quantité de mouvement est epuisée en même temps, et par consequent les corps sont reduits au repos tous deux en même temps par les pressions de leur ressorts qui se restituant par apres rendent le mouvement. C'est cette diminution continuelle de la quantité de mouvement selon l'equilibre dans le concours des deux ressorts, que consiste la cause de ce paradoxe, que deux forces absolues inegales, mais qui ont les quantités de mouvement egales, doivent s'arrester, par ce que cela arrive dans une action respective, où le combat ne se fait que selon les quantités de mouvement infiniment petites continuellement repetées.

Or il se trouve par la raison et par l'experience, que c'est la Force vive absoluë, ou qui s'estime par l'effect violent qu'elle peut produire, qui se conserve, et nullement la quantité de mouvement. Car si cette force vive pouvoit jamais s'augmenter,

il y auroit l'effect plus puisant que la cause, ou bien le mouvement perpetuel mecanique, c'est à dire qui pourroit reproduire sa cause et quelque chose de plus, ce qui est absurde. Mais si la force se pouvoit diminuer, elle periroit enfin tout à fait, car ne pouvant jamais augmenter, et pouvant pourtant diminuer, elle iroit tousjours de plus en plus en decadence, ce qui est sans doute contraire à l'ordre des choses. L'experience le confirme aussi, et on trouvera tousjours que si les corps convertissoient leur mouvemens horizontaux en mouvemens d'ascension, ils pourroient tousjours elever en somme le même poids à la même hauteur avant ou apres le choc, supposé que rien de la force n'ait esté absorbé dans le choc par les parties des corps, lorsque ces corps ne sont pas parfaitement Elastiques, sans parler de ce qu'absorbe le milieu, la base et autres circonstances. Mais comme c'est une chose que j'ay éclaircie assez autresfois, je ne la repeteray pas.

Maintenant je suis bien aise de donner encor un autre tour à la chose et de faire voir encor la conservation de quelque chose de plus approchant à la quantité du mouvement, c'est à dire la conservation de l'action motrice. Voicy donc la regle generale que j'etablis. Quelques changemens qui puissent arriver entre des corps concourans, de quelque nombre qu'ils soyent, il faut qu'il y ait tousjours dans les corps concourans entre eux seuls, la même quantité de l'Action motrice dans un même intervalle de temps. Par exemple il y doit avoir durant cette heure autant d'action motrice dans l'univers ou dans des corps donnés, agissans entre eux seuls, qu'il y en aura durant quelque autre heure que ce soit.

Pour entendre cette regle, il faut expliquer l'Estime de l'Action Motrice, toute differente de la Quantité de Mouvement, de la maniere que la quantité de mouvement a coustume d'estre entendue suivant ce qu'on a expliqué cy dessus. Or à fin que l'Action Motrice puisse estre estimée, il faut premierement estimer l'Effect Formel du mouvement. Cet effect formel ou essentiel au mouvement consiste dans ce qui est changé par le mouvement, c'est à dire dans la quantité de la masse qui est transferée, et dans l'espace ou dans la longueur, par laquelle cette masse est transferée. C'est là l'effect essentiel du mouvement, ou ce qui s'y trouve changé: car ce corps estoit là, maintenant il est icy: le corps est tant et la distance est telle. Je conçois pour plus de facilité

que le corps est mû en sorte que chaque point decrit une ligne droite egale et parallele à celle de tout autre point du même corps. J'entends aussi un mouvement uniforme et continuel. Cela posé, l'Effect formel du mouvement est le produit de la masse qui se transfere multipliée par la longueur de la translation, ou bien les Effects formels sont en raison composée des masses et des longueurs de la translation, de sorte qu'un corps comme 2 estant transporté de la longueur de 3 pieds, et un autre corps comme 3 estant transporté de la longueur de 2 pieds, les effects formels sont egaux. Il faut bien distinguer ce que j'appelle icy l'Effect formel ou essentiel au mouvement, de ce que j'ay appellé cy dessus l'effect violent. Car l'effect violent consume la force et s'exerce sur quelque chose de dehors; mais l'Effect formel consiste dans le corps en mouvement, pris en luy même, et ne consume point la force, et même il la conserve plustost, puisque la même translation de la même masse se doit tousjours continuer, si rien de dehors ne l'empeche: c'est pour cette raison que les Forces absolues sont comme les Effects violens qui les consument, mais nullement comme les effects formels.

Maintenant il sera plus aisé d'entendre ce que c'est que l'Action motrice: il faut donc l'estimer non seulement par son Effect formel qu'elle produit, mais encor par la vigueur ou velocité avec laquelle elle le produit. On veut faire transporter 100 livres à une lieue d'icy; c'est là l'effect formel qu'on demande. L'un le veut faire dans une heure, l'autre dans deux heures; je dis que l'action du premier est double de celle du second, estant doublement promte sur un effect egal. Je suppose tousjours le mouvement continuel et uniforme. On peut dire aussi qu'un corps comme 3 estant transporté de la longueur de 5 pieds, dans 15 minutes de temps, c'est la même action que si un corps comme 1 estoit transporté de la longueur d'un pied, dans une minute de temps.

Cette definition de l'Action Motrice se justifie assez à priori par ce qu'il est manifeste que dans une action purement formelle prise en elle même, comme icy est celle d'un corps mouvant consideré à part, il y a deux points à examiner, l'effect formel ou ce qui est changé, et la promptitude du changement, car il est bien manifeste que celuy qui produit le même effect formel en moins de temps, agit d'avantage. Mais si quelcun s'obstinoit à me dis-

puter cette definition de l'Action motrice, il me suffiroit de dire, qu'il m'est arbitraire d'appeller Action motrice ce que je viens d'expliquer, pourveu que la nature justifie par apres la realité de cette definition nominale, c'est ce qu'elle sera lorsque je feray voir que c'est justement cela dont la nature conserve la quantité.

Or puisque l'action motrice est ce qui vient en multipliant l'Effect formel par la velocité, je veux donner plus distinctement l'estime de la velocité. L'on sait que deux mobiles parcourant uniformement le même espace dans des temps inegaux, la vistesse de celuy qui le parcourra en moins de temps sera la plus grande, à proportion que le temps sera plus court. Ainsi les espaces parcourus estant egaux, les vistesses sont reciproquement proportionelles aux temps. Mais si les temps estoient egaux, les vistesses seroient comme les espaces parcourus. Car un corps en mouvement ayant parcouru un pied dans une minute, et l'autre deux pieds, il est manifeste que la vistesse du second est double. Ainsi les vistesses sont en raison composée de la directe des espaces parcourus et de la reciproque des temps employés. Ou ce qui est la même chose, pour avoir l'estime de la vistesse, il faut prendre l'espace et le diviser par le temps. Par exemple A acheve 4 pieds en 3 secondes et B acheve 2 pieds dans une seconde, la vistesse d'A sera comme 4 divisé par 3, c'est à dire comme $\frac{4}{3}$, et la vistesse de B sera comme 2 divisé par 1, c'est à dire comme 2, de sorte que la vistesse d'A sera à celle de B comme $\frac{4}{3}$ à 2, c'est à dire comme 2 à 3.

Maintenant il s'agit de verifier la conservation de l'action motrice. J'en puis donner la demonstration generale en peu de mots, parce que j'ay prouvé deja ailleurs que la même force se conserve, et parce que dans le fonds l'exercice de la force ou la force menée dans le temps est l'action, la nature abstraite de la force ne consistant qu'en cela. Ainsi puisque la même force se conserve et puisque l'action est le produit de la force par le temps, la même action se conservera dans des temps egaux. Mais je le veux verifier par le detail des loix du mouvement établies par l'experience et receues communement. Je me contenteray d'un exemple; mais on en trouvera autant dans tout autre exemple qu'on voudra choisir. Et même on en pourra voir d'abord la raison generale, en faisant le calcul in abstracto, ou en general et par lettres, sans employer aucuns nombres particuliers.

Mais pour l'intelligence de tout le monde j'aime mieux de donner un exemple en nombres.

Soit un angle droit LMN (fig. 22) dont les costés LM, LN soyent prolongés à discretion. Soit menée une droite AM, en sorte que prolongée au delà du point M elle couperoit l'angle LMN en deux parties egales. On pourra considerer $_1$AM comme l'hypotenuse d'un quarré dont le costé soit appellé 1. Cela estant, je suppose que le corps A*) estant dans le lieu $_1$A au moment 1, A aille du point $_1$A au point M, pendant le temps 1, 2, et y rencontre au moment 2 les deux corps B et C, qui avoient esté en repos pendant le temps 1, 2, ce qui se connoist dans la figure, en ce que leur place se designe par $_1$B et par $_2$B, comme aussi par $_1$C et par $_2$C. Or le corps A rencontrant les deux corps en M dans le moment 2, estant en M ou $_2$A, les chassera et se mettra au repos en M, point qui sera encor $_3$A et $_4$A, parce qu' A y demeurera pendant les temps 2, 3 et 3, 4 que je suppose tous deux egaux entre eux et au temps 1, 2. Mais B ira vers L du moment 2 pendant le temps 2, 3 avec une vistesse comme 1, et rencontrera au moment 3 le corps D, qui estoit allé auparavant devant luy pendant le temps 1, 2 du lieu $_1$D au lieu $_2$D, et pendant le temps 2, 3 du lieu $_2$D au lieu $_3$D avec une vistesse comme $\frac{1}{2}$. Or B rencontrant D au moment 3 luy donnera la vistesse $_3$D$_4$D, c'est à dire dans le temps 3, 4 $_1$D parviendra à $_4$D, et pendant ce temps là, B ira de $_3$B à $_4$B avec la vistesse $_3$B$_4$B. Il en sera de même de l'autre costé, où C poussé par A dans le moment 2, ira vers N avec la vistesse 1, et rencontrera au moment 3 le corps E, qui va contre luy estant allé auparavant pendant le temps 1, 2 du lieu $_1$E au lieu $_2$E, et pendant le temps 2, 3 du lieu $_2$E au $_3$E avec une vistesse comme $\frac{2}{3}$. Or C rencontrant E au moment 3 luy donnera la vistesse $_3$E$_4$E, c'est à dire que dans le temps 3, 4 il vienne de $_3$E à $_4$E. Et pendant ce temps là, C ira de $_3$C à $_4$C avec la vistesse $_3$C$_4$C

Suit le registre des masses et des vistesses.

Les masses des corps A, B, C, D, E sont 1, 1, 1, 2, $\frac{1}{2}$.

Pendant le temps 1, 2 les vistesses des corps A, B, C, D, E sont $\sqrt{2}$, 0, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

---

*) On ne compte point icy l'epaisseur des corps qu'on suppose peu considerable. Bemerkung von Leibniz.

Pendant le temps 2, 3 les vistesses des corps A, B, C, D, E sont 0, 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

Pendant le temps 3, 4 les vistesses des corps A, B, C, D, E sont 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{14}{9}$, où il est à remarquer que le corps C au lieu d'avancer reflechit en arriere avec la vistesse $\frac{1}{9}$.

La justification de ces nombres se trouvera dans les regles ou Equations que nous assignerons plus bas.

Faisons maintenant le compte des Actions Motrices pendant les temps egaux entre eux 1, 2; 2, 3; 3, 4.

Pendant le temps 1, 2.

A est de masse 1, la longueur de la translation $_1A_2A$ est $\sqrt{2}$. Donc multipliant un par l'autre, l'effect formel est $\sqrt{2}$. La vistesse provient en divisant la longueur $\sqrt{2}$ par le temps 1, ce qui fait $\sqrt{2}$. Et multipliant l'effect par la vistesse, l'action motrice d'A est 2.

B et C sont en repos pendant ce temps en $_1B$, $_2B$, ou $_1C$, $_2C$, donc leur Action motrice est 0.

D est de masse 2, la longueur de la translation $\frac{1}{2}$, l'Effect formel 2 par $\frac{1}{2}$ ou 1. La longueur $\frac{1}{2}$ estant divisée par le temps 1 vient la vistesse $\frac{1}{2}$, et l'effect multiplié par la vistesse est 1 par $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{2}$, ce qui est l'action de D.

E est de masse $\frac{1}{2}$, la longueur de la translation $\frac{2}{3}$, par consequent l'Effect $\frac{1}{3}$. Or la longueur $\frac{2}{3}$ divisée par 1 donne la vistesse $\frac{2}{3}$, laquelle multipliée par l'effect fournit $\frac{2}{9}$ Action d'E.

Et la somme de toutes les Actions Motrices des corps A, B, C, D, E pendant le temps 1, 2 est $2 + 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{49}{18}$.

Pendant le temps 2, 3.

A est en repos et son action est 0.

B est de masse 1, la longueur de la translation 1 (sçavoir $_2B_3B$), l'Effect formel 1, la longueur 1 divisée par le temps 1 donne la vistesse 1, laquelle estant multipliée par l'Effect 1 vient 1, qui est l'Action de B.

C; le calcul est le même à l'egard de C et il vient la même Action 1.

D a la même Action qu'au temps precedent savoir $\frac{1}{2}$.

E de même a la même Action qu'au temps precedent sçavoir $\frac{2}{9}$.

Et la somme de toutes les actions motrices des corps

A, B, C, D, E pendant le temps 2,3 est $0 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{9} = \frac{49}{18}$, comme auparavant.

Enfin pendant le temps 3, 4.

A est en repos et son action est 0.

B est de masse 1, la longueur de la translation savoir $_{3}B_{4}B$ est $\frac{1}{3}$, donc l'Effect est $\frac{1}{3}$. La même longueur $\frac{1}{3}$ divisée par le temps 1 donne $\frac{1}{3}$ pour la vistesse, laquelle multipliée par l'Effect, il vient $\frac{1}{9}$, Action de B.

C est de masse 1, la longueur de la translation $_{3}C_{4}C$ est $\frac{1}{9}$, donc l'Effect formel est $\frac{1}{9}$. Car il n'importe point icy, lors qu'on cherche des choses absolues, si C avance par $_{3}C_{4}C$, ou reflechit en arriere comme il fait en effect. La même longueur $\frac{1}{9}$ divisée par le temps 1 donne la vistesse $\frac{1}{9}$, laquelle multipliée par l'Effect, il vient $\frac{1}{81}$ pour l'Action de C.

D est de masse 2, la longueur de la translation $_{3}D_{4}D$ est $\frac{5}{6}$, donc l'effect est $\frac{5}{3}$. La même longueur divisée par le temps 1 est $\frac{5}{6}$ ou la vistesse, laquelle multipliée par l'Effect, il vient $\frac{25}{18}$ qui est l'Action de D.

E est de masse $\frac{1}{2}$, la longueur de la translation est $\frac{14}{9}$, l'effect $\frac{7}{9}$. La même longueur divisée par le temps 1 est $\frac{14}{9}$, c'est à dire la vistesse, laquelle multipliée par l'Effect vient $\frac{98}{81}$ pour l'Action d'E.

Et la somme de toutes les Actions motrices des corps A, B, C, D, E pendant le temps 3,4 est $0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{25}{18} + \frac{98}{81} = \frac{18 + 2 + 225 + 196}{162} = \frac{441}{162} = \frac{49}{18}$, comme dans chacun des temps precedens.

J'ay suivi dans ce calcul la methode generale, car comme non seulement les Actions Motrices sont egales dans les temps egaux, mais proportionelles aux temps dans les temps inegaux, j'ay divisé l'Espace par le temps pour avoir la vistesse, mais quand le temps est toujours le même, comme icy, et ainsi on le peut prendre pour l'unité, la division par le temps change rien, et par consequent pour la vistesse on peut prendre le nombre de la longueur de la translation, les vistesses estant comme les espaces: d'où il est manifeste que l'Effect estant le produit de la masse et de l'espace, et la vistesse estant comme l'espace, l'Action est comme le produit de la masse par le quarré de l'espace de la translation (on entend une translation horizontale dans les corps

pesans) ou comme le produit de la masse par le quarré de la vistesse. Or je prouveray plus bas dans la 3me Equation, que la somme de ces produits des masses par les quarrés des vistesses se conserve dans le concours des corps. Donc il est prouvé que l'Action motrice se conserve, sans parler d'autres preuves, par lesquelles j'ay fait voir ailleurs que les forces se conservent et que les forces sont comme les produits des masses par les quarrés des vistesses, pendant que les Actions sont comme les produits des forces par les temps, de sorte que si on ne savoit pas d'ailleurs cette estime et conservation de la Force, on l'apprendroit icy, en trouvant par le calcul en detail ou même en general par la 3me equation plus bas que l'Action motrice se conserve; or il est clair que les Actions Motrices sont en raison composée des forces et des temps, et les temps estant les memes, les actions motrices sont comme les puissances ou forces.

Mais on s'etonnera d'où vient ce succes? qui ne manquera jamais quelque embarassé que soit l'exemple qu'on pourra prendre. Cela se peut prouver à priori independamment des regles du mouvement receues, et c'est ce que j'ay monstré plusieurs fois par des differentes voyes. Mais icy je feray voir que cela se prouve par ces regles mêmes de la percussion que l'experience a justifiées, et dont on peut donner raison par la methode d'un bateau, comme a fait M. Hugens, et par beaucoup d'autres manieres, quoyqu'on soit tousjours obligé de supposer quelque chose de non-mathematique qui a sa source de plus haut. Cependant je reduiray le tout à trois equations fort simples et belles, et qui contiennent tout ce qui regarde le concours central de deux corps sur une même droite.

Vistesses conspirantes

du corps a avant le choc v	apres x	
b	y	z

J'appelle ces vistesses conspirantes, parce que je suppose qu'elles tendent toutes du costé où va le centre de gravité commun des deux corps. Mais si peutestre quelque vistesse va veritablement au sens contraire, alors la lettre qui exprime la vistesse conspirante, signifie une quantité negative. Mais on prendra tousjours le corps a pour un corps dont la vistesse est veritablement conspirante ou va du costé du centre de gravité avant le choc, et même en sorte que le corps a suive et ne precede pas le centre

de gravité commun. Ainsi les signes ne varient point en v, mais il peuvent varier en y, z, x. Voicy maintenant nos trois equations:

I. Equation Lineale, qui exprime la conservation de la cause du choc ou de la vistesse respective

$$v - y = z - x$$

et $v - y$ signifie la vistesse respective entre les corps avant le choc avec laquelle ils s'approchent, et $z - x$ signifie la vistesse respective avec laquelle ils s'eloignent apres le choc. Et cette vistesse respective est tousjours de la même quantité avant ou apres le choc, supposé que les corps soyent bien Elastiques, c'est ce que dit cette Equation. Il faut seulement remarquer que les signes variant dans l'explication du detail, cette regle generale renfermera tous les cas particuliers. Ce qui arrive aussi dans l'Equation suivante:

II. Equation plane, qui exprime la conservation du progrès commun ou total des deux corps

$$av + by = ax + bz.$$

J'appelle progrès icy la quantité de mouvement qui va du costé du centre de gravité, de sorte que si le corps b par exemple alloit du sens contraire avant le choc, et qu'ainsi sa vistesse conspirante y fut negative ou fut exprimée par $-(y)$, entendant par (y) molem ou ce qu'il y a de positif dans y, alors le progrès d'a sera av, le progres de b sera $-b(y)$. Et le progrès total sera $av - b(y)$, qui est la difference des quantités de mouvement des deux corps. Si les corps a et b vont d'un même costé avant et apres le choc, ces lettres v, y, x, z ne signifient que des velocités conspirantes veritables ou affirmatives, et par consequent dans ce cas il paroist par cette Equation que la même quantité de mouvement se conservera apres et avant le choc. Mais si les corps a et b alloient en sens contraire avant le choc et en même sens apres le choc, la difference de la quantité de mouvement avant le choc seroit egale à la somme de la quantité de mouvement apres le choc. Et il y aura d'autres variations semblables selon la variation des signes des lettres y, x, z.

III. Equation Solide, qui exprime la conservation de la force totale absolue ou de l'Action Motrice

$$avv + byy = axx + bzz$$

Cette Equation a cela d'excellent, que toutes les variations des signes qui ne peuvent venir que de la diverse direction des vis-

tesses y, x, z, y, cessent, par ce que toutes les lettres qui expriment ces vistesses montent icy au quarré. Or $-y$ et $+y$ ont le même quarré $+yy$, de sorte que toutes ces differentes directions d'y font plus rien. Et c'est aussi pour cela que cette Equation donne quelque chose d'absolu, independant des vistesses respectives, ou des progrès d'un certain costé. Il ne s'agit icy que d'estimer les masses et les vistesses, sans se mettre en peine de quel costé vont ces vistesses. Et c'est ce qui satisfait en même temps à la rigueur des mathematiciens et au souhait des philosophes, aux experiences et aux raisons tirées de differens principes.

Quoyque je mette ensemble ces trois Equations pour la beauté et pour l'harmonie, neantmoins deux en pourroient suffire pour la necessité. Car prenant deux quelconques de ces equations, on en peut inferer celle qui reste. Ainsi la premiere et la seconde donnent la troisieme de la maniere que voicy. Par la premiere il y aura $v+x=y+z$, par la seconde il y aura $a, v-x = b, z-y$, et multipliant une equation par l'autre selon les costés repondans il y aura $a, v-x, v+x=b, z-y, z+y$, ce qui fait $avv-axx=bzz-byy$, ou l'Equation troisieme. De même la premiere et la troisieme donnent la seconde, car $a, vv-xx = b, zz-yy$ qui est la 3me, divisée par la premiere $v+x=z+y$, costé par costé, il y aura $a, vv-xx, :, v+x=b, zz-yy, :, z+y$, ce qui fait $a, v-x=b, z-y$, c'est à dire l'equation seconde. Enfin la 2de et la 3me equation donnent la premiere. Ca la troisieme $a, vv-xx=b, zz-yy$ divisée par la seconde, sçavoir par $a, v-x = b, z-y$ donne $\frac{a, vv-xx}{a, v-x}=\frac{b, zz-yy}{b, z-y}$, ce qui fait $v+x= z+y$, selon l'Equation premiere.

Je n'adjouteray qu'une Remarque, qui est que plusieurs distinguent entre les corps durs et mols, et les durs mêmes en Elastiques ou non, et bastissent là dessus des differentes regles. Mais on peut prendre les corps naturellement pour Durs-Elastiques, sans nier pourtant que l'Elasticité doit tousjours venir d'un fluide plus subtil et penetrant, dont le mouvement est troublé par la tension ou par le changement de l'Elastique. Et comme ce fluide doit estre composé luy même à son tour des petits corps solides, elastiques entre eux, on voit bien que cette Replication des Solides et des Fluides va à l'infini. Or cette Elasticité des corps est necessaire à la Nature, pour obtenir l'Execution des

grandes et belles loix que son Auteur infiniment sage s'est proposé, parmy lesquelles ne sont pas les moindres, ces deux Loix de la Nature que j'ay fait connoistre le premier, dont la premiere est la loy de la conservation de la force absolue ou de l'action motrice dans l'univers avec quelques autres conservations absolues nouvelles qui en dependent et que j'expliqueray un jour, et la seconde est la loy de la continuité, en vertu de laquelle entre autres effects, tout changement doit arriver par des passages inassignables et jamais par saut. Ce qui fait aussi que la nature ne souffre point de corps durs non-elastiques. Pour monstrer cela, feignons qu'un globe dur non-elastique aille choquer un globe pareil en repos: apres le choc il faut ou que les deux globes se reposent, en quel cas la loy de la conservation de la force seroit violée, ou qu'il y ait du mouvement et que le globe qui estoit en repos en recoive, ne pouvant pas estre pris pour inebranslable, quoyque quand même on le feindroit tel, il faudroit que le choquant (pour conserver la force) reflechist tout d'un coup en arriere. Ce qui est un changement defendu, puisqu'il se feroit par saut, un corps qui va d'un certain costę devant affoiblir son mouvement jusqu'au repos avant que de commencer d'aller peu à peu de plus en plus en arriere. Mais le globe choqué devant recevoir du mouvement, il y aura encor un changement par saut, le globe choqué qui estoit en repos devant recevoir un certain degré de vistesse tout d'un coup, n'estant point pliable pour la recevoir peu à peu et par degrés. Estant manifeste aussi qu'il faut ou que le globe choquant passe tout d'un coup au repos, ce qui seroit déja un changement par saut, ou que si ce globe choquant retient une certaine vistesse, le globe choqué qui estoit en repos en reçoive une tout d'un coup qui ne soit pas moindre que celle du choquant, puisque le choqué doit ou arrester le choquant, ou aller devant luy. Ainsi le choquant passe tout d'un coup de la vistesse au repos, ou du moins le choqué passe tout d'un coup du repos à un certain degré de vistesse, sans passer par les degrés moyens; ce qui est contraire à la loy de la continuité, qui n'admet aucun changement par saut dans la nature. J'ai encor bien d'autres raisons qui concourent toutes à bannir les corps durs non-elastiques, mais ce n'est pas icy le lieu de s'etendre la dessus.

Cependant il faut avouer, quoyque les corps doivent estre

ainsi naturellement elastiques dans le sens que je viens d'expliquer, que neantmoins l'Elasticité souvent paroist pas assez dans les masses ou corps que nous employons, quand même ces masses seroient composées de parties elastiques et ressembleroient à un sac plein de petites boules dures qui cederoient à un choc mediocre, sans remettre le sac, comme l'on voit des corps mols ou qui obeissent sans se remettre assez. C'est que les parties n'y sont point assez liées, pour transferer leur changement sur le tout. D'où vient que dans le choc de tels corps une partie de la force est absorbée par les petites parties qui composent la masse, sans que cette force soit rendue au total: et cela doit tousjours arriver lorsque la masse pressée ne se remet point parfaitement. Quoyqu'il arrive aussi qu'une masse se monstre plus ou moins Elastique selon la differente maniere du choc, temoin l'eau même qui cede à une impression mediocre, et fait rebondir une balle de canon.

Or quand les parties des corps absorbent la force du choc, en tout comme lors que deux morceaux de terre grasse ou d'argille se choquent, ou en partie comme lors que deux boules de bois se rencontrent, qui sont bien moins elastiques que deux globes de jaspe ou d'acier trempé: quand, dis-je, de la force est absorbée par les parties, c'est autant de perdu pour la force absolue, et pour la vistesse respective, c'est à dire pour la troisieme et pour la premiere Equation, qui ne reussissent pas, puisque ce qui reste apres le choc est devenu moindre que ce qui estoit avant le choc, à cause d'une partie de la force detournée ailleurs. Mais la quantité du progrès ou bien la seconde Equation n'y est point interessée. Et même le mouvement de ce progrès total demeure seul, lorsque les deux corps vont ensemble apres le choc avec la vistesse de leur centre commun, comme feroient deux boules de terre grasse ou argille. Mais dans les demi-elastiques comme deux boules de bois, il arrive encor de plus que les corps s'eloignent entre eux apres le choc, quoyqu'avec un affoiblissement de la premiere Equation, suivant cette force du choc qui n'a point esté absorbée. Et sur quelques experiences touchant le degré de l'elasticité de ce bois, on pourroit predire ce qui deuvroient arriver aux boules qui en seroient faites en toute sorte de recontres ou chocs. Cependant ce dechet de la force totale ou ce manquement de la troisieme Equation ne deroge point à la verité inviolable de la loy

de la conservation de la même force dans le monde. Car ce qui est absorbé par les petites parties, n'est point perdu absolument pour l'univers, quoyqu'il soit perdu pour la force totale des corps concourans.

XIII.

REGLE GENERALE DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENS.

Si les droites AB, AC, AD, AE etc. (fig. 23) représentent les diverses tendances ou les mouvemens particuliers d'un mobile A, qui doivent composer un mouvement total; et si G est le centre de gravité de tous les points de tendance B, C, D, E etc.; enfin si AG est prolongée au delà de G jusqu'à M, en sorte qu'AM soit à AG, comme le nombre des mouvemens particuliers ou composans est à l'unité: le mouvement composé sera AM.

C'est à dire, pour parler plus familièrement: Si le mobile A étoit parvenu dans une seconde de temps d'A jusqu'à B, en cas qu'il eût été poussé par le seul mouvement AB (que je suppose toujours uniforme ici), et encore de même, s'il étoit parvenu dans une seconde jusqu'à C ou D ou E etc. en cas qu'il eût été poussé par un de ces mouvemens tout seul: maintenant que ce mobile est poussé en même temps par tous ces mouvemens ensemble, ne pouvant pas aller en même temps de plusieurs côtés, il ira vers G, le centre de gravité de tous les points de tendance B, C, D, E etc. mais d'autant plus loin qu'il y a plus de tendances, de sorte qu'il parviendra dans une seconde jusqu'à M, si AM est à AG, comme le nombre des tendances est à l'unité. Ainsi il arrivera au mobile la même chose qui arriveroit à son centre de gravité, si ce mobile se partageoit également entre ces mouvemens, pour satisfaire parfaitement à tous ensemble. Car le mobile étant partagé également entre quatre tendances, il ne peut écheoir à chacune qu'une quatrième partie du mobile, qui devra aller quatre fois plus loin, pour avoir autant de progrès, que si le mobile tout entier avoit satisfait à chaque tendance; mais ainsi le centre de gravité de toutes ces parties iroit aussi quatre fois plus loin. Maintenant le partage

n'ayant point de lieu, le tout ira comme le centre des partages, pour satisfaire à chaque tendance en particulier, autant qu'il est possible sans le partage. Et il en provient autant que si on avoit fait les partages et réuni les parties au centre, après avoir satisfait aux mouvemens particuliers.

Cette explication peut tenir lieu de demonstration. Mais ceux qui en demandent une à la façon ordinaire, la trouveront aisément en poursuivant cequi suit. Si on mène par A deux droites qui soient dans un même plan avec tous les mouvemens et qui fasse un angle droit en A, on pourra résoudre chacun de tous ces mouvemens particuliers en deux, pris sur les côtés de cet angle droit. Ainsi la composition de tous les mouvemens sur un des côtés sera le mouvement moyen arithmétique, multiplié par le nombre des mouvemens, c'est à dire, pour avoir la distance entre A et le point de tendance de ce mouvement composé, pris sur ce côté, il faudra multiplier la distance du centre de gravité de tous les points de tendance sur le même côté par le nombre de tendance. Car l'on sçait, que la distance entre A et le centre de gravité des points pris sur une même droite avec A, est la moyenne arithmétique des distances entre A et ces points, de quelque nombre qu'ils puissent être. J'appelle grandeur moyenne arithmétique entre plusieurs grandeurs, celle qui ce fait par leur somme divisée par leur nombre, observant que ce qui est en sens contraire est une quantité négative, dont l'addition est une soustraction en effet. Or puisqu'il faut multiplier par le nombre des tendances la distance du centre de gravité des points de tendance, pris taut sur l'un que sur l'autre côté de l'angle droit, pour déterminer le mouvement composé sur chacun des côtés, il s'ensuit que le mouvement total composé des mouvemens de ces deux côtés se déterminera de même. Ainsi la composition de plusieurs mouvemens faisant angle ensemble dans un même plan, se réduit à la composition de plusieurs mouvemens dans une même droite, et de deux mouvemens faisant angle droit. Que si les mouvemens donnés ne sont pas dans le même plan, il faut se servir de trois droites faisant angle entr'elles.

Il est bon de rémarquer, que dans cette composition des mouvemens, il se conserve toujours la même quantité de la progression, et non pas toujours la même quantité du mouvement. Par exemple, si deux tendances sont dans une même droite, mais en sens contraire, le mobile va du côté du plus fort, avec la diffé-

rence des vitesses, et non pas avec leur somme, comme il arriveroit si les tendances le portoient d'une même côté. Et si les deux tendances contraires étoient égales, [il n'y auroit point de mouvement. Cependant tout cela suffit, pour ainsi dire, in abstracto, lorsqu'on suppose déja ces tendances dans le mobile: mais in concreto, en considérant les causes qui les y doivent produire, on trouvera qu'il ne se conserve pas seulement en tout la même quantité du progrès, mais aussi la même quantité de la force absolue et entière, qui est encore différente de la quantité du mouvement. On donnera une autre fois deux Consectaires fort généraux et fort importans, qui se tirent de cette règle.

XIV.

DEUX PROBLEMES CONSTRUITS PAR G. G. LEIBNIZ EN EMPLOYANT SA REGLE GENERALE DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENS.

Probleme I. Mener la tangente d'une ligne courbe qui se décrit par des filets tendus. Du point A de la courbe soit décrit un cercle quelconque, coupant les filets aux points B, C, D etc.; soit trouvé le centre de gravité de ces points, sçavoir G; et la droite AG sera perpendiculaire à la courbe, ou bien une droite menée par A, normale à AG, sera la tangente qu'on cherche. Lorsque le filet est double ou triple, il y faut considérer deux ou trois points dans un seul endroit, à peu près comme si un de ces points tenant lieu de plusieurs, étoit d'autant plus pesant. On peut appliquer cette construction non seulement aux coniques ordinaires, aux ovales de M. Descartes, aux coévolutions de M. de Tschirnhaus, mais encore à une infinité d'autres lignes. En voici la raison qui a servi de principe d'invention. C'est qu'on doit considérer que le stile qui tend les filets, pourra être conçu comme ayant autant de directions égales en vitesse entr'elles, qu'il y a de filets: car il les tire également, et comme il les tire, il en est tiré. Ainsi sa direction composée (qui doit être dans la perpendiculaire à la courbe) passe par le centre de gravité d'autant de points qu'il y a de filets (par la nouvelle règle

des compositions du mouvement, que l'on trouve dans le No. précédent). Et ces points, à cause de l'égalité des tendances dans notre cas, sont également distans du stile, et tombent ainsi dans les intersections du cercle avec les filets. M. de Tschirnhaus dans son livre intitulé Medicina mentis, ayant cherché le premier ce problême, m'a donné occasion d'y arriver; ce que je fais en prenant une voye, qui a cet avantage que l'esprit y fait tout sans calcul et sans diagrammes.

M. Fatio y est aussi arrivé de son chef par une très belle voye, et l'a publié le premier. Enfin M. le Marquis de l'Hôpital a donné sur ce sujet l'énonciation la plus générale qu'on puisse souhaiter, fondée sur la nouvelle méthode du calcul des différences.

Probleme II. Un même mobile étant poussé en même tems par un nombre infini de sollicitations, trouver son mouvement. J'appelle sollicitations les efforts infiniment petits ou conatus, par lesquels le mobile est sollicité ou invité, pour ainsi dire, au mouvement, comme est par exemple l'action de la pesanteur, ou de la tendance centrifuge, dont il en faut une infinité pour composer un mouvement ordinaire. Cherchez le centre de gravité du lieu de tous les points de tendance de ces sollicitations, et la direction composée passera par ce centre: mais les vitesses produites seront proportionelles aux grandeurs des lieux. Les lieux peuvent être des lignes, des surfaces, ou même des solides.

Le problême qu'on vient de résoudre est d'importance en Physique, car la nature ne produit jamais aucune action que par une multitude véritablement infinie des causes concourantes.

XV.

SPECIMEN DYNAMICUM PRO ADMIRANDIS NATURAE LEGIBUS CIRCA CORPORUM VIRES ET MUTUAS ACTIONES DETEGENDIS ET AD SUAS CAUSAS REVOCANDIS.

Pars I.

Ex quo Novae Scientiae Dynamicae condendae mentionem injecimus, multi Viri egregii variis in locis uberiorem hujus

doctrinae explicationem postularunt. Quando igitur librum componere nondum vacat, dabimus hoc loco, quae lucem aliquam accendere possint, fortasse etiam ad nos cum foenore redituram, siquidem sententias eorum eliciamus, qui vim cogitandi cum eloquendi humanitate conjunxerint, quorum judicia etiam grata nobis fore profitemur et ad profectionem operis profutura speramus. In rebus corporeis esse aliquid praeter extensionem, imo extensione prius, alibi admonuimus, nempe ipsam vim naturae ubique ab Autore inditam, quae non in simplici facultate consistit, qua Scholae contentae fuisse videntur, sed praeterea conatu sive nisu instruitur, effectum plenum habituro, nisi contrario conatu impediatur. Hic nisus passim sensibus occurrit, et meo judicio ubique in materia ratione intelligitur, etiam ubi sensui non patet. Quod si jam Deo per miraculum transcribi non debet, certe oportet, ut vis illa in ipsis corporibus ab ipso producatur, imo ut intimam corporum naturam constituat, quando agere est character substantiarum, extensioque nil aliud quam jam praesuppositae nitentis renitentisque id est resistentis substantiae continuationem sive diffusionem dicit, tantum abest, ut ipsammet substantiam facere possit. Nec refert, quod omnis corporea actio a motu est, motusque ipse non est nisi a motu sive in corpore jam ante existente sive aliunde impresso. Nam motus (perinde ac tempus) nunquam existit, si rem ad ἀκρίβειαν revoces, quia nunquam totus existit, quando partes coexistentes non habet. Nihilque adeo in ipso reale est, quam momentaneum illud quod in vi ad mutationem nitente constitui debet. Huc igitur redit quicquid est in natura corporea praeter Geometriae objectum seu extensionem. Eaque demum ratione simul et veritati et doctrinae Veterum consulitur. Et quemadmodum Democriti corpuscula, et Platonis ideas, et Stoicorum in optimo rerum nexu tranquillitatem nostra aetas a contemtu absolvit, ita nunc Peripateticorum tradita de Formis sive Entelechiis (quae merito aenigmatica visa sunt vixque ipsis Autoribus recte percepta) ad notiones intelligibiles revocabuntur, ut adeo receptam a tot seculis Philosophiam explicare potius, ita ut constare sibi possit (ubi hoc patitur) atque illustrare porro novisque veritatibus augere, quam abolere necessarium putemus.

Atque haec studiorum ratio mihi et prudentiae docentis et utilitati discentium maxime accommodata videtur, ne destruendi quam aedificandi cupidiores videamus neve inter perpetuas doctri-

nae mutationes audacium ingeniorum flatibus quotidie incerti jactemur, sed tandem aliquando humanum genus, refrenata sectarum libidine (quam inanis novandi gloria stimulat), constitutis certis dogmatibus, inoffenso pede non in Philosophia minus quam in Mathesi ad ulteriora progrediatur, cum in scriptis praestantium Virorum veterum et recentiorum (si ea fere adimas, quibus in alios durius dicunt) plurimum esse soleat veri et boni, quod esse in publicos thesauros digeri meretur. Idque utinam facere mallent homines, quam censuris tempus prodigere, quibus tantum vanitati suae litant. Nobis certe, quibus in novis et nostris quibusdam ita favit fortuna, ut de his solis cogitare nos passim juberent amici, nescio quomodo tamen pleraque etiam aliena non displicent et suo quodque pretio, etsi diverso, censetur; cujus rei fortasse causa est, quod plura agitando nihil spernere didicimus. Sed nunc in viam redeamus.

Duplex autem est Vis Activa (quam cum nonnullis non male Virtutem appelles), nempe ut primitiva, quae in omni substantia corporea per se inest (cum corpus omnimode quiescens a rerum natura abhorrere arbitrer), aut derivativa, quae primitivae velut limitatione, per corporum inter se conflictus resultans, varie exercetur. Et primitiva quidem (quae nihil aliud est, quam ἐντελέχεια ἡ πρώτη) animae vel formae substantiali respondet, sed vel ideo non nisi ad generales causas pertinet, quae phaenomenis explicandis sufficere non possunt. Itaque illis assentimur, qui formas in rerum sensibilium causis propriis specialibusque tradendis adhibendas negant: quod monere operae pretium est, ne, dum eas velut postliminio ad fontes rerum aperiendos reducimus, simul ad vulgaris Scholae battologias redire velle videamur. Interim necessaria earum notitia est ad recte philosophandum, nec quisquam se corporis naturam tenere satis putet, nisi animum talibus adverterit intellexeritque imperfectam, ne dicam falsam esse notionem illam substantiae corporeae crassam et ab imaginatione sola pendentem ac philosophiae corpuscularis (per se egregiae verissimaeque) abusu ab aliquot annis incaute introductam, quemadmodum vel hoc argumento constat, quod omnimodam cessationem ac quietem a materia non excludit, nec legum naturae vim derivativam moderantium rationes afferre potest. Similiter vis quoque passiva duplex est, vel primitiva vel derivativa. Et quidem vis primitiva patiendi seu resistendi id ipsum constituit,

quod materia prima, si recte interpreteris, in Scholis appellatur, qua scilicet fit, ut corpus a corpore non penetretur, sed eidem obstaculum faciat, et simul ignavia quadam, ut sic dicam, id est ad motum repugnatione sit praeditum, neque adeo nisi fracta nonnihil vi agentis impelli se patiatur. Unde postea vis derivativa patiendi varie in materia secunda sese ostendit. Sed nostrum est, generalibus illis ac primitivis sepositis suppositisque quibus ob formam corpus omne semper agere et ob materiam corpus omne semper pati ac resistere docemur, nunc quidem pergere ulterius, et in hac doctrina de virtutibus et resistentiis derivativis tractare, quatenus variis nisibus pollent corpora aut rursus varie renituntur; his enim accommodantur leges actionum, quae non ratione tantum intelliguntur, sed et sensu ipso per phaenomena comprobantur.

Vim ergo derivativam, qua scilicet corpora actu in se invicem agunt aut a se invicem patiuntur, hoc loco non aliam intelligimus, quam quae motui (locali scilicet) cohaeret, et vicissim ad motum localem porro producendum tendit. Nam per motum localem caetera phaenomena materialia explicari posse agnoscimus. Motus est continua loci mutatio, itaque tempore indiget. Mobile tamen in motu existens, ut in tempore habet motum, ita in quovis momento habet velocitatem, quae tanto major est, quanto plus spatii percurritur minusque impenditur tempus. Velocitas sumta cum directione Conatus appellatur; Impetus autem est factum ex mole corporis in velocitatem, ejusque adeo quantitas est, quod Cartesiani appellare solent quantitatem motus, scilicet momentaneam, tametsi accuratius loquendo ipsius motus, quippe in tempore existentis, quantitas ex aggregato impetuum durante tempore in mobili existentium (aequalium inaequaliumve) in tempus ordinatim ductorum nascatur. Nos tamen cum ipsis disputantes ipsorum loquendi morem secuti sumus. Quin etiam quemadmodum (non incommode ad usum loquendi doctrinalem) ab accessu jam facto faciendove distinguere possumus accessionem quae nunc fit, tamquam incrementum accessus vel elementum; aut quemadmodum descensionem praesentem a facto jam descensu, quem auget, distinguere licet; ita possemus praesentaneum seu instantaneum motus elementum ab ipso motu per temporis tractum diffuso discernere et appellare Motionem; atque ita quantitas motionis dicetur, quae vulgo motui tribuitur. Et quanquam in verbis faciles

simus post interpretationem habitam, antea tamen nos in iis curiosos esse oportet, ne ambiguitate decipiamur.

Porro ut aestimatio motus per temporis tractum fit ex infinitis impetibus, ita vicissim impetus ipse (etsi res momentanea) fit ex infinitis gradibus successive eidem mobili impressis, habetque elementum quoddam, quo non nisi infinities replicato nasci potest. Finge tubum AC (fig. 24) in plano horizontali hujus paginae certa quadam uniformi celeritate rotari circa centrum C immotum, et globum B in tubi cavitate existentem liberari vinculo vel impedimento, atque incipere moveri vi centrifuga; manifestum est, initio conatum a centro recedendi, quo scilicet globus B in tubo tendet versus ejus extremitatem A, esse infinite parvum respectu impetus quem jam tum habet a rotatione, seu quo cum tubo ipso globus B a loco D tendet versus (D) retenta a centro distantia. Sed continuata aliquamdiu impressione centrifuga a rotatione procedente, progressu ipso oportet nasci in globo impetum quendam centrifugum completum (D)(B) comparabilem cum impetu rotationis D(D). Hinc patet duplicem esse Nisum, nempe elementarem seu infinite parvum, quem et solicitationem appello, et formatum continuatione seu repetitione Nisuum elementarium, id est impetum ipsum, quanquam non ideo velim haec Entia Mathematica reapse sic reperiri in natura, sed tantum ad accuratas aestimationes abstractione animi faciendas prodesse.

Hinc Vis quoque duplex: alia elementaris, quam et mortuam appello, quia in ea nondum existit motus, sed tantum solicitatio ad motum, qualis est globi in tubo, aut lapidis in funda, etiam dum adhuc vinculo tenetur; alia vero vis ordinaria est, cum motu actuali conjuncta, quam voco vivam. Et vis mortuae quidem exemplum est ipsa vis centrifuga, itemque vis gravitatis seu centripeta, vis etiam qua Elastrum tensum se restituere incipit. Sed in percussione, quae nascitur a gravi jam aliquamdiu cadente, aut ab arcu se aliquamdiu restituente, aut a simili causa vis est viva, ex infinitis vis mortuae impressionibus continuatis nata. Et hoc est quod Galilaeus voluit, cum aenigmatica loquendi ratione percussionis vim infinitam dixit, scilicet si cum simplice gravitatis nisu comparetur. Etsi autem impetus cum vi viva semper sit conjunctus, differre tamen haec duo infra ostendetur.

Vis viva in aliquo corporum aggregato rursus duplex intelligi potest, totalis scilicet, vel partialis; et partialis iterum

vel respectiva vel directiva, id est vel propria partibus vel communis. Respectiva sive propria est, qua corpora aggregato comprehensa possunt agere in se invicem; directiva seu communis est, qua praeterea ipsum aggregatum extra se agere potest. Voco autem directivam, quia directionis totalis vis integra in hac vi partiali conservatur. Ea autem sola superesset, si subito aggregatum congelascere fingeretur motu partium inter se intercepto. Unde ex vi respectiva et directiva simul sumtis componitur vis totalis absoluta. Sed haec melius ex tradendis infra regulis intelligentur.

Veteres, quantum constat, solius vis mortuae scientiam habuerunt, eaque est, quae vulgo dicitur Mechanica, agens de vecte, trochlea, plano inclinato (quo cuneus et cochlea pertinent), aequilibrio liquorum, et similibus, ubi nonnisi de conatu primo corporum in se invicem tractatur, antequam impetum agendo conceperunt. Et licet leges vis mortuae àd vivam transferri aliquo modo possint, magna tamen cautione opus est, ut vel hinc decepti sint, qui vim in universum cum quantitate ex ductu molis in velocitatem facta confuderunt, quod vim mortuam in ratione horum composita esse deprehendissent. Nam ea res ibi speciali ratione contingit, ut jam olim admonuimus, quoniam (exempli gratia) gravibus diversis descendentibus, in ipso initio motus utique ipsi descensus seu ipsae quantitates spatiorum descensu percursorum, nempe adhuc infinite parvae seu elementares sunt celeritatibus seu conatibus descendendi proportionales. Sed progressu facto, et vi viva nata, celeritates acquisitae non amplius proportionales sunt spatiis descensu jam percursis, quibus tamen vim aestimandam olim ostendimus ampliusque ostendemus, sed tantum earum elementis. Galilaeus de vi viva (alio licet nomine, imo conceptu) agere coepit primusque explicuit, quomodo acceleratione gravium descendentium motus nascatur. Cartesius recte discrevit velocitatem a directione, et vidit etiam in conflictu corporum id sequi, quo minime mutantur priora. Sed minimam mutationem non recte aestimavit, dum solam directionem vel solam velocitatem mutat, cum contemperata ex ambobus instituenda esset mutatio: quod quomodo fieri deberet, ipsum fugit, quia res tam heterogeneae comparari ac contemperari posse, ipsi modalibus potius tunc quam realibus intento non videbantur, ut alios ejus in hac doctrina lapsus taceamus.

Honoratus Fabri, Marcus Marci, Joh. Alph.

Borellus, **Ignatius Baptista Pardies** et **Claudius de Chales**, aliique acutissimi viri in doctrina de motu non contemnenda dedere, sed errores tamen eosque capitales non vitavere. Primus, quod sciam, **Hugenius** qui aetatem nostram praeclaris inventis illustravit, in hoc quoque argumento ad puram et liquidam veritatem pervenisse mihi videtur et doctrinam hanc a paralogismis liberasse, regulis quibusdam olim publicatis. Easdem fere regulas **Wrennus** quoque, **Wallisius** et **Mariottus**, viri in his studiis diversa licet ratione excellentes, obtinuere. Sed de causis tamen non eadem sententia est; unde neque easdem conclusiones egregii in his studiis viri semper admittunt. Atque adeo veri fontes hujus scientiae nondum, quod constat, fuere reclusi. Nec sane ab omnibus agnoscitur, quod mihi certum videtur: repercussionem sive reflexionem non nisi a vi elastica, id est intestini motus renisu proficisci. Nec notionem ipsam virium quisquam ante nos explicavit, quae res hactenus turbavit Cartesianos aliosque, qui motus vel impetus summam (quam pro virium quantitate habent) post concursum a priore diversam prodire posse, vel ideo capere non potuerunt, quod eo ispo etiam virium quantitatem mutari crediderunt.

Mihi adhuc juveni, et corporis naturam cum Democrito et hujus ea in re sectatoribus Gassendo et Cartesio in sola massa inerte tunc constituenti, excidit libellus **Hypotheseos physicae** titulo, quo Theoriam motus pariter a systemate abstractam et systemati concretam exposui, quem ultra mediocritatis suae meritum, multis praeclaris viris video placuisse. Ibi statui, supposita tali corporis notione, omne incurrens suum conatum dare excipienti seu directe obstanti qua tali. Nam cum in momento incursus pergere conetur adeoque secum abripere excipiens, conatusque ille (ob corporis ad motum quietemve creditam mihi tunc indifferentiam) suum effectum omnino habere debeat in excipiente, nisi contrario conatu impediatur, imo etiamsi eo impediatur, quando tantum diversos illos conatus inter se componi oportet: manifestum erat nullam causam reddi posse, cur non incurrens effectum, ad quem tendit, consequatur, seu cur non excipiens recipiat conatum omnem incurrentis, adeoque motum excipientis ex pristino suo et recepto novo seu alieno conatu compositum esse. Ex quo porro ostendebam: si solae mathematicae notiones, magnitudo, figura, locus, horumque mutatio, aut in ipso concursus momento mutandi

conatus in corpore intelligerentur, nulla habita ratione notionum metaphysicarum, potentiae scilicet actricis in forma et ignaviae, seu ad motum resistentiae in materia, atque adeo si necesse esset concursus eventum sola compositione conatuum Geometrica, ut explicuimus, determinari: tunc sequi debere, ut incurrentis, etiam minimi, conatus toti excipienti, licet maximo, imprimatur, atque adeo maximum quiescens a quantulocunque incurrente sine ulla hujus retardatione abripiatur, quandoquidem tali materiae notione nulla ejus ad motum repugnatio, sed indifferentia potius continetur. Unde non magis difficile foret impellere magnum quiescens, quam parvum, essetque adeo actio sine reactione, nullaque fieri posset potentiae aestimatio, cum quidvis a quovis praestari posset. Quae, aliaque id genus multa, cum sint ordini rerum adversa et cum principiis verae Metaphysicae pugnent, ideo tunc quidem putavi (et vere quidem) sapientissimum rerum Autorem structura systematis vitasse, quae per se ex nudis motus legibus a pura Geometria repetitis consequerentur.

Sed postea omnia altius scrutatus, vidi in quo consisteret systematica rerum explicatio, animadvertique hypothesin illam priorem notionis corporeae non esse completam, et cum aliis argumentis tum etiam hoc ipso comprobari, quod in corpore praeter magnitudinem et impenetrabilitatem poni debeat aliquid, unde virium consideratio oriatur, cujus leges metaphysicas extensionis legibus addendo nascantur eae ipsae regulae motus, quas systematicas appelleram, nempe ut omnis mutatio fiat per gradus, et omnis actio sit cum reactione, et nova vis non prodeat sine detrimento prioris, adeoque semper abripiens retardetur ab abrepto, nec plus minusve potentiae in effectu quam in causa contineatur. Quae lex cum non derivetur ex notione molis, necesse est consequi eam ex alia re, quae corporibus insit, nempe ex ipsa vi, quae scilicet eandem semper quantitatem sui tuetur, licet a diversis corporibus exerceatur. Hinc igitur, praeter pure mathematica et imaginationi subjecta, collegi quaedam metaphysica solaque mente perceptibilia esse admittenda, et massae materiali principium quoddam superius, et ut sic dicam formale addendum, quandoquidem omnes veritates rerum corporearum ex solis axiomatibus logisticis et geometricis, nempe de magno et parvo, toto et parte, figura et situ, colligi non possint, sed alia de causa et effectu, actioneque et passione accedere debeant, quibus ordinis rerum rationes salventur. Id principium

Formam, an ἐντελέχειαν, an Vim appellemus, non refert, modo meminerimus per solam virium notionem intelligibiliter explicari.

Quod vero hodie egregii quidam viri, hoc ipsum videntes, vulgarem nempe materiae notionem non sufficere, Deum accersunt ἀπὸ μηχανῆς, vimque omnem agendi auferunt rebus, quasi Mosaica quadam Philosophia (ut Fluddus olim vocabat), assentiri non possum. Tametsi enim praeclare ab ipis animadversum concedam, substantiae unius creatae in aliam influxum proprium nullum esse, si res ad metaphysicum rigorem exigatur, fatearque etiam libenter omnes res continua semper creatione a Deo proficisci; nullam tamen veritatem naturalem in rebus esse puto, cujus ratio immediate petenda sit ex divina actione vel voluntate, sed semper rebus ipsis aliqua a Deo esse indita, unde omnia earum praedicata explicentur. Certe non corpora tantum Deum creasse constat, sed et animas, quibus entelecheiae primitivae respondent. Verum haec alias suis propriis rationibus profundius eductis demonstrabuntur.

Interim etsi principium activum materialibus notionibus superius et ut sic dicam vitale ubique in corporibus admittam, non ideo tamen Henrico Moro aliisque viris pietate et ingenio insignibus hic assentior, qui Archaeo nescio quo aut hylarchico principio etiam ad phaenomena procuranda sic utuntur, quasi scilicet non omnia mechanice explicari possint in natura, et quasi qui hoc conentur, incorporea tollere videantur, non sine suspicione impietatis; aut quasi cum Aristotele Intelligentias orbibus rotandis affigere necesse sit, aut elementa dicendum sit sursum vel deorsum a forma sua agi, compendiosa sed inutili docendi ratione: His, inquam, non assentior, nec magis ista mihi Philosophia, quam illa quorundam placuit Theologia, qui Jovem tonare aut ningere sic credebant, ut causarum propiorum inquisitores etiam Atheismi crimine infamarent. Optimum meo judicio temperamentum est, quo pietati pariter et scientiae satisfit, ut omnia quidem phaenomena corporea a causis efficientibus mechanicis peti posse agnoscamus, sed ipsas leges mechanicas in universum a superioribus rationibus derivari intelligamus, atque ita causa efficiente altiore tantum in generalibus et remotis constituendis utamur. His vero semel stabilitis, quoties postea de rerum naturalium causis efficientibus propinquis et specialibus tractatur, animabus aut Entelecheiis locum non demus, non magis quam otiosis facultatibus aut inexplicabilibus

sympathiis, cum nec ipsa causa efficiens prima atque universalissima specialibus tractationibus intervenire debeat, nisi quatenus fines spectantur, quos divina Sapientia habuit in rebus sic ordinandis, ne quam laudis ejus et hymnorum pulcherrimorum canendorum occasionem negligamus.

Sane et finales causae (ut singulari plane exemplo optici principii, celeberrimo Molineusio in Dioptricis suis valde probante, ostendi) subinde magno cum fructu etiam in physicis specialibus adhibentur, non tantum ut supremi Autoris pulcherrima opera magis admiremur, sed etiam ut divinemus interdum hac via, quae per illam efficientium non aeque aut non nisi hypothetice patent. Quem usum hactenus fortasse Philosophi nondum satis observarunt. Et in universum tenendum est, omnia in rebus dupliciter explicari posse: per regnum potentiae seu causas efficientes, et per regnum sapientiae seu per finales; Deum corpora ut machinas more architecti secundum leges magnitudinis vel mathematicas, et quidem in usum animarum; animas vero, sapientiae capaces, ut cives suos et societatis cujusdam cum ipso participes, more Principis, imo patris secundum leges bonitatis vel morales ad suam gloriam moderantem, permeantibus sese ubique ambobus regnis, inconfusis tamen et imperturbatis legibus utriusque, ita ut simul et regno potentiae maximum et regno sapientiae optimum obtineatur. Sed nobis hoc loco regulas generales virium effectricium constituere propositum est, quibus in causis specialibus efficientibus explicandis uti deinde possimus.

Porro ad veram virium aestimationem, et quidem prorsus eandem, diversissimis itineribus perveni: uno quidem a priori, ex simplicissima consideratione spatii, temporis et actionis (quod alias exponam), altero a posteriori, vim scilicet aestimando ab effectu quem producit se consumendo. Nam effectum hic intelligo non quemlibet, sed cui vis impendi seu in quo consumi debet, quem ideo violentum appellare possis, qualis non est ille, quem corpus grave in plano perfecte horizontali percurrendo exercet, quia tali effectu utcunque producto eandem semper vim retinet, quamquam et hoc ipso effectu, ut ita dicam, innocuo recte adhibito, hanc nostram aestimandi rationem consecuti simus, sed nunc a nobis seponetur. Elegi autem effectum ex violentis illum, qui maxime capax est homogenei seu divisionis in partes similes et aequales,

qualis est in ascensu corporis gravitate praediti: nam elevatio gravis ad duos vel tres pedes praecise dupla vel tripla est elevationis gravis ejusdem ad pedem unum; et elevatio gravis dupli ad unum pedem facta, praecise dupla est elevationis gravis simpli ad altitudinem pedis unius; unde elevatio gravis dupli ad tres pedes praecise sextupla est elevationis gravis simpli ad pedem unum, supposito scilicet (saltem docendi causa, etsi aliter fortasse in veritate se res habeat, sed insensibili tamen hic errore) gravia aeque gravitare in majore aut minore ab horizonte distantia. Nam in elastro non aeque facile locum homogeneitas habet. Cum igitur comparare vellem corpora diversa aut diversis celeritatibus praedita, equidem facile vidi, si corpus A sit simplum et B sit duplum, utriusque autem celeritas aequalis, illius quoque vim esse simplam, hujus duplam, cum praecise quicquid in illo ponitur semel, in hoc ponatur bis. Nam in B est bis corpus ipsi A aequale et aequivelox, nec quicquam ultra. Sed si corpora A et C sint aequalia, celeritas autem in A sit simpla et in C dupla, videbam, non praecise quod in A est, duplari in C, cum dupletur quidem celeritas, non tamen et corpus. Et peccatum hic fuisse vidi ab iis, qui sola ista reduplicatione modalitatis vim ipsam duplicari crediderè; quemadmodum jam olim observavi admonuique, veram neque hactenus (post tot licet Elementa Matheseos universalis scripta) traditam aestimandi artem in eo consistere, ut denique ad homogeneum aliquid, id est accuratam et omnimodam non modorum tantum, sed et rerum reduplicationem perveniatur. Cujus methodi non aliud melius illustriusque specimen dari potuit, quam quod exhibetur in hoc ipso argumento.

Haec ergo ut obtinerem, consideravi an duo ista corpora A et C magnitudine aequalia, sed celeritate diversa, effectus aliquos producere possint causis suis aequipollentes et inter se homogeneos. Ita enim quae per se non facile poterant, saltem per effectus suos accurate compararentur. Effectum autem causae suae aequalem esse debere sumsi, si totius virtutis impendio seu consumtione producatur: ubi non refert, quanto tempore producatur. Ponantur ergo corpora A et C (fig. 25) esse gravia, et vim suam convertere in ascensum, quod fiet, si eo momento quo celeritates suas dictas habent, A simplam, B duplam in extremis pendulorum verticalium PA, EC existere intelligantur. Constat autem e Galilaei aliorumque demonstratis, corpore A celeritate ut 1 ad summum

ascendente super horizontem HR ad altitudinem $_2AH$ pedis unius, utique corpus C celeritate ut 2 ascendere (ad summum) posse ad altitudinem $_2CR$ pedum quatuor. Unde jam consequens est, grave habens celeritatem ut 2, potentia quadruplum esse habentis gradum celeritatis ut 1, cum totius suae virtutis impendio praecise quadruplum efficere possit. Nam libram (id est se ipsum) attollens ad pedes quatuor, praecise quater attollit unam libram ad unum pedem. Eodemque modo generaliter colligitur, vires aequalium corporum esse ut quadrata celeritatum, et proinde vires corporum in universum esse in ratione composita ex corporum simplice et celeritatum duplicata.

Eadem confirmavi ad absurdum (nempe ad motum perpetuum) redigendo contrariam sententiam, vulgo, praesertim apud Cartesianos receptam, qua vires creduntur esse in ratione composita corporum et celeritatum: qua etiam methodo usus sum subinde, ut duos status virtute inaequales definirem a posteriori, et majorem simul a minori certa nota distinguerem. Nec cum alterutrum alteri substituendo motus oritur perpetuus mechanicus seu effectus potior causa, status illi sibi minime aequipollent, sed ille qui substitutus est alteri, potior fuit, quia majus aliquid praestari effecit. Pro certo autem assumo, naturam nunquam sibi viribus inaequalia substituere, sed effectum integrum semper causae plenae aequalem esse; et vicissim quae viribus aequalia sunt, tuto ratiocinio sibi substitui a nobis posse, liberrima suppositione, quasi substitutionem illam actu effecissemus, nulloque adeo perpetui motus mechanici motu. Quod si ergo verum esset, quod vulgo sibi persuadent, aequipollere inter se grave A ut 2 (sic enim nunc sumamus) praeditum celeritate ut 1, et grave C ut 1 praeditum celeritate ut 2, debet alterutrum alteri impune substitui posse. Sed hoc verum non est. Nam ponamus, A ut 2 celeritatem ut 1 acquisivisse descensu $_2A_1A$ ex altitudine $_2AH$ minus pedis; jamque ipso in $_1A$ seu in horizonte existente, substituamus pro ipso aequipollens (ut volunt) pondus C ut 1 celeritate ut 2, quod ascendat usque ad C seu ad altitudinem 4 pedum. Itaque solo descensu ponderis A duarum librarum ex altitudine unius pedis $_2AH$, substitutoque aequipollente, effecimus ascensum librae unius ad pedes quatuor, quod est duplum prioris. Ergo tantundem virium lucrati sumus, seu motum mechanicum perpetuum effecimus, quod utique absurdum est. Nec refert, an per motuum leges actu efficere possimus

ab alio minore nullo modo loco pelli posse, aliaque id genus, quibus nihil est a veritate alienius. Sequitur etiam ex natura motus respectiva, eandem esse corporum actionem in se invicem seu percussionem, modo eadem celeritate sibi appropinquent, id est manente eadem apparentia in phaenomenis datis, quaecunque demum sit vera hypothesis seu cuicunque demum vere ascribamus motum aut quietem, eundem prodire eventum in phaenomenis quaesitis seu resultantibus, etiam respectu actionis corporum inter se. Atque hoc est quod experimur, eundem nos dolorem sensuros sive in lapidem quiescentem ex filo si placet suspensum incurrat manus nostra, sive eadem celeritate in manum quiescentem incurrat lapis. Interim ita loquimur, prout res postulat, ad aptiorem simplicioremque phaenomenorum explicationem, prorsus quemadmodum in Sphaericis motum primi mobilis adhibemus et in theoria planetarum Copernicana Hypothesi uti debemus, ut jam lites illae tanto conatu agitatae (quibus etiam Theologi fuere implicati) prorsus evanescant. Etsi enim vis aliquid reale et absolutum sit, motus tamen ad classem pertinet phaenomenorum respectivorum, et veritas non tam in phaenomenis quam in causis spectatur.

Ex nostris quoque corporis viriumque notionibus id nascitur, ut quod in substantia fit, sponte et ordinate fieri intelligi possit. Cui connexum est ut nulla mutatio fiat per saltum. Quo posito sequitur etiam, Atomos dari non posse. Cujus consequentiae vis ut capiatur, ponamus Corpora A et B (fig. 26) concurrere et $_1A$ venire in $_2A$, itemque $_1B$ in $_2B$, et ita concurrentia in $_2A_2B$ reflecti ex $_2A$ in $_3A$, et ex $_2B$ in $_3B$. Fingatur autem esse atomos id est corpora summe dura adeoque inflexibilia, patet fieri mutationem per saltum, seu momentaneam, motus enim directus in ipso momento concursus fit retrogradus nisi statim post concursum corpora quiescere id est vim amittere ponamus, quae res praeterquam quod aliunde absurda foret, iterum mutationem per saltum, momentaneam scilicet a motu ad quietem, nec tamen per intermedios gradus transitum contineret. Itaque sciendum est, si corpora A et B (fig. 27) concurrant veniantque ex $_1A$, $_1B$ in locum concursus $_2A_2B$, ibi paulatim comprimi, instar duarum pilarum inflatarum, et magis magisque ad se invicem accedere aucta continue pressione; ea autem re ipsum motum debilitari, vi ipsa conatus in corporum elastra translata, donec omnino

ad quietem redigantur; tum vero demum restituente sese corporum Elastro ipsa a se invicem resilire, motu retrogrado a quiete rursus incepto continueque crescente, tandem eadem celeritate, qua ad se appropinquaverunt, recuperata sed in contrarium versa a se invicem recedere atque in loca $_2A$, $_2B$ redire quae coincidunt locis $_1A$, $_1B$, si corpora aequalia et aequivelocia ponantur. Inde jam patet quo modo nulla fiat per saltum mutatio, sed paulatim imminuto progressu tandemque ad quietem redacto tum demum regressus oriatur. Ita ut quemadmodum ex figura una non fit alia (veluti ex circulo ovalis) nisi per innumeras figuras intermedias, nec a loco in locum aut a tempore in tempus nisi per omnia loca temporaque intermedia transitur; ita nec ex motu quies fiet multoque minus motus oppositus, nisi per omnes intermedios motuum gradus. Quod cum tanti in natura momenti sit, tam parum animadversum miror. Sequitur ex his quod Cartesius in Epistolis impugnaverat, et nunc quoque magni quidam viri admittere nolunt, *omnem reflectionem oriri ab Elastro*, et multorum praeclarorum experimentorum ratio redditur, quae indicant *corpus prius flecti quam propellatur*, quod Mariottus perpulchre illustravit. Denique illud maxime mirabile ex his sequitur, ut nullum corpus tam exiguum sit, quin elastrum habeat adeoque a fluido adhuc subtiliore permeetur; ac proinde *nulla esse Elementa corporum*, nec materiam fluidissimam, nec globulos nescio quos secundi Elementi solidos, exactos et durabiles dari, sed analysin procedere in infinitum.

Huic *Legi Continuitatis* a mutatione saltum excludentis etiam illud consentaneum est, ut casus quietis haberi possit pro speciali casu motus, scilicet pro motu evanescente seu minimo, et ut casus aequalitatis haberi possit pro casu inaequalitatis evanescentis. Unde consequens est Leges motuum tales assignari debere, ut non sit opus peculiaribus regulis pro corporibus aequalibus et quiescentibus, sed hae ex regulis corporum inaequalium et motorum per se nascantur, vel si velimus peculiares regulas enuntiare pro quiete et aequalitate, cavendum esse ne tales assignemus, quae non consentiant hypothesi quietem pro motu novissimo aut aequalitatem pro ultima inaequalitate habenti, alioqui violabimus rerum harmoniam, et regulae nostrae non convenient inter se. Hoc novum regulas nostras alienasve examinandi artificium publicavi primum in Novellis Reipublicae literariae Julii 1687 artic. 8.

vocavique principium ordinis generale, nascens ex infiniti et conti nui notione, accedente ad illud axioma, quod datis ordinatis etiam quaesita sunt ordinata. Rem ita universaliter expressi: Si casu ad casum continue accedat in datis tandemque in ipsum evanescat, necesse est ut etiam eventus casuum sibi continue accedant in quaesitis tandemque in invicem desinant. Prorsus ut in Geometricis casus Ellipseos accedit continue ad casum Parabolae, prout foco uno manente alter magis magisque remotus assumi ponitur, donec in casu alterius foci infinite remoti Ellipsis in Parabolam abit. Unde omnes regulas Ellipseos necesse est in Parabola (sumta pro Ellipsi cujus alter focus infinite absit) verificari. Unde et radii in parabolam parallele incidentes tanquam ab altero foco venientes vel ad eum tendentes concipi possunt. Cum igitur eodem modo casus quo corpus A incurrit in B motum, continue variari possit, ut manente motu ipsius A, motus ipsius B ponatur minor ac minor, donec tandem ponatur evanescens in quietem atque inde rursus in contraria directione crescat; dico eventum incursus, sed in quod resultans sive in ipso A sive in ipso B, ambobus motis continue accedere ad eventum incursus qui est in casu B quiescentis, atque in eum denique desinere; adeoque casum quietis tam in datis quam in eventu seu quaesitis esse limitem casuum motus in directum vel communem limitem motus directi et continui, adeoque velut exemplum alterutrius speciale. Ad hunc lydium lapidem a Geometria ad Physicam a me translatum, cum examinarem regulas motuum Cartesianas, mirum dictu contingit, ut hiatus quidam saltusve sese ostenderet prorsus a rerum natura abhorrens, nam exprimendo quantitates per lineas, et motus ipsius B ante concursum tanquam casus datos pro abscissis, motus autem ejusdem post concursum tanquam eventus quaesitos pro ordinatim applicatis sumendo, et lineam ducendo per extremitates ordinatarum, ex praescripto regularum Cartesii, haec linea non fuit unum continuum sed quiddam mirabiliter hians atque subsultans modo quodam absurdo et incogitabili. Cumque ea occasione notassem etiam R. P. Malebranchii regulas hoc examen non per omnia ferre, Vir egregius re iterum expensa pro candore suo professus est, hinc occasionem sibi natam mutandi regulas suas, quam in rem et brevem libellum edidit. Tametsi fatendum sit, quod ad usum hujus

artificii novi nondum satis attendisset, reliquisse eum quae nunc quoque nondum satis per omnia quadrant.

Ex dictis illud quoque mirabile sequitur, *quod omnis corporis passio sit spontanea seu oriatur a vi interna licet occasione externi.* Intelligo autem hic passionem propriam, quae ex percussione nascitur seu quae eadem manet, quaecunque demum assignetur hypothesis, seu cuicunque demum absolutam quietem motumve ascribamus. Nam cum eadem sit percussio, cuicunque demum verus competat motus, sequitur effectum percussionis inter ambo aequaliter distribui, adeoque *ambo in concursu aequaliter agere,* adeoque dimidium effectus ab unius actione, alterum dimidium ab alterius actione oriri; et cum dimidium quoque effectus seu passionis in uno sit dimidium in altero, sufficit, ut passionem quae in uno est, etiam ab actione quae in ipso est derivemus, nec ullo unius in alterum influxu indigeamus, etsi ab uno actioni alterius mutationem in se ipso producentis occasio praebeatur. Nempe dum concurrunt A et B, resistentia corporum conjuncta cum Elastro facit ut ob percussionem comprimantur, et aequalis est compressio in utroque et pro quacunque hypothesi, quod etiam experimenta ostendent, si quis pilas inflatas concurrere fingat, sive ambae sint in motu, sive alterutra quiescat, etiamsi quiescens ex filo aliquo sit suspensa, ut facillime recedere possit, semper enim dummodo eadem sit celeritas appropinquationis seu respectiva, eadem erit compressio, sive intensio elastri, et aequalis in ambabus. Porro restituentibus sese pilis A et B vi Elastri sui acris scilicet compressi inclusi, sese mutuo a se invicem repellent et quasi arcu displodent, et vi utrinque aequali unumquodque se ab altero repellet, adeoque non vi alterius sed vi propria ab eo recedet. Quod autem de pilis inflatis, id de omni corpore quatenus in percussione patitur, intelligendum est, ut scilicet repercussio ac dissultus ab elastro in ipso, id est a motu materiae fluidae aethereae permeantis, adeoque a vi interna seu intus existente oriatur. Intelligo autem ut dixi corporum *motum proprium,* sequestratum a *communi* qui centro gravitatis ascribi potest; unde proprius eorum motus sic fingendus est (fingendus, inquam, per modum hypotheseos) ac si in navi ferrentur, quae haberet motum centri gravitatis ipsorum communis, ipsa autem in navi sic moverentur ut ex motu composito communi navis seu centri, et ipsorum proprio, phaenomena salventur. Ex dictis etiam

intelligitur, *Actionem corporum nunquam esse sine reactione, et ambas inter se aequales, ac directe contrarias esse.*

Cum etiam non nisi vis et nascens inde nisus quovis momento existat (motus enim nunquam revera existit, ut supra exposuimus) nisusque omnis tendat in linea recta, consequens est *omnem motum rectilineum aut ex rectilineis compositum esse.* Hinc jam non tantum sequitur, *quae in linea curva moventur, conari semper procedere in recta eam tangente*, sed etiam, quod minime aliquis expectet, oritur hinc *vera notio firmitatis.* Nam si ponamus aliquod ex iis quae firma dicimus (quanquam revera nihil sit absolute firmum fluidumve, sed certum habeat firmitatis fluidibilitatisque gradum, a nobis autem ex praedominio respectu nostrorum sensuum denominetur) circulari circa suum centrum, partes per tangentem conabuntur avolare, imo avolare incipient re ipsa, sed quoniam his ipsorum a se invicem discessus turbat motum ambientis, hinc repelluntur seu rursus contruduntur ad se invicem, quasi centro inesset vis attrahendi magnetica, aut quasi ipsis partibus inesset vis centripeta, et proinde circulatio ex nisu rectilineo recedendi per tangentem et conatu centripeto inter se compositis orietur. Manetque adeo omnem motum curvilineum ex nisibus rectilineis inter se compositis oriri, simulque intelligitur hanc contrusionem ab ambiente esse causam omnis firmitatis. Alioqui fieri non posset, ut omnis motus curvilineus ex meris rectilineis componeretur. Unde et rursus novam contra Atomos nec minus priore inexpectatam rationem habemus. Nihil autem potuit magis alienum a rebus excogitari, quam firmitatem a quiete peti, nam *nulla est unquam quies vera in corporibus*, nec a quiete aliud nasci potest quam quies; licet autem A et B apud se invicem quiescant, si non vere, saltem respective (quanquam nec hoc unquam accurate contingat, *nullum enim corpus eandem exacte ab alio distantiam quantulocunque tempore servat*) et licet quicquid semel quiescit, semper quieturum sit nisi accedat nova causa, non ideo tamen sequitur, ut quia B resistit impellenti, resistat etiam ab alio sejungenti, ita nempe ut superata resistentia ipsius B, seu ipso B propulso, simul A sequatur. Quod revera esset *attractio*, quae in natura non datur, ex firmitate autem primitiva, vel per quietem aut simile aliquid explicata, utique seque-

retur. Itaque firmitas quoque nisi per contrusionem ab ambiente factam explicari non debet. Nam pressio sola rem non satis explicat, quasi impediatur tantum discessus ipsius B ab ipso A, sed intelligendum est, reapse a se invicem discedere, ab ambiente autem unum ad aliud rursus impelli adeoque ex compositione duorum motuum hanc conjunctionis conservationem produci. Itaque qui in corporibus Tabulas quasdam sive laminas insensibiles concipiunt (ad exemplum duorum marmorum politorum, quae sibi accurate applicantur) quarum divulsio ob resistentiam ambientis difficulter fit; et hinc explicant corporum duorum sensibilium firmitatem, etsi persaepe verum dicant, cum tamen in laminis rursus aliquam firmitatem supponant, ultimam rationem firmitatis non reddunt. Ex his quoque intelligi potest, cur magnorum quorundam Mathematicorum sententiis quibusdam philosophicis hac in re stare non possim, qui praeterquam quod vacuum spatium admittunt et ab attractione non abhorrere videntur, etiam motum habent pro re absoluta, idque ex circulatione indeque nata vi centrifuga probare contendunt. Sed quoniam circulatio quoque non nisi ex rectilineorum motuum compositione nascitur, sequitur si salva est aequipollentia Hypothesium in motibus rectilineis suppositis utcunque, etiam in curvilineis salvam fore.

Intelligi etiam ex dictis potest, Motum communem pluribus corporibus ipsorum inter se actiones non mutare, quoniam celeritas qua sibi invicem appropinquant, adeoque vis concursus qua in se invicem agunt, non immutatur. Unde consequuntur praeclara experimenta quae retulit Gassendus in Epistolis de motu impresso a motore translato, ut illis satisfaceret, qui ex motu projectorum quietem globi terrae inferre posse sibi videbantur. Cum tamen certum sit, si qui in magna navi (clausa si placet, vel certe ita constituta, ut externa a vectoribus notari nequeant) ferantur, navis autem magna licet celeritate, placide tamen sive aequabiliter moveatur, ipsos nullum habituros principium discernendi (ex iis scilicet quae in navi contingunt) utrum navis quiescat an moveatur, etiamsi forte pila in navi ludatur, aliive motus exerceantur. Idque notandum est in eorum gratiam, qui non recte percepta Copernicanorum sententia credunt, secundum hos projecta ex terra in aërem, ab aëre cum tellure gyrante abripi, atque ita motum fundi sequi, et perinde in terram recidere ac si haec quievisset; quod

merito insufficens judicatur, cum doctissimi viri qui utunt
pothesi Copernicana potius concipiant, quicquid in terrae sup
est cum terra moveri, et proinde arcu vel tormento excussa
petum a terrae gyratione impressum una cum impetu proje
impresso, secum deferre. Unde cum duplex eorum motus sit
cum terra communis, alter a projectione proprius, non mirum
si motus communis nil mutet. Interim non est dissimulandu
projecta tam longe excuti possent, vel si navis tam ampla,
retur et tanta celeritate lata, ut ante descensum gravis ter
navis arcum describeret notabiliter a recta differentem; disc
repertum iri, quia tunc revera terrae vel navis motus (quipp
cularis) motui qui a navis vel terrae gyratione missili fuit im
sus (quippe rectilineus) non maneat communis. Et in graviu
ad centrum externa accedat actio, quae non minus diversi
phaenomenorum producere potest, quam si in navi clausa
nautica polam respiciens haberetur, quae utique flexus navis
caret. Quoties autem de aequipollentia hypothesium agitur,
conjungenda sunt quae ad phaenomena concurrunt. Ex his
intelligitur, compositionem motuum aut motus unius in duo
resve quamcunque resolutionem tuto adhiberi posse, de qua
ingeniosus quidam vir apud Wallisium non absurde dubita
Res enim utique comprobationem meretur, nec (ut a plerisqu
tum est) tanquam per se nota assumi potest.

XVII.

ILLUSTRATIO TENTAMINIS DE MOTUUM COELESTI CAUSIS.

Pars I.

Complures viri rerum Astronomicarum intelligentes a m
siderarunt, ut iis responderem quae Tentamini meo circa c
motuum coelestium Anno 1689 in Februario Actorum edito
ita pridem opposuit doctissimus Autor operis sub nomine As
nomiae Physicae et Geometricae publicati, quo Newtoni
Hypothesin potissimum illustrare aggressus est. Ego vero
quam haec iterum mihi discutienda fuissent, maluissem ad ob

tiones omnia expensa diligentius, praesertim cum Astronomus summus Joh. Dominicus Cassinus novi generis Ovales ex eo attulerit, et nulla hypothesi contentus videatur Cl. Lahirius in his studiis excellens. Reique satis dijudicandae proclivior spes erit, ubi et hi rationes suas protulerint, et virorum celeberrimorum coelique spectandi studio insignium, Joannis Flamstedii Angli et Godefridi Kirchii Societatis Regiae Brandeburgicae Astronomi, triginta circiter annorum observationes prodierint, quales item a Parisino Observatorio multas et accuratas expectamus; plurimumque etiam nobis a praeclaris excellentis Mathematici Olai Romeri laboribus non possumus non polliceri. Tum primum certius pronuntiare licebit, quantum Linea Motus planetarii declinet ab Ellipsi; utrum id tribuendum non Solis tantum aut corporis centrici alterius, sed et aliorum corporum attractioni, et annon concurrat notabiliter impressio fluidi quod tanquam deferens aut tanquam resistens concipi aliquo modo possit. Interim morem gerendum amicis putavi, ne aut publico aut ipsi doctissimo objectori defuisse videar, cujus objectiones habentur operis lib. 1 prop. 77. Sed parte priore hujus Schediasmatis proprias quasdam emendationes atque declarationes Tentaminis mei dabo, posteriore objectionibus satisfacere conabor.

I) Constat me tunc cum Tentamen ad Actorum Lipsiensium Collectores misi in itinere dissitisque locis fuisse, neque Newtonianorum Principiorum Librum adhuc inspexisse, sed tantum Recensionem ejus vidisse in Actis factam, ut ipse ibi innuo (§ 20 Tentaminis) et nunc iterum annoto, quia doctissimus Dn. objector mirari visus est (dicto libro 1 prop. 77 pag. 99), Tentamen illud tale post edita Newtoniana Principia prodiisse. Sed me ipsa illa in Actis visa recensio ad edendas etiam meas cogitationes incitarat, quas me alteris nondum visis auditisve nondumque editis (ut res est) habuisse, ipsa earum ex aliis plane fontibus facta deductio necessariusque sententiarum inter se nexus evincit.

2) Porro Legis paracentricarum attractionum sive Gravitatis solicitationum tunc rationem reddere distuleram, ut ipse innuo in fine Tentaminis supra dicti, quanquam et Hugenio per literas eam indicaverim et in Italia Cl. Fardellae, nunc apud Patavinos Professori doctissimo, coram tunc exposuerim, concipiendo scilicet radios (id est propagationes rectilineas) attractionis, quales lucis. Itaque

quali argumento jam demonstraverant Mathematici corpora illuminari in ratione distantiarum reciproca duplicata (quod et a Montanario sibi demonstratum Cl. Fardella meminerat), tali ostendi judicabam, consentaneum esse ut gravitatis impressio eadem lege decrescere intelligeretur. Sane in quadam mea cum Cl. Papini συνζητήσει de causa gravitatis (Act. Maj. 1690) hanc quoque Analogiam Gravitatis et radiationis indicabam, eamque explosionibus materiae compressae ex centrali corpore assidue factis illustrabam. Nam si ingens massa explosionibus (quales sunt accensi pulveris vel saltem sclopeti ventanei, cujus non dispar natura) continue fulminaret, utique in circumjacentibus crassioribus corporibus multas cavitates habentibus adeoque minorem quam materia emissa et circumfusa densitatem specificam habentibus gravitatio versus Massam emittentem produceretur, minore in his spongiosis aut pumicosis corporibus futuro nisu recedendi a centro explosionis, quam in fluido ambiente valde denso valdeque subtili, quod assidua explosio semper propellit. Neque enim in hac hypothesi necesse est, ut emissa particula ad ipsum usque grave pertingant. Caeterum legum Radiationis Demonstratio generalis nota dudum, sed hic paulo distinctius exposita haec est. Sit punctum Radians C (fig. 26) sintque superficies sphaericae ABD, EFG concentricae circa idem punctum C. Quia iidem radii sunt in utraque superficie, erunt irradiationes utriusque superficiei aequales, quae esto positio prima. Sed irradiatio portiunculae seu puncti physici in superficie est ad irradiationem totius superficiei, ut portiuncula ad superficiem, quae sit positio secunda; quia nimirum irradiatio superficiem aequabiliter diffusa est. Jam punctum physicum vocetur p; irradiatio ejus in superficie sphaerica minore positi r, in majore positi R; superficies minor m, major M; irradiatio superficiei minoris s, majoris u. Quia $s = u$ per posit. 1, erit $r : u = r : s$. Sed per posit. 2 est $r : s = p : m$. Ergo $r : u = p : m$. Sed rursus per posit. 2 est $u : R = M : p$. Ergo harum analogiarum rationes priorem priori, posterioremque posteriori componendo, erit $r : R = M : m$, hoc est irradiationes ejusdem puncti in diversis superficiebus sphaericis radianti concentricis locati sunt reciproce ut superficies sphaericae. Sed superficies sphaericae sunt ut quadrata distantiarum a centro. Ergo irradiationes ejusdem puncti physici, adeoque ejusdem objecti ex pluribus punctis physicis compositi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a puncto radiante. Qua demonstrandi ratione a causa gravitatis physica

animum abstrahimus, legis mathematicae cognitione nunc quidem contenti.

3) Porro pro certo assumseram, quae Lineam curvam describunt, necessario ab alicujus corporis contigui et moti impressione in orbita sua retineri: alioqui si sibi relinquerentur, in recta curvam tangente esse perrectura. Cum autem planetae non aliud corpus quam fluidum contiguum habeant, concludebam (praeter impetum proprium jam conceptum) ad fluidi ambientis impressionem esse recurrendum.

4) Speciatim autem cum viderem planetas sive primarios sive secundarios idem corpus centrale circumeuntes in eodem fere plano consistere et ferri in easdem partes non inter se tantum, sed etiam cum ipso corpore centrali circa suum axem moto; ejus communis affectionis causam communem commode repeti posse putabam a motu fluidi communis omnibus circumfusi.

5) Et quoniam Keplerus invenerat areas orbita comprehensas, radiis ex centro motus abscissas esse temporibus proportionales, id vero obtineri reperiebam quotiescunque mobile movetur circulatione harmonica, id est quaecunque linea describatur et quicunque sit ad centrum accessus aut ab eo recessus, modo velocitas motus angularis circa centrum sit reciproca distantiis, id est modo hae velocitates sint in progressione harmonica cum distantiae sunt in arithmetica: ideo circulationem planetae harmonicam statuebam.

6) Sed quia praeterea opus erat causa velocitatis paracentricae, qua planeta nunc accedit ad corpus centrale, nunc ab eo recedit; eam referebam tum ad gravitatem qua attrahitur planeta ad corpus centrale, tum ad conatum centrifugum ex ipsa circulatione consequentem quo ab eo recedere conatur. Colluctatione enim horum conatuum continue per distantias gradu variantium fit, ut impressio nova praevalens (quae differentia est conatus centrifugi et gravitationis) nunc ad centrum nunc a centro tendat, impetumque jam ante conceptum descendendi ascendendive nunc augeat nunc minuat, prout in easdem cum eo est aut contrarias partes. Ita fit ut tandem impetus consumatur, rursusque periodice repetatur. Ex ipso autem impetu descendendi oritur, ut velut in pendulis ascensus fiat in alteram partem, quem rursus deinde descensus excipit, quae ipsa suo loco a me jam sunt distinctius ex-

plicata, nec ineleganter exhibent motus planetarii varietates affectionesque.

7) Sed sunt tamen aliqua tum in typis Tentaminis nostri emendanda, tum alias paulo melius explicanda*).

8) In rei ipsius explicatione difficultas lectori Tentaminis nostri occurrere poterit, dum ibi leget contingere impressionem novam ascendendi, cum duplus conatus centrifugus praevalet solicitationi gravitatis, et contra cum hic praevalet illi, contingere impressionem novam descendendi, et cum aequales sunt, neutrum fieri, impetumque pridiem incommutatum manere: nam pro duplo conatu centrifugo, simpliciter dicendum fuisse conatum centrifugum res ipsa docet. Sciendum est ergo, qui a nobis tunc dictus est conatus centrifugus certo sensu exemploque aliorum, talisque omnino intelligi potest ipso primo momento circulationis, repraesentaturque per sinum versum arcus circulationis, revera in ipso circulationis progressu esse non nisi conatum centrifugum dimidium. Neque id quicquam in recepta hactenus doctrina conatus centrifugi mutat, nam verum manet, grave ab altitudine descendens quae sit dimidia radii Circulationis, eoque descensu acquirens celeritatem circulationis, habere gravitatem conatui centrifugo aequalem. Hujus autem considerationis occasionem mihi dedit Cl. Varignonius, alterius licet scopi meditatione, a quo non dubito multas egregias accessiones habituram Analysin nostram. Caeterum res sic demonstratur.

De Vi Centrifuga Circulantis.

Sumamus (fig. 29) pro circulo Polygonum regulare infinitangulum, cujus duo latera sibi proxima sint EA, AG. Sit C centrum circuli, jungantur AC, EG angulum inter se facientes rectum, ut in puncto B, bisecante ipsam EG. Compleatur rectangulum ABGD et producantur EA, GD, dum sibi occurrant in F. Erit FG dupla ipsius AB vel GD. Compleatur et parallelogrammum AFGH.

Ponamus jam mobile elemento temporis aliquo percurrere latus EA celeritate uniformi, motuque eodem continuato tendere in F, ita ut si nihil impediret, aequali cum priore temporis elemento percursurum sit rectam AF; sed simul accepto in A conatu n

*) Es folgt hier ein Verzeichniss von Druckfehlern, die in der obigen Abhandlung bereits verbessert sind.

AH, moveri versus C itidem uniformiter eodem temporis elemento; tunc utique motu composito ex AF et AH perveniet in G per parallelogrammi diagonalem. Et ita AG tractando ut EA continuabitur motus in polygono (id est in circulo) eodem plane modo, nam quia AG est aequalis ipsi EA, patet velocitatem circulationis non mutari, omniaque redire ut ante. Est autem incomparabiliter major AF quam AH, ut constat.

Porro licet motus attractivus vel gravitatis vel alius revera non sit uniformis, nullus tamen error orietur, si ex continue crescente faciamus scalarem per infinitesimales, nempe si tempore diviso in elementa aequalia primo cujusvis temporis elementaris momento indivisibili novum conatum eumque semper aequalem mobili imprimi fingamus, eo durante hoc elemento temporis velocitatem eandem durare.

Comparemus jam conatum centrifugum cum conatu gravitatis, a quo velocitas circulationis orta intelligi possit. Per lineam curvam KL in plano verticali KAF descriptam, concavitatem habentem ad partes A et FA productam tangentem in L, descendat grave ex tanta altitudine verticali KN, ut continuato motu, elemento temporis prioribus aequali percurrat AF; tunc utique altitudo KN ea erit, quae dat velocitatem circulationis EA vel AF vel AG.

Ponamus autem grave descendens ex K primo temporis elemento prioribus aequali descendisse ex altitudine KL. Erit ergo solicitatio gravitatis ut KP. Tempus descensus repraesentemus (fig. 30) per rectam QR, et elementum temporis omnium (in descensu) elementorum temporis inter se aequalium primum repraesentemus per rectam QS et solicitationem gravitatis seu velocitatem elementarem a gravitate impressam per rectam ST, normalem ad QS et aequalem ipsi KP: compleatur rectangulum QSTV. Cum ergo QS repraesentet tempus, et ST velocitatem, durante hoc elementari tempore uniformem, ideo altitudo per eam percursa tempore QS repraesentabitur per rectangulum QSTV. Eodem modo sumendo QSW duplam et QSX triplam ipsius QS, itemque sumendo STY duplam ipsius ST, et complendo rectangulum WSYZ; et rursus sumendo WZΦ triplam ipsius ST, et complendo rectangulum XWΦΨ; manifestum est ipsum quasi-triangulum scalare VQWZYTV repraesentare altitudinem percursam tempore QW, et quasi-triangulum scalare VQXΨΦZYTV repraesentare altitudinem percursam tempore QX. Et ita porro fiet, si plura puncta ultra

S, W, X assumantur, et eodem modo tractentur. Sed prius ex duobus quasi-triangulis scalaribus a triangulo suo vero respondente QWZ differt summa duorum triangulorum minorum hypotenusae QZ impositorum QVT et TYZ; et posterius quasi-triangulum a triangulo suo QXΨ differt summa trium triangulorum minorum QVT, TYZ, Z$\Phi\Psi$ hypotenusae QΨ impositorum. Producatur QT, donec rectae per R, normali ad QR, occurrat in ω: patet spatium percursum tempore QT repraesentari per quasi-triangulum scalare simili modo continuatum usque ad Rω. Sed hoc spatium scalare ab ipso triangulo QRω non differt nisi summa triangulorum elementarium aequalium ipsi QVT hypotenusae QR impositorum, numero tot, quot in tempore QR sunt elementa aequalia ipsi QS. Haec autem triangula omnia simul spatium conflant ob parvitatem incomparabile ipsi triangulo QRω. Itaque altitudo percursa tempore QR repraesentatur per triangulum QRω; adeoque KN altitudo percursa tempore QR, motu scalariter accelerato, est ad KP altitudinem percursam temporis elemento QS, motu uniformi, ut QRω est ad QSTV, id est dimid. quadrat. Rω ad quadrat. ST, id est ut dimidium quadratum velocitatis descensu quaesitae quae est Rω, ad quadratum velocitatis initialis gravis descendentis quae est ST. Sed longitudines eodem temporis elemento QS uniformi motu percursae EA vel AF et KP sunt ut velocitates Rω et ST quibus percurruntur. Ergo KN altitudo a gravi percursa tempore descensus, est ad KP altitudinem a gravi percursam primo tempore elementari, ut dimidium quadratum ab AF ad quadratum a KP, seu erit KP = AF qu: 2KN.

Redeamus jam ad circulum: ibi BG est media proportionalis inter AB et BC + CA, id est hoc loco (in casu arcus AG elementaris) BG est med. prop. inter AB et bis AC. Ergo erit AB = BGqu : 2AC, et AH = BGqu : AC. Porro BG et AF differunt incomparabiliter, ergo ex priore ipsius KP valore fit KP = BGqu : 2KN. Adeoque erit AH ad KP ut 2KN ad AC, vel ut KN ad $\frac{1}{2}$ AC. Id est AH solicitatio paracentrica circulantis sive conatus quo mobile a centro recedere tendit, est ad KP gravitatem, ut altitudo ex qua grave labendo accipere potuit velocitatem est ad dimidium radium circulationis. Et proinde si aequalis sit gravitas et conatus recedendi a centro circuli, altitudo ex qua grave labendo velocitatem circulationis acquirere potuit, aequabitur dimidio radio circulationis.

Hinc etiam apparet discrimen notatu dignum inter conatum a centro recedendi qui est primo momento, quo mobile circulationem incipit, et eum qui est in progressu. Continuetur DA versus J, ponaturque mobile veniens linea et directione JA, in radium CA normaliter impingere in puncto A, ibique a radio capi seu ei adhaerescere continuatoque impetu suo motum convertere in circulationem circa C; patet conatum procedendi mobilis si non impediatur esse in recta AD, et adeo recessum a centro esse GD, dimidium ipsius GF. Sed statim ubi idem mobile a polygoni infinitanguli circularis latere AG quod per JA veniens primum percurrit, transibit ad aliud sequens latus, jam conatus recedendi fiet ipsius GD duplus: ita ut revera hic discrimen faciendum sit inter mobile, quod in arcum circuli AG cadit per angulum contactus, et inter mobile quod in arcum AG incidit per alium arcum EA circuli ejusdem, quod notabile est. Sed cum recedendi conatus ab angulo contactus ortus non nisi momentaneus sit, alter vero durante circulatione locum habeat, hujus solius in usu et applicatione ratio haberi debet idemque est licet inter circulandum radius circulationis mutetur, potest enim motus compositus intelligi ex circulatione continuata in circulo priore, et progressu rectilineo mobilis in radio.

10) Porro generatim concipiendo (fig. 31) duo Latera polygon curvam constituentis ${}_1M_2M$ et ${}_2M_3M$, et unum ex illis ${}_1M_2M$ continuando in L ita, ut recta ${}_2ML$ celeritatem repraesentet, quo mobile post percursam ${}_1M_2M$ in eadem recta pergere tendit; atque ex alterius lateris ${}_2M_3M$ altero extremo ${}_3M$ ducendo ${}_3ML$, poterit haec recta repraesentare id quod liceat vocare Conatum Declinationis, nam complendo parallelogrammum ${}_2ML_3MG$, concipi potest mobile M in puncto ${}_2M$ duas habere tendentias, unam ut ${}_2ML$ secundum impetum quem habet postquam percurrit latus ${}_1M_2M$, alteram ut ${}_2MG$, quem nanciscitur ab impressione dirigente versus punctum aliquod ut ⊙ aut in partem aversam a puncto aliquo ut R, sive constantia sint haec puncta sive varient. Ita mobile motu composito feretur per alterum polygoni latus ${}_2M_3M$. Et sive dicamus mobile conatum in se jam habere a curva declinandi, ut M_3L qui vincitur a causa in curva retinente, sive dicamus mobile conatum accipere quo declinet ab impetu suae directionis et in curva retineatur; utroque sensu non male dicetur conatus declinationis. Ponimus autem elementa temporis quibus

percurruntur ${}_1M_2M$ et ${}_2M_3M$ esse aequalia. Hinc nisi resistentia Medii vel alia causa impetum semel conceptum infringat, aequabitur ${}_2ML$ ipsi ${}_1M_2M$. Si conatus ${}_2MG$ unice oriatur ex aliqua attractione aut repulsione, erit solicitatio qualis Gravitatis aut levitatis aut Magnetica, licet punctum attrahens vel repellens locum mutet Ex ${}_3M$ ad ${}_1M_2M$ (productam si opus) ducatur normalis ${}_3MK$, repraesentabit ea conatum qui a me vocatur Excussorius, is enim demum exprimit, quantum mobile a curva recedere conetur. Si jam contingat K coincidere cum L, coincident etiam Conatus Excussorius et Declinationis. Quod si curva ${}_1M_2M_3M$ sit circulus, coincident conatus centrifugus et conatus excussorius circulationis. Nam si centrum C circuli transeuntis per ${}_1M_2M_3M$ jungatur ipsi ${}_2M$ radio ducto C_2M, et ex ${}_3M$ ad ${}_1M_2M$ productam ducatur ${}_3MH$ parallela huic radio, ea non differet comparabiliter a ${}_3MK$, eritque aequalis duplo sagittae arcus ${}_1M_2M_3M$, seu duplo sinus versi quem habet angulus ${}_2MC_3M$. Quodsi linea non sit circulus, tamen conatus excussorius a linea illa curva per ipsam ${}_3MK$ vel ${}_3MH$ exprimetur; posito punctum C esse centrum circuli osculantis et C_2M esse radium curvedinis, conatusque excussorius coincidet centrifugo, cum ponitur curva describi simplici circulatione fili evoluti. Itaque cum motu assignabili rectilineo quocunque conatus incomparabiliter parvus declinationis (cujus species est excussorius) et cum motu assignabili circulatorio (sed non nisi ex centro osculi vel curvedinis) conatus centrifugus (sed non nisi cum excussorio coincidens) componi potest, ut curva describatur.

11) Sed potest tamen alia quoque concipi circulatio curvam dèscribens, aliusque conatus centrifugus, quem non ipsa simpliciter curvedo determinet, sed assumtio certa punctorum; ita vero curva non ut hactenus describetur circulatione cum conatu tantum aliquo paracentrico elementari seu infinite parvo conjuncta, cujus centrum idem fuit quod circuli curvam osculantis, sed motu composito ex circulatoria circa centrum centrave sumta utcunque, et alio aliquo rectilineo assignabili qui quidem potest ipsemet paracentricus intelligi et ad centrum tendere vel a centro, sive id coincidat cum centro circulationis sive secus, et sive mutetur continue alterutrum aut utrumque centrum sive permaneat. Quod si jam coincidat centrum circulationis et motus rectilinei paracentrici permaneatque constans, res ita se habebit, uti eam de Cau-

sis motuum coelestium rem concepi, tanquam linea ${}_1M_2M_3M$ esset Ellipsis, cujus vertex A, focus alter $\odot$, circa quem mobile M nempe planeta moveretur. Velut si fingeremus regulam $\odot n$ fixam in $\odot$, sed ita ut circa $\odot$ sit mobilis. Ea existente in situ $\odot_1 n$, sit mobile M in loco ${}_1M$, quod ponatur moveri motu paracentrico in regula, accedendo ad centrum $\odot$ (aut ab eo recendo), et ita pervenire ab ${}_1M$ ad ${}_1T$, dum interea regula ab $\odot_1 n$ transit in $\odot_2 n$, et punctum ${}_1M$ transit in P, et punctum ${}_1T$ in ${}_2M$; et ita mobile composito motu per ${}_1M_2M$ pervenire a puncto curvae ${}_1M$ ad punctum curvae ${}_2M$. Eodemque modo translata ulterius regula in $\odot_3 n$, mobile motu composito ex paracentrico ${}_2M_2T$ et circulatorio ${}_2T_3M$, transibit ex ${}_2M$ in ${}_3M$, nempe in Recta $\odot_3 n$ sumendo $\odot_2T$ aequalem ipsi $\odot_2M$. Porro in eadem recta sumantur puncta ${}_2D$, V et N, tali modo ut anguli ${}_3M_2D\odot$, $V_1M\odot$ et ${}_1MN\odot$ sint recti. Jam si circulatio sit Harmonica, sunt circulationes reciproce ut radii, seu ${}_1T_2M$ ad ${}_2T_3M$ (vel ${}_1D_2M$ ad ${}_2D_3M$) ut $\odot_2M$ ad $\odot_1M$. Ergo $\odot_1M$ in ${}_1D_2M$ aequale dat ei quod dat $\odot_2M$ in ${}_2D_3M$, seu triangulum $\odot_1M_2M$ aequale est triangulo $\odot_2M_3M$. Ergo horum aequalium triangulorum altitudines N_1M et ${}_3M_2D$ ad basin communem $\odot_2M$ sunt aequales. Itaque triangula rectangula ${}_1MN_2M$ et ${}_3M_2DG$, cum sint similia (ob parallelas ${}_3MG$ et ${}_1M_2M$) et habeant latera homologa aequalia N_1M et ${}_2D_3M$, habebunt et reliqua latera aequalia ${}_3MG$ ipsi ${}_1M_2M$, et G_2D ipsi N_2M. Cumque ${}_3MG$ sit aequalis ipsi L_2M, patet hanc ipsi ${}_1M_2M$ esse aequalem, adeoque linea quae describitur circulatione harmonica quam dixi, etiam describitur motu composito ex Trajectorio ${}_2ML$, impetum priorem ${}_1M_2M$ continuante, et motu attractionis ${}_2MG$. Porro cum velocitates paracentricae repraesententur ipsis differentiis radiorum seu distantiarum a centro, id est ipsis ${}_1M_1T$ (differentia inter $\odot_1M$ et $\odot_2M$) et ${}_2M_2T$ (differentia inter $\odot_2M$ et $\odot_3M$), manifestum est Elementum (hoc est incrementum aut decrementum continuum) velocitatis paracentricae repraesentari differentia rectarum ${}_1M_1T$ et ${}_2M_2T$. Jam ${}_1M_1T$ seu P_2M est $PN + N_2M$ seu (ut ostensum) $PN + G_2D$ et rursus ${}_2M_2T$ est ${}_3MG + G_2D - {}_2D_2T$. Ergo differentia rectarum ${}_1M_1T$ et ${}_2M_2T$ seu ${}_1M_1T - {}_2M_2T$ fiet aequalis ipsi ${}_2T_2D$ bis $- G_2M$. Sed ${}_2T_2D$ est sinusversus anguli circulationis, seu anguli ${}_2T\odot{}_3M$, ergo ${}_2T_2D$ bis sumta repraesentat conatum centrifugum circulationis, per proxime demonstrata. Sed G_2M est solicitatio paracentrica gravitatis, ergo Elementum Velocitatis para-

centricae, qua crescit aut decrescit velocitas accedendi ad centrum aut recedendi a centro, est differentia gravitationis et conatus centrifugi, ita ut si gravitas seu vis centripeta praevaleat, augeatur celeritas accedendi ad centrum, vel minuatur celeritas recedendi a centro; sin praevaleat conatus centrifugus, contrarium fiat. Maxima autem vel minima velocitas accedendi recedendive erit, ubi aequabuntur duo conatus. Quodsi pro Gravitate Levitas adsit, non differentiae sed summae conatuum erunt adhibendae. Quamcunque igitur causam Motus planetae esse ponamus, saltem intelligi poterit compositus ex circulatione harmonica $_2T_3M$ et ex velocitate paracentrica $_2M_2T$, per Elementorum duorum, nempe conatus centripeti $_2MG$ et centrifugi bis $_2D_2T$, differentiam continue generata: perinde ac si regula rigida ⊙n ita quidem moveretur circa centrum ⊙, ut motus ipsius mobilis M harmonicus sit (seu ut distantiis a centro ⊙ progredientibus Arithmetice, velocitates progrediantur harmonice), mobile autem in regula conatibus centrifugo circulationis et centripeto gravitatis inter se conjunctis sursum deorsumve moveatur. Ubi jam fluidum circulariter deferens hoc loco in ipsius Regulae officium succedet. Sed idem motus simul potest intelligi compositus ex motu trajectionis rectilineo $_2ML$ (secundum impetum priorem $_1M_2M$) et eodem conatu centripeto $_2MG$. Ideo quanquam initio planetae impetus ex concepto jam motu cum fluidi deferentis impressionibus non consensisset, tandem tamen factum est, ut fluido ac planeta sese accommodantibus, planeta liberrime jam moveatur in fluido tanquam medium resistens nullum esset; et fluidum vicissim ita moveatur cum planeta tanquam planeta nullo proprio impetu sed tranquilla a fluido gestatione deferretur. Quod unius Circulationis Fluidorum Harmonicae mirabile privilegium ex hac ipsa utriusque motuum compositionis coincidentia jam tandem habetur demonstratum.

12) Ostendimus autem in Tentamine nostro curvam esse conicam si solicitationes gravitatis sint quales esse oportere a priori constabat, nempe in ratione duplicata reciproca distantiarum a centro gravitationis. Conatus autem Centrifugi in circulatione Harmonica, ut ibidem patuit, sunt in ratione distantiarum a centro circulationis reciproca triplicata. Ostensum et porro est, curvam conicam abire in Circulum cum conatus centrifugus et gravitatio vel attractio, initio attractionis, aequantur. Sin initio sint inaequales, modo dimidius conatus centrifugus (quem olim conatus cen-

trifugi integri nomine designaram, quia talis est in nascente Circulatione) sit minor attractione, fiet Ellipsis: et praevalente attractione super conatum centrifugum, initium erit Aphelium; sin contra, Perihelium. Si conatus centrifugus dimidius attractioni sit aequalis, describetur Parabola; si major sit, Hyperbola orietur, cujus focus intra ipsam sit sol. Quod si planeta pro gravi levis et a sole non attrahi, sed repelli poneretur, ferretur in Hyperbola cujus in foco extra ipsam sol esset. Vicissim si lineam Ellipticam et Circulationem Harmonicam esse aliunde constet, exinde ipso calculo habetur gravitationes esse in ratione distantiarum reciproca duplicata. Porro quoniam quod olim duplum Conatum Centrifugum appellavi, nunc potius simpliciter Conatum Centrifugum appellare malo, et certe jam tum revera pro eo assumsi, officiumque ejus subire jussi cum attractioni opponerem; dicendum est ad §. 11 Tentaminis, conatibus quidem centrifugis proportionales esse sinus versos angulorum Circulationis, sed revera ipsos hos conatus per rectas horum sinuum duplas repraesentari. Et ad §. 12 sub ejus finem, pro $_2D_2T$ conatus centrifugus dicendum: dimidius conatus centrifugus. Et ad §. 15 (initio et fine paragraphi) dicendum est, elementum impetus paracentrici esse differentiam vel summam solicitationis paracentricae et conatus centrifugi, et ibidem $_2D_2T$ vel NP esse dimidiatum conatum centrifugum. Et §. 19 $aa\vartheta\vartheta : r^3$ non dicetur esse duplus conatus Centrifugus, sed ipse simplus. Et ad §. 21 dicendum, solicitationem gravitatis in planetam esse ad conatum planetae Centrifugum, ut distantiam praesentem a sole ad semilatus rectum Ellipseos planetariae, seu ut r rad. ad a : 2. Et ad §. 25 dicendum, in planeta Ellipsin describente conatum centrifugum recedendi a sole dimidatum esse semper minorem attractione solis, quia attractio ad conatum centrifugum dimidiatum est ut distantia a sole ad quartam partem lateris recti. Et ad §. 27 ubi de duplo conatu centrifugo sermo est, substituendus simpliciter conatus centrifugus. Denique ad §. 30 (ubi genus curvae Conicae definitur) secundum ea quae jam monuimus, pro dupla Vi Centrifuga poni debet simpliciter vis centrifuga seu conatus centrifugus; et pro conatu centrifugo simplici, ponendus est dimidiatus. Haec autem nos jam olim intendisse res ipsa ostendit, utique enim Conatus Centrifugus ipse qualis in Mobili revera adest (non duplum ejus) gravitationi ejus opponi debet ejusque effectum consumere potest: etsi duplus is sit ejus Conatus centrifugi qui initio nasci-

tur, cum mobile ex motu rectilineo per angulum contactus in motum circulationis transit, qui semel natus sed non nisi momento manere potest.

XVIII.

ILLUSTRATIO TENTAMINIS DE MOTUUM COELESTIUM CAUSIS.

Pars II.

13) Sed a propriis emendationibus atque declarationibus pergo ad ea quae vir doctus supra memoratus dicta prop. 78 objecit. Primum est quod orbem fluidum planetas incitantem oppugnari judicat ex motibus Cometarum. Nam cum hoc modo Cometae iisdem, ut ipse arbitratur, circa solem debeant gyrari harmonice, areas temporibus aequales radiis abscindendo, pari quemque jure vorticem proprium habituros ait, qui vorticem planetarum sit turbaturus, cum Cometae ipsi Zodiaco nunc oblique, nunc ad angulos rectos occurrant, nonnunquam etiam contrario motu ferantur. Hic responderi potest, dubitari adhuc an talis sit Cometarum motus qui planetarum, accuratiorique rei determinatione opus esse. Sed eo licet supposito verisimile alicui fortasse videbitur, contingere in his vorticibus, quod in aquarum circulis quos diversi lapilli faciunt simul in aquam injecti, aut diversi simul soni suis undulationibus eundem aëris locum permeantes, ubi alter alterum non turbat. Praeterea sciendum est, rationem qua fluidum deferens in planetis collegimus, in Cometis cessare, quoniam non communi motu sed in easdem partes inter se et cum planetis feruntur: ipse autem per se cometa simplici trajectione fluidum nostrum planetarium non turbabit, nec vicissim turbationem inde sui motus sentiet, cum tenue sit fluidum, et ipse exiguam in eo moram trahat.

14) Altera objectio est, Circulationem materiae planetam eundem deferentis harmonicam non consentire cum Circulatione totius vorticis planetarii, nam in Circulatione harmonica velocitates esse reciproce ut distantias a sole, sed in toto vortice planetario quadrata temporum periodicorum fore ut cubos distantiarum: id enim deprehendi in ipsis planetis. Huic difficultati cum ipse jam olim

satisfacere disertis verbis pollicitus sim, dicam quid tunc in mente habuerim. Concipiebam in viae regiae, ut Keplerus vocat, seu Aequatoris solaris plano, crassitiem aliquam habente, materiam instar venti nostri intra tropicos diffusi (etsi hic in contrariam terrae motui partem tendat) circulari cum sole circa ipsius centrum, et fluidum planetarium solare constituere. Ponebam autem hunc vorticem ita ferri, ut quivis orbis concentricus in eo descriptibilis sit alteri viribus aequalis, aut si tales initio non fuerint, ad aequilibrium potentiae colluctando devenisse, cum alias alter alterum secum abripere nitens, motum ejus turbet. Aequilibrium autem hoc, cum non in eo constitutum sit ut alter alterum sistat, sed ut quisque in motu suo pergat, non esse solicitationum seu virium mortuarum, sed impetuum qui infinitis solicitationibus formantur, seu virium vivarum. Nam quae se sistunt, non nisi viribus mortuis hoc praestant, conatus infinite parvos mutuo impendentia, et ope Elastri in duris vires vivae quae ante conflictum erant conservantur, at in fluido continuo tandem ad aequalitatem rediguntur. Et (quod pulchrum est) eo ipso evenit, ut quaevis fluidi portiuncula perinde moveatur ac si ipsa esset planeta liberum trajectionis motum in spatio non resistente exercens, debita impetus attractionisque compositione circularem, add. §. 16. Vivae autem vires sive potentiae ejusdem corporis impetum habentis sunt ut quadrata velocitatum; cum vires mortuae sint ut ipsae velocitates sed elementares; utraeque revera ut effectus: quemadmodum alias in Schediasmatis meis dynamicis in haec Eruditorum Acta insertis ostendi.

15) Ut ergo orbis unus sit alteri concentrico potentia aequalis, ideo potentiis sese habentibus in ratione composita ex simplice materiae seu massarum et duplicata velocitatum (uti ostensum est), orbium materiae erunt reciproce ut quadrata velocitatum. Sed orbium materiae sunt ut circumferentiae, seu ut radii sive distantiae a sole; distantiae igitur a sole sunt reciproce ut quadrata velocitatum, quibus materia in orbibus fertur. Sed circumferentiae quae aequabili materiae motu percurruntur, sunt in ratione composita temporum periodicorum et velocitatum quibus percurruntur; adeoque et distantiae a sole (cum sint ut circumferentiae) sunt in eadem composita ratione: Velocitates igitur vicissim sunt in ratione composita ex distantiarum directa et temporum periodicorum reciproca; et Velocitatum quadrata sunt in

ratione composita duplicata, ex distantiarum quidem directa; temporum vero periodicorum reciproca, seu in ratione composita ex quadratorum a distantiis directa, et quadratorum ex temporibus periodicis reciproca. Sed paulo ante invenimus, eadem velocitatum quadrata esse reciproce ut distantias a sole. Ergo quae sunt reciproce ut distantiae a sole, sunt etiam in ratione composita ex quadratorum a distantiis directa, et quadratorum a temporibus reciproca, quod est quadrata temporum periodicorum esse ut cubos distantiarum a sole.

16) Haec etiam Hypothesis usum haberet, si gravitatis attractiones non duceremus ab explosione materiae ex sole sese expandentis, sed (ut paulo ante feci) cum Keplero, Cartesio et Hugenio peteremus a vi centrifuga materiae cujusdam circulantis circa solem, quae et ipsa foret diversa a supradicto fluido planetario, et longe subtilior tensiorque, nec tantum in plano aequatoris solaris et vicinis, sed et aliis circulis magnis, quales sunt meridiani, circa solem ferretur; veluti circa terram tale quid ab Hugenio concipitur in Libro de Lumine et Gravitate, et a me quoque jam olim in Hypothesi Physica suppositum fuit. His enim ita constituis, supponendo in eodem plano ejus quoque materiae, quicunque orbes concentrici assumi possunt, aequalium esse virium, lex etiam gravitatis hactenus constituta feliciter prodiret. Nam quaecunque sit circulationis lex, conatus centrifugi sunt in ratione composita ex duplicata velocitatum circulandi directa, et simplice radiorum (seu a centro distantiarum) reciproca, ut jam notavi supra dicti Tentamis §. 11. Sed ipsa duplicata velocitatum circulandi ratio hoc loco est eadem quae simplex distantiarum reciproca, ut ostendimus § praecedenti: itaque conatus centrifugi materiae in tali orbe erunt in ratione distantiarum reciproca duplicata, adeoque et gravitatione exinde deductae tales forent; in quantum enim fluidum densius est centrifugum, in tantum massa minus densa in eo posita versu centrum solicitatur, seu vim centripetam accipit. Ita unica hypothesis orbium concentricorum potentia circulandi aequalium, qua per se rationi admodum consentanea judicari potest, simul legem gravitationis et legem temporum periodicorum daret. Et (quemadmodum jam §. 14 notatum est) perinde ageretur ac si quaevis portiuncula fluidi planetarii (cum ipsamet sit gravitate praedita exiguus esset planeta, cujus Ellipsis trajectoria in circulum abire

dum supra infràque coërcetur. Ita rursus motus circulationis cum libera trajectione conciliatur.

17) Haec de totius Zonae planetariae fluidae motu. Sed ab hoc discedere aliquantum debuit motus privatus in unius cujusque planetae orbe, cui ea tribuenda est profunditas, quam postulat mutatio distantiae planetae a sole. Quod si jam circulationem harmonicam ipsi materiae in hoc orbe tribuamus, quam scilicet postulat temporum cum areis proportionalitas, videndum est quae ejus ratio reddi possit. Hic ergo succurrit nobis nova et pulcherrima Circulationis Harmonicae jam sub finem §. 12 ostensa proprietas qua efficitur, ut quae feruntur in medio resistente (id est ita crasso ut secum abripiendi ac deferendi mobile aut aliter delatum retardandi sit capax) sed tamen harmonice circulante, moveri possint liberrime, non minus quam si moverentur in medio resistendi non capace. Res enim eadem redit, sive ponamus corpus tranquille natare ac deferri in fluido harmonice circulante, neque proprio impetu inde discedere, motumve ejus turbare, sed de motu priore solum servare conatum centrifugum circulationis, una cum impressionibus gravitatis hactenus conceptis novaque solicitatione auctis, quoniam scilicet hi motus conatusve paracentrici ipsi circulationi fluidi non obstant; sive potius ponamus, corpus in medio non resistente solo impetu concepto et accedentis gravitatis solicitatione moveri, quasi medium fluidum esset nullum, aut omni resistentia careret. Nam eadem plane phaenomena prodeunt, sive medium a mobili, sive mobile a medio non turbari ponamus, sicuti calculus noster ostendit. Ita revera et planeta jam libere fertur in medio, et medium suum obtinet circulationem, per quam planeta ad hunc ipsum motum liberum tandem devenit. Hinc consequitur, quicunque motus circulationis in eo planetae orbe initio fuerit, et quicunque fuerit planetae ipsius motus compositus tum ex impetu concepto, tum ex novis impressionibus vel Solis alteriusve corporis attrahentis, vel ipsiusmet orbis fluidi impellentis aut retardantis, utique planetae motum a motu orbis sui, et hunc vicissim ab illo, perpetuo turbari debuisse, quamdiu Harmonica non fuit Circulatio fluidi nec talis circulationis Harmonicae fuit gradus, ut ipsius planetae motui libero consentiret: adeoque tandem perveniri debuisse ad Motum Fluidi Harmonicum, et planetae liberum, inter se conspirantes; quando quidem solius medii harmonice circulantis id privilegium

est, ut motui solidi in ipso consentiens esse possit. Nam lucta illa assidua et perturbatione, alterum alteri se paulatim magisque et magis, ut naturae consuetudo fert, accommodasse oportet, donec longi temporis tractu tandem plurimum imminuta propemodum evanesceret contrarietas, quod non nisi per circulationem Medii harmonicam obtineri posse demonstravimus. Nec vero fluidum planetarium etsi ex materia gravi consistere ponatur, ideo vel impetu pristino suo, vel solicitatione gravitatis nova a circulatione harmonica divertetur: nam si modo materia illa homogenea sit utique a superstante vel subjecta coërcita, nec conatu centrifugo evolabit nec solicitatione gravitatis descendet nec impetum conceptum in alium quam ejusdem circulationis continuandae motum convertet. Cum autem non usque adeo magna sit eccentricitas planetarum, profunditasque orbis, haec immutatio in planetae orbe nullam ultra in toto fluido planetario turbationem producet: imo verum manebit etiam hunc orbem profunditate aliqua praeditum, cum ipso suo planeta unum totum componentem, tali motu Circulationis ferri, centro gravitatis ejus, planetae instar habente, ut si alteri orbi comparetur, quadrata periodicorum temporum sint proportionalia cubis distantiarum mediarum, quod simul et ipsa postulat comparatio planetarum inter se ex libero eorum motu, ad quem tandem res ab ipso vortice deferente deducta est. Et licet interserta in partibus quibusdam fluidi planetarii circulatione Harmonica lex aequilibrii orbium turbari videatur, credi tamen potest hanc ipsam summatim salvam manere toto orbe unius planetae simul sumto et pro uno mobili stante, sed et computato ipso planeta, qui in eo orbe versatur, ita accommodantibus sese orbibus distributisque motibus ut virium aequilibrium in eadem profunditate conservetur, dum scilicet centrum gravitatis massae orbis sumtae cum suo planeta, centrum gravitatis alterius orbis concentrici ejusdem profunditatis, ea movetur velocitate, ut si massae ponerentur ita moveri quemadmodum sua centra gravitatis, eandem potentiam vivam circulationis exercerent.

18) Causa autem cur Fluidum Deferens non facile rejici posse judicarim, haec fuit, quod in alia Hypothesi ratio ita commode reddi non possit, cur planetae aut satellites nostri systematis ferantur in eodem fere plano, et in easdem cum corpore centrali circa axem rotato partes. Gravitas certe huc conferre nihil potest, sed nec cur impetus trajectorii proprii in eas quas dixi partes communes

in eodemque fere plano exerceantur, ratio ex ipsis apparet, cum aeque in quamcunque plagam fieri possit impetus. Itaque et Hugenius, harum utique rerum cognitione inprimis excellens plurimarumque insignis vir, qui trajectoriam hypothesin adeo provexit, meditationibus prout merentur tribuens, tamen multo post in Cosmotheoro (novissimo opere suo) connexionem quandam statuendam putavit inter ejusdem systematis circulantia corpora, atque adeo quod nondum observationibus compertum est, ex satellitum Saturni motu judicavit, ipsum Planetam primarium rotari circa suum Axem et quidem in easdem cum satellitibus partes, quanquam doctissimus ille Vir, qui mihi objectiones opposuit, etiam hanc ipsius consecutionem impugnarit (pag. 477), parum considerans argumento ad Systema Saturnium favere tria alia exempla, scilicet Terrae cum Luna, Jovis cum suis comitibus, Solis cum suis planetis, id est tot exempla quot comperta sunt nobis alia Systemata centrica.

19) Inprimis autem memorabile est, quod ipsi Satellites Telluris et Jovis feruntur in orbitis quae non multum declinant a plano orbitae planetarum primariorum, seu a plano fluidi planetarii communis, adeo ut apud Tellurem, ubi magna est declinatio Aequatoris ab Ecliptica (seu plani motus circa axem a plano orbitae), Satelles (nempe Luna) ad Eclipticam fere se accommodet, non ad aequatorem, ut verisimile alicui videri possit, Lunam antequam a Tellure attraheretur communi caeterorum planetarum more, circa solem gyros per se exercuisse. In uno tamen Saturno Satellites, cum annulo quidem in eodem fere plano existentes, valde declinant ab orbita ipsius planetae; sed exceptionis ratio adest. Nam credibile est, hoc fieri debuisse quod valida ingentis annuli attractio Satellites tenuit in ipsius fere plano praevaluitque causae communi, quae siderum systematis Solaris omnium orbitas ad plana parum invicem inclinata redigere nititur, sed in tanta quanta Saturni distantia est aut potius contra tantam privatam vim debilior deprehenditur.

20) Nec minus consideratu dignum est in rem praesentem, quod Corpora illa Mundana ingentia omnia, quorum revolutio circa axem situsque axis nobis satis est notus, excepta una Tellure, aequatorem suum habent non multum ab orbitae plano discedentem. Nam Mars et Jupiter axem revolutionis habent fere normalem ad suas orbitas, Luna fere normalem ad Eclipticae planum, a quo ipsius orbita parum abit, ut adeo corpora haec omnia tanquam

terellas concipere liceat magneticas, quarum poli non multum d clinant a polis viae regiae seu solis, una (ut dixi) Tellure e cepta, privato scilicet valida magnetismo. Ex quibus omnibus i telligi potest, quantus sit consensus omnium corporum Mund norum nostri Systematis, quae nobis explorata sunt, gravitationib ad solem, tendentiis ad easdem partes, orbitis, revolutionibus, p lis. Talis autem consensus rationem a fluidi communis actione p consentaneum hactenus credidere, qui physica mechanice tractan judicarunt.

21) Liceret tamen fortasse nonnulla alia in eam rem co minisci. Exempli gratia dici poterit, Solem emittere corpuscu quae impressionibus suis vices subeant virium incorporearum, q bus velut vectibus Keplerus apprehensos planetas in gyrum a so agi putavit. Nam (ut projecta) duplicem impetum habebunt, unu a vi emittente, alterum a circulatione solis circa axem, qua et o jectum corpus impellere tentabunt in easdem partes. Vel finge licebit planetas nostros e sole fuisse projectos in eodem fere pla et in easdem fere partes ob communem aliquam causam, tunc cu ille adhuc in motu esset; ita in ipsum non recidisse, sed abiis in planetas ipsi tunc Soli secundarios; cometam vero esse corp vel ex sole vel ex alio magno corpore dissiliente in alias plag multum ab aequatore solis diversas olim emissum; quod mag confirmaretur, si plerique Cometae in proprio quodam velut Zodia versarentur, quemadmodum magnus utique Astronomus Joh. Do minicus Cassinus suspicatur. Sed non ideo tamen fluidi commu nis nexum non unum planetas afficentem facile deserere velim, cu vortices (sed emendati) consuetudini naturae conveniant, quae nih torpidum inordinatumque aut inconnexum relinquit, omniaque in ter se conspirare jubet.

22) Neque etiam abhorrere debemus a pluribus causis com plicatis et in idem contribuentibus, quae se mutuo conservant ani mantque. Solida enim diversa ope fluidorum connectentium, solida fluidaque ambientia inter se paulatim conspirantia efficiun tur. Quod non tantum ostenso paulo ante consensu medii har monice circulantis cum planeta libere moto, sed et magnetism globorum confirmare licet. Nam ipsa quidem natura motus effi cere potest ut corpus projectum rectas, quae in eo duci possunt vestigiis suis parallelas servet. Si tamen rotetur Projectum circ axem, uni rectarum in Projecto ducendarum Axi hoc tribui potes

ut durante projectione sibi maneat parallelus. Quodsi Axis sit extra planum orbitae seu viae a projecto descriptae, non nisi unum corporis punctum, quo scilicet orbitae plano ipse axis occurrit, in plano orbitae semper manere potest. Id ergo punctum debet esse centrum gravitatis; hujus enim ea natura est, ut semper in plano orbitae esse affectet, quod etiam attractio seu gravitatio postulat. Hinc cum constat centrum magnitudinis manere in orbita, centrum magnitudinis in tali globo coincidere oportet centro gravitatis. Sed fortasse facile in quovis planeta, nisi causa aliqua advocetur quae adhuc liquidum sic formet, qualis guttas olei in aqua rotundat, in fluido haud dubie insensibili consistens, et in Tellure mutatur locus Centri Gravitatis, si nucleum mobilem habet, quemadmodum ex magneticae variationis observationibus peringeniose conjecit vir clarissimus Edmundus Hallejus. Ut accidentia taceam, quae parallelismum Axis turbare possunt, si non constante aliqua causa se conservare et restituere potest, sed tantum praesenti impetui debetur. Itaque rebus consentaneum est, ut ad ejus conservationem accedat, quod per se alioqui natura moliri solet, ut materia admodum tenuis systema pervadens, viis sibi per corporis interiora ut par est factis, quemadmodum in Magneticis, globum sibi accommodet ac se globo, usque adeo ut si quo casu globus ab ea directione polorum dimoveretur, hujus ipsius materiae velut magneticae directione ad terrellae instar restitueretur. Itaque nonnulli ex illis ipsis qui a Copernicano systemate alieni sunt, valde se tamen commotos sunt fassi, cum viderent parallelismum axis Telluris, quem assumserat Copernicus, quanquam physicam ejus rationem reddere non posset, tam pulchre prodire si Magnetismus Telluri tribuatur cum Gilberto. Sed et molimine aliquo opus fuit ad globum ita aequilibrandum, ne una facies prae altera magis attraheretur a sole aut primario planeta, atque adeo ut maneret globo conversio circa axem a circuitu circa Corpus centrale independens. Alias oportuisset planetas facere respectu Solis quod hodieque facit luna respectu terrae, cujus conversio circa axem a periodo orbitae circa terram dependet axisque ipse constans huic conversioni sic satis respondet, cum tamen in omni primario planeta rotatio circa proprium centrum aliquot centenis aut millenis vicibus promptior sit orbitae decursu. Itaque causa fuit, tum quae paulatim Globos tam accurate aequilibravit, tum quae axe conversionis constante et fere ad viam regiam normali donaret, haud

dubie non alibi quaerenda quam in fluido quodam generali, magneticae directionis aemulo. Vortices igitur subtilitate ac directione diversos, variosque fluidorum per systemata motus inde a [illegible] cippo jam optime philosophantibus frequentatos prorsus eliminandos non putem, neque aliter naturam sibi constare arbitrer, si illi emendate concipiantur. Nam Cartesianos quidem Vortices [illegible] tendum est, nisi ut ab Hugenio aliisque, fortasse et a nobis, qui nihil correcti sunt, sustineri non posse.

23) Nolim etiam Dogmata a melioribus philosophis recto judicio proscripta postliminio reduci, Vacuum scilicet et actionem corporum in distans immediatam per species quasdam incorporeasque virtutes. Nam quod prius attinet, non putem phaenomenis distingui posse, Vacuumne sit intra corpus, an materia quae motum ejus parum impediat, quod facit quae facillime interlabitur [illegible] jus ratione corpus ita perforatum est, ut propemodum ex filis reticularibus laxissimis tenuissimisque, quanquam rigidis, constare videatur, quibus Vulcanus apud Poëtas injuriam ultus est. Ita contextum corpus illi tantum obstat materiae, cujus partes reticulis bus illis interstitiis sunt majores aut ipsis filis objiciuntur. [illegible] quae interlabitur materia, corporis massae non computatur. [illegible] ergo Vacuum nulla necessitate defendatur, plenitudini standum [illegible] quam ipse satis rerum ordo perfectioque tuetur. Verum per omnia non est quod vulgo jactari solet, res non esse multiplicandas praeter necessitatem, quo argumento poterat praeter Creatorem nihil esse: sed illud verum est, res non esse multiplicandas praeter rationem. Ut autem quam plurima et quam ordinatissima existant, summa ratio est.

24) Actionem porro Gravitatis in distans si non materiae intercedenti tribuimus, sed nescio cui virtuti incorporeae communicationem immediatam facienti, non est ratio qua ostendi possit minorem esse magis distantium attractionem. Neque enim ratio est (vid. fig. 28 partis prioris hujus schediasmatis), ut attractiones partium in superficie EFG positarum ad centrum C explicemus radiis transeuntibus per superficiem ABD; si actio incorporea ei in distans immediate operetur; neque ullum intelligi potest principium incorpoream actionem ad certam quantitatem determinandi. Cuncta denique ita ἄῤῥητα fient, ut neque a capacissima et i[illegible] rerum interiora admissa mente aut reddi eorum ratio aut modus explicari aut a Deo ipso cuiquam revelari exponique posset. N[illegible]

turalis ergo haec Attractio esse non potest, sed Dei unius immediata operatione res omnis constabit. Si vero ad DEUM confugiamus unico, causasque finales efficientium intermediarum exortas (Deus enim revera solus sine corporum interventu operari potest) miraculo utemur, dum scilicet agnoscere cogemur, nihil ad rei explicationem peti posse a causis efficientibus secundis. Miraculum enim, non ut quidam nostri temporis Philosophi Cartesiani putant, in eo consistit, ut sit contra Voluntates Generales Dei legesve ab eo naturae rerum latas (quo pacto non in fixa sed in arbitraria notione consisteret, extrinsecaque denominatione constaret); sed ejus formalis ratio est, ut per causas efficientes secundas explicari nequeat. Nam etsi (ut exemplo utar) Deus lege generali decerneret corpora vi propria in curva semel coepta mansura, nec per tangentem inde recessura, atque adeo planetam in liquidissimo aethere (non multo magis quam vacuum ad motum ejus conferente), nulla licet causa assignabili coërcente aut a concepto rectilineo impetu directioneque secundum tangentem detorquente, tamen circularem lineam vel Ellipticam descripturum; hoc (inquam) etsi semel in universum decerneret Deus, non ideo profecto ex miraculoso naturale redderet. Cum enim nihil reperiatur in his quae de natura corporis intelligi possunt, quo tale aliquid effici queat, vel advocanda esset Intelligentia Motrix ex earum genere quas Aristotelici Formas Assistentes vocabant suisque orbibus coelestibus solidis assignabant, quas ipsas tamen hoc modo locum non habere nec corporum leges mutare posse satis apparet ex nostro systemate Harmoniae praestabilitae; vel potius ad Deum ex machina confugiendum esset, continua peculiari operatione decretum illud suum immediate sine aliis causis instrumentisque aut rationibus denique explicabilibus sustinentem: in quo vera miraculi notio consistit. Idem foret (ut exemplo magis populari utar), si quis fingeret, Deum decreto aliquo suo seu voluntate generali praestare, ut Horologia semet a decursu restituant seu retendant, seu ut habeantur motus perpetui mechanici, saltem supposita materiae durabilitate; profecto enim nisi miraculo perpetuo obtineri talia Automata non possent: nam si genium aliquem impulsorem ponamus et magis etiam si causam corpoream vires suppeditantem, physicus foret motus perpetuus, non mechanicus. Itaque nuper miratus sum Cl. Lockium Philosophum insignem, cum Eduardo Stillingflectio, celeberrimo Wigorniensium Episcopo, responderet,

quo facilius tueretur possibilem esse materiam, naturaliter sensus intelligentiaeque capacem, adhibuisse hanc Hypothesin Virtutis corpori insitae, corpora distantia per immediatam operationem attrahendi, tanquam rem ab excellentissimo Mathematico novissime demonstratam (cujus tamen ipsius fortasse haec mens non est), quasi eo exemplo constaret Deum naturas corporibus dare posse inexplicabiles, id est (meo judicio) operari parum sapienter nullaque satis operum suorum connexione, dum perpetuis miraculis res naturales expediret. Itaque fundamentum meum generale stare arbitror, quod retulit, non refutavit Cl. Objector, corpus non nisi a contiguo et moto naturaliter moveri posse, fluidumque adeo planetae circumfusum ad ejus motum conferre, vorticesque aliquos vel certe motus fluidorum late diffusos omnino necessarios esse, saltem ut vis elastica, tum attractio seu gravitas, ac denique affectiones corporum valde communes (et ad quas olim admodum juvenis in Hypothesi physica caeteras revocaveram) mechanica ratione obtineantur.

Beilage.

Excerptum ex Epistola Auctoris, quam pro sua Hypothesi physica motus planetarii ad amicum scripsit.

Vir doctus, qui ante aliquot annos in Opere suo Astronomico Hypothesin meam impugnavit, vim ejus atque utilitatem non satis animo complexus est. Habet enim ea commodum hoc insigne, ut corpora solida harmonice circulantia in fluido similiter circulante perinde moveantur, ac si non nisi suo impetu suaque gravitate in medio tanquam vacuo (id est, non resistente) circularentur, et contra ut fluidum circulans a solidi illius circulatione non turbetur, perinde ac si solidum non adesset vel non nisi pars fluidi esset, quod alia quaecunque circulatio efficere nequit. Itaque etsi circulationibus non conspirantibus moverentur fluidum et solidum, tandem tamen longo temporis tractu ad circulationem harmonicam conspirantem reducerentur, quo minus sibi obstent aut a se invicem turbentur. Unde etiam intelligitur, objectionem hujus Autoris contra vortices seu orbes fluidos deferentes hanc circulationis speciem non ferire.

Caeterum illud facile colligitur, legem circulationis harmonicae ab ipso fluido exercendae non nisi in eodem orbe servari, a

orbis consonantiam cum suo planeta obtinendam; idque eo facilius est, quod unius orbis, intra quem scilicet versatur planeta, si cum toto vortice planetario conferatur, exigua est crassitudo. Sed in toto vortice, diversos planetas conferendo inter se, ubi motus medius planetae tanquam in circulo pro toto ejus per orbem motu elliptico assumi potest, dicendum est obtinere legem Keplerianam temporum periodicorum: quae etiam ex consonantia ipsa motus liberi et vorticosi nasci debet, cum et liberi impetus hoc ferat cum gravitate compositio, et ipsum aequilibrium motus vorticosi, ut alias fusius explicabitur.

Observandum tamen est, etsi nihil in ipsa re, tamen aliquid in enunciatione nostra in melius mutari debere, quo veritatum consensus appareat absolutius. Nempe dicendum est, impressionem novam paracentricam planetae harmonice circulantis simulque ad Solem vel aliud centrum gravitantis constare ex conflictu gravitationis et conatus centrifugi, simpli scilicet, non dupli, qui mihi ex incommoda Termini acceptione emerserat, cujus emendationem utilem puto, ut verba rebus quam optime consentiant. Certe gravitatio novam solicitationem accedendi ad centrum, at conatus centrifugus circulantis novam solicitationem recedendi a centro constituit, variantibus ambabus pro distantia a centro: et ipse conatus totalis inde resultans in horum conatuum differentia consistit, sequiturque directionem praevalentis. Porro *conatus centrifugus circulantis* dupliciter accipi potest: vel pro eo, quem mobile exercet, si motus proxime praecedens concipiatur in tangente circuli, vel pro eo, quem mobile exercet, si motus proxime praecedens concipiatur in ipso arcu circulari. Hoc loco enim, ubi ad infinities infinite parva descenditur, angulus contactus negligi non debet. Prior conatus centrifugus locum revera habet initio circulationis, adeoque initialis quidem est, sed non durans; posterior vero persistit locumque habet in progressu circulationis. Illum ergo, qui initialis est, dicemus *tangentialem*, hunc qui perdurat, *arcualem*: et posito aequali utrobique circulationis impetu, arcualis est duplus ipsius tangentialis, cum hic repraesentetur per sinum versum, ille per ejus duplum. Simpliciter autem nomine conatus centrifugi Arcualem accipere praestat, cum de circulatione planetae (quippe dudum coepta) agitur; ita enim elegantior et rotundior enuntiatio erit.

Sed ut res intelligatur, sit radius AC (fig. 29) mobilis circa

centrum C, et elementaris arcus circuli, hoc centro descriptus, sit EAG, bisectus in A, ut chorda EG radium secet ad angulos rectos; et ab eo bisecetur in B. Compleatur rectangulum ABGD, et in BC sumta BH aequali ipsi AB, compleatur Parallelogrammum AHGF. Jam ponamus mobile J moveri uniformiter velocitate repraesentata per spatium elementare JA, aequale ipsi AD, certoque temporis Elemento veniens ab J ad A, impingere in A angulo JAC recto, et ibi ipso attactu adhaerescere radio in puncto A, impetuque suo gyrationem radii efficiendo circa C mox describere aequali cum priore temporis Elemento, arcum elementarem AG. Poteritque motus AG compositus intelligi ex impetu priore JA seu AD, et solicitatione centripeta AB (neque enim hic refert AG de arcu an chorda intelligatur) adeoque mobile, cum pro AD describit AG, retineri in circulo vi, quae sit ut AB vel DG, id est, conatum centrifugum (vi retinenti aequalem) esse ut DG, sinum versum arcus AG, atque hic est conatus centrifugus initialis vel Tangentialis. Sed si mobile in A positum jam dudum in circulatione versetur, veniatque non in tangente JA, sed in arcu EA, veluti si veniat ex E in A cum radio CA describente arcum EA, motu nempe uniformi et eodem temporis Elemento, quo prius directe percurri JA: hic positis impetus, quem mobile habet in AS, est ut EA, quae (recta an circularis nihil refert) longitudine non differt comparabiliter ab JA seu AD. Idem est ergo magnitudine impetus circulandi, qui ante; sed directionem aliam habet, nempe chordae EA, quae producta cadit in F. Quare continuata aequali cum priore temporis elemento circulatio per AG composita intelligi potest ex impetu priore ut EA vel AF (quae est aequalis et in directum ipsi EA) et ex solicitatione centripeta AH vel FG, dupla ipsius DG, sinus versi arcus AG. Duplus ergo sinus versus circulationis conatum centrifugum arcualem repraesentabit, qui est duplus ipsius tangentialis seu initialis, ut ostendendum erat. Et licet verum sit, etiam conatus centrifugos arcuales esse ut sinus versos arcuum, quia dupli sunt simplis proportionales, revera tamen comparatione tangentialium per sinus versos repraesentatorum, horum duplis exprimentur.

Equidem olim (in dicto Schediasmate Februarii 1689) conatus centrifugi nomine accepi non eum, quem revera impressionem planetae a centro recedendi novam vel elementarem a circulatione ortam constituere intelligebam, et gravitationi versus centrum nova

ssione agenti opponebam, sed initialem illum vel tangentialem,
rima fronte occurrit; sed inde nata est incommoda enunciatio,
nobis ipsi offecimus, obscurato veritatum concentu. Dum enim
i PN, in figura Schediasmatis dicti, nomine conatus centrifugi
lavimus, jam dicere oportuit (quemadmodum et fecimus) con-
n esse inter gravitatis solicitationem et dupli conatus centri-
mpressionem. Sed si, ut par est, conatus centrifugi nomine
gnamus illam ipsam novam impressionem a circulatione ortam,
gravitationis impressioni novae obnititur, tunc designatur uti-
conatus centrifugus ille, qui locum habet durante circulatione,
ecundis. Quo sensu convenientissime et simpliciter dicitur,
ssionem paracentricam novam (qua celeritas ad centrum ac-
di vel ab eo recedendi mutatur) vel quod idem est, Elemen-
velocitatis paracentricae esse differentiam inter gravitatis soli-
onem $_{2}$ML seu $2a\vartheta\vartheta:rr$ (vid. dict. Schediasma §. 15 et 19)
er conatum centrifugum $aa\vartheta\vartheta:r^{3}$ nempe arcualem, qui (per
et 15) exprimitur duplo ipsius PN sinus versi. Itaque ar-
erat simpliciter conatus centrifugi nomine hoc loco designan-
Occasionem autem unius appellationis pro alia sumtae natam
ex eo suspicor, quod vim excussoriam (cujus species est
fuga) metitus sum perpendiculari ex puncto ad tangentem
ne praecedentem; recte sane, sed per tangentem illam intel-
ebet ea linea, in qua fuit directio proxime praecedens. Nempe
ura praesente ex puncto G perpendicularis ducenda est ad
EA (circulationis praecedentis directionem repraesentantis)
nuationem seu ad AF, non ad AD, nisi circulatio incipiat in
o casu AD est continuatio directionis praecedentis JA. Porro
ndicularis ex G in AF non differt comparabiliter ab ipsa FG.
ero etsi non in rei ipsius aestimatione, tamen in appellatione
ti generaliter ad AD tangentem in A eique perpendicularem
inde non quidem error, sed tamen inconcinnitas prodiit, quam
sublatam esse juvabit. Animadversionis autem occasionem
praebuere elegantes celeberrimi Varignonii de conatu centri-
meditationes, etsi alio ipsius scopo, cum alias a multo tem-
de his parum cogitassem.

Hinc in dicto Schediasmate, Paragraphis 11, 12, 15, 21, 27, 30
uplo conatu centrifugo ponatur simpliciter conatus centrifugus,
o conatu centrifugo simpliciter ponatur dimidius.

Causam cur Attractiones Gravitatis sint in ratione distantiarum

diversas habent velocitates, tunc si mobili ipsi volumus tribuere certam velocitatem mediam inter diversorum punctorum velocitates, fieri poterit ut mobile quidem in summa eandem velocitatem retineat, dum quod uni puncto detrahitur, alteri additur, ipsa vero puncta singula non retineant suas, quod tamen requiritur, ut mobilis motus sit uniformis.

Propositio 4.

In motibus uniformibus punctorum vel aequidistribute motorum velocitates mobilium sunt ut longitudines aequalibus temporibus percursae.

Sint (fig. 78) aequidistribute mota A et B absolventia temporibus ipsi T aequalibus longitudines ${}_1A_2A$, ${}_1B_2B$ motibus uniformibus; dico esse velocitatem in A ad velocitatem in B, ut ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B$. Nam in motibus aequivelocibus et aequidistribute motis est velocitas ad velocitatem ut ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B$ (per def. 2 cap. praec.) seu ut longitudines percursae (per def. 3 d. cap.). Sed in aequidistribute motis idem est motus aequivelox et uniformis (per prop. 3 hic). Itaque in aequidistribute et uniformiter motis (qualia etiam per prop. 5 cap. praeced. semper sunt puncta uniformiter mota) velocitates sunt, ut longitudines aequalibus temporibus percursae.

Ut si velocitas ipsius A sit multipla velocitatis ipsius B (ut dupla, tripla, sesquialtera etc.), longitudo uniformiter aequali tempore percursa ab ipso A erit aequimultipla (etiam respective dupla, tripla, sesquialtera) percursae a B.

Propositio 5.

In motu uniformi punctorum vel aequidistribute motorum longitudines aequalibus amborum velocitatibus percursae sunt ut tempora impensa. Et vicissim in aequidistribute motis aut punctis, si semper sint longitudines ut tempora, motus sunt uniformes; et siquidem diversorum quoque mobilium invicem comparatorum longitudines percursae sint ut tempora, velocitates mobilium sunt aequales, non tantum sibi, sed et inter se.

Sint (fig. 79) mobilia duo AB et CD, quorum motus ${}_1A_1B_2A_2B$, item ${}_1C_1D_2C_2D$ facti respective temporibus TV et ES sint uniformes et aequidistributi; et praeterea velocitas ipsius AB aequalis velo-

citati ipsius CD; ajo esse longitudinem ${}_1A_2A$ tempore TV percursam ad longitudinem ${}_1C_2C$ tempore E percursam ut TV ad ES.

Ponantur in motu sumi tempora aequalia TM et EP, et his percurrantur a punctis A et C longitudines ${}_1A_2A$, ${}_1C_2C$ (per consec. 3 defin. loci motus). Quoniam mobilium AB et CD motus sunt uniformes (per prop. 2 de motu unif.), rursus quia motus mobilium AB et CD sunt aequidistributi, aequalis est velocitas puncti A et mobilis AB, itemque mobilis CD et puncti C (per prop. 3 cap. praec.) Jam ex hypothesi, aequalis est velocitas mobilis AB et mobilis CD; ergo aequalis est velocitas puncti A et puncti C. Porro longitudines ${}_1A_2A$ et ${}_1C_2C$ motibus uniformibus a punctis A et C aequalibus temporibus TM et EP percursae, sunt inter se ut velocitates ipsorum A et C (per praeced. propr.), quae sunt aequales ut ostendimus; ergo et ${}_1A_2A$ et ${}_1C_2C$ sunt aequales. Jam ob motum uniformem puncti est ${}_1A_2A$ ad ${}_1A_2A$ seu ad ${}_1C_2C$, ut TV ad TM seu ad EP (per pr. 5 de motu unif.) et (per eandem) est ${}_1C_2C$ ad ${}_1C_2C$ ut EP ad ES. Ergo jungendo prima postremis, erit ${}_1A_2A$ ad ${}_1C_2C$ ut TV ad ES, longitudines scilicet a motibus AB et CD percursae, ut tempora impensa. Eadem ratiocinatio est, si mobilia AB et CD contrahantur in ipsa puncta A et C, cum puncta (per prop. 5 cap. praec.) semper censeantur aequidistribute moveri. Vicissim si semper longitudines a mobili (aut mobilibus) percursae sint ut tempora, etiam ob motum aequidistributum (per def. 3 cap. de motu aequidistr.) punctorum viae erunt ut tempora; ergo (per prop. 6 de motu unif.) punctorum motus sunt uniformes; ergo (per prop. 1 hic) et velocitates punctorum constantes. Itaque (per prop. 2 hic) et mobilis velocitas constans, id est (per prop. 3 hic) motus uniformis. Idem est in pluribus mobilibus; nam si longitudines ab ${}_1A$ et ${}_2C$ percursae sunt ut tempora, et a ${}_2C$ et ${}_2A$ percursae ut tempora, etiam ab ${}_1A$ et ${}_2A$ percursae erunt ut tempora, adeoque longitudines a mobili AB percursae (eaedem quippe quae puncti A, per dict. def. 3) sunt ut tempora. Unde jam ostendimus motum mobilis esse uniformem, idemque est in mobili CD.

Quodsi denique sumto quocunque tempore motus ipsius A ut TM, et ipsius C ut PS, sint longitudines ut tempora; erunt velocitates mobilium A et C aequales semper sibi et inter se; sibi quidem, ut ostendimus ob motum uniformem; inter se vero, nam si temporibus TM et PS percurrantur longitudines ${}_1A_2A$ et ${}_1C_2C$,

sitque semper ${}_1A_2A$ ad ${}_2C_3C$ ut TM ad PS, itaque si tempora TM, PS sint aequalia, erunt et longitudines ${}_1A_2A$ et ${}_2C_3C$ aequales. Sed temporibus aequalibus velocitates sunt ut longitudines (per prop. 4 hic); ergo ipsorum A et C velocitates sunt aequales. Nempe si AB et CD moveantur motibus uniformibus et aequidistributis, et sint velocitates eorum aequales, sitque ES tempus motui impensum a CD multiplum utcunque (ut duplum, triplum, sesquialterum) temporis TV impensi a mobili AB; erit ${}_1C_3C$ longitudo a CD percursa similiter aequimultipla (ut dupla, tripla, sesquialtera) ipsius ${}_1A_2A$ longitudinis ab AB percursae.

Propositio 6:

In motibus uniformibus punctorum vel aequidistribute motorum, longitudines percursae sunt in ratione composita temporum et velocitatum.

Sint (fig. 80) mobilia uniformiter et aequidistribute mota A et B, et A percurrat tempore TE velocitate V longitudinem ${}_1A_2A$; similiter B tempore MS vel MP velocitate L longitudinem ${}_1B_2B$ vel ${}_1B_3B$; ajo esse ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B$ in ratione composita V ad L et TE ad MS, vel ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_3B$ in ratione composita V ad L et TE ad MP. Nam si tempora TE et MP essent aequalia, utique forent longitudines ${}_1A_2A$ et ${}_1B_2B$ in ratione velocitatum V et L (per prop. 4 hic) adeoque in ratione composita temporum (aequalium) et velocitatum; sin tempora quibus longitudines ${}_1A_2A$ et ${}_1B_2B$ sunt percursae, sint inaequalia TE et MP, sumatur in majore MP pars minori aequalis MS, quo (per consectar. 3 def. loci motus) percurretur pars longitudinis ${}_1B_3B$, nempe ${}_1B_2B$. Ob tempora TE et MS aequalia erit longitudo percursa ${}_1A_2A$ ad longitudinem percursam ${}_1B_2B$ ut velocitas V ad velocitatem L (per prop. 4 hic). Rursus quia motus ipsius B per ${}_1B_2B_3B$ est uniformis, eadem retinetur velocitas (per prop. 1 hic), et in uniformiter et aequidistribute motis, quorum eadem est velocitas, nempe in B percurrente longitudinem ${}_1B_3B$, longitudines percursae ${}_1B_2B$ et ${}_1B_3B$ sunt ut tempora impensa MS (seu TE) et MP (per prop. praeced.) Itaque jungendo, quia ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B$ ut V ad L, et ${}_1B_2B$ ad ${}_1B_3B$ ut TE ad MP, erit ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_3B$ in ratione composita V ad L et TE ad MP. Quod affirmabatur.

In numeris sit velocitas L dupla velocitatis V, et tempus MP triplum temporis TE, erit longitudo ${}_1B_3B$ velocitate L tempore MP

percursa ad longitudinem ${}_1A_2A$ velocitate V tempore TE percursam in ratione composita 3 ad 1 et 2 ad 1, id est in ratione 6 ad 1, sive ut factum ex tempore in velocitatem, seu si velocitas ipsius B sit dupla et tempus triplum respectu velocitatis et temporis ipsius B, erit ipsius B percursa longitudo bis tripla seu ter dupla, hoc est sextupla longitudinis ab A percursae.

Propositio 7.

Quandocunque percursa a mobilibus longitudo ea esse censetur quae ab aliquo puncto est percursa, et velocitas, quae ejusdem puncti, et motus mobilium sunt uniformes; tunc longitudines percursae sunt in ratione composita temporum et velocitatum.

Nam in punctis sunt tales (per praeced.), et hoc loco idem esse intelligitur motus mobilis qui puncti, perinde ac si motu aequidistributo secundum hujus puncti motum moveretur.

Ut (fig. 81) si sphaera AB, cujus centrum A provolvatur super linea LMN, solet sphaerae attribui motus centri A perinde ac si in punctum reducta percurreret lineam ${}_1A_2A_3A$ (parallelam ipsi LMN) vel perinde ac si motu aequidistributo sine ulla rotatione moveretur, quo casu etiam longitudo motus sphaerae eadem censeretur quae puncti in ea ut A (per def. 3 cap. praeced.), neglecta scilicet rotatione puncti B, Cycloidem quandam describentis.

Propositio 8.

In praedictis mobilibus (propositionis 6 vel 7) uniformiter motis velocitates sunt in ratione composita ex longitudinum percursarum directa et temporum reciproca.

In figura propositionis 6 hic (sive fig. 80) ajo esse velocitates L ad V in ratione composita ex ratione longitudinum ${}_1B_2B$ et ${}_1A_2A$ directa, et ex ratione temporum MP et TE inversa, seu esse L ad V in ratione composita ex ${}_1B_2B$ ad ${}_1A_2A$ et TE ad MP. Est enim (per prop. 6 hic) ${}_1B_2B$ ad ${}_1A_2A$ et in ratione composita ex L ad V et ex MP ad TE; ergo (ex Elementis) est L ad V in ratione composita ${}_1B_2B$ ad ${}_1A_2A$ et TE ad MP.

In numeris, mobilis velocitas L (dupla) est ad ipsius A velocitatem V (simplam) ut numerus longitudinem a B percursam

$_1B_2B$ exprimens (6) divisus per numerum tempus MP a B impensum exprimentem (3) est ad numerum longitudinem ab A percursam $_1A_2A$ exprimentem (1) divisum per numerum tempus TE ab A impensum exprimentem (1). Nam 2 ad 1 est ut $\frac{6}{3}$ ad $\frac{1}{1}$.

Propositio 9.

In iisdem mobilibus uniformiter motis tempora sunt in ratione composita ex longitudinum percursarum directa et velocitatum reciproca.

Patet ex praecedenti vel ad eundem modum.

In numeris, quoad casum figurae prop. 6 tempus MP a B impensum (triplum) est ad tempus TE ab A impensum (simplum) ut numerus longitudinem a B percursam $_1B_2B$ exprimens (6) divisus per numerum ipsius B velocitatem LB exprimentem (2) est ad numerum longitudinem ab A percursam $_1A_2A$ exprimentem (1) divisum per numerum ipsius A velocitatem V exprimentem (1), seu 3 est ad 1 ut $\frac{6}{2}$ ad $\frac{1}{1}$. Et ut generaliter rem designemus: Longitudo est ut tempus in velocitatem, et velocitas est ut longitudo per tempus, et denique tempus est ut longitudo per velocitatem divisa.

Propositio 10.

In iisdem mobilibus uniformiter motis coincidit: Longitudines esse aequales, et Velocitates esse temporibus reciproce proportionales.

Patet ex prop. 8 vel 9. Nam (fig. 82) quia velocitates (3) et (2) sunt in ratione composita ex directa longitudinum 6 et 6 et reciproca temporum ((2)) et ((3)) (per prop. 8 hic), et longitudines nunc sunt aequales ex hypothesi; itaque demta ratione aequalitatis erunt velocitates (3) et (2) reciproce ut tempora ((2)) et ((3)), seu erit velocitas (3) ad velocitatem (2) ut tempus ((3)) ad tempus ((2)). Idemque succedit et vicissim.

Non inutile erit indiculum subjicere positionum in his, quae demonstravimus, contentarum, etsi quaedam bis diverso habitu occurrant.

In mobilibus motis aequidistribute, aliisque omnibus quorum motum aestimamus motu puncti tanquam aequidistributum; si motus sunt uniformes, tunc

1) Temporibus impensis aequalibus Velocitates sunt ut Longitudines percursae. Veluti si eodem tempore percurratur longitudo dupla, erit velocitas dupla (per prop. 4).

2) Longitudinibus percursis aequalibus, Velocitates sunt reciproce ut tempora. Veluti si longitudo aequalis percurratur tempore duplo, velocitas erit dimidia; sin tempore dimidio, erit dupla (per prop. 10).

3) Velocitates sunt in ratione composita ex longitudinum directa et temporum reciproca. Veluti si sextupla percurratur tempore triplo, erit velocitas dupla (per prop. 8).

4) Velocitatibus aequalibus, Tempora sunt ut longitudines. Veluti si eadem sit velocitas, ad percurrendam longitudinem duplam requiritur tempus duplum (per prop. 5).

5) Longitudinibus aequalibus, Tempora sunt reciproce ut velocitates. Veluti si longitudo simpla velocitate dupla percurratur, impendetur tempus dimidium (coincidit cum posit. 2).

6) Tempora sunt in ratione composita ex longitudinum directa et velocitatum reciproca. Veluti si longitudo tripla velocitate dimidia percurratur, impendetur tempus sextuplum (per prop. 9).

7) Velocitatibus aequalibus, Longitudines percursae sunt ut tempora. Sic, eadem manente velocitate, longitudo dupla percurretur tempore duplo (coincidit cum posit. 4).

8) Temporibus aequalibus, Longitudines percursae sunt ut velocitates. Sic eodem tempore velocitate dupla percurretur longitudo dupla (coincidit cum posit. 1).

9) Longitudines percursae sunt in ratione composita (directa) temporum et velocitatum. Sic duplo tempore triplaque velocitate percurretur longitudo sextupla (per prop. 6).

Caput V.

De Motu simpliciter simplice.

Definitio 1. Motus simpliciter simplex est, cum motus punctorum mobilis dati prorsus conveniunt sibi et inter se, ita ut non possint magis.

Hoc est cum nec unus puncti status ab alio priore aut posteriore, nec unum punctum ab alio discerni potest, quatenus tantum motus eorum spectatur. Motibus quippe semper existentibus similibus et similiter positis inter se, nullum est ex ipsis discernendi principium, etsi fortasse discerni puncta possint respectu corporum, per situm scilicet quem habent in corporibus, quod

evitari non potest, ut taceam qualitates quibus corporis partes variantur, quorum hic non habetur ratio. Sufficit ergo motus punctorum per se spectatos quantum possunt convenire.

Propositio 1.

Motus simpliciter simplex est uniformis.

Sit (fig. 83) punctum mobilis motu simpliciter simplice moti quodcunque A; ajo motum ejus esse uniformem, adeoque (per def. 1 cap. de motu uniformi) etiam motum mobilis esse uniformem. Ponamus punctum A tempore TE describere lineam ${}_1A_2A$, et tempore aequali EM lineam ${}_2A_3A$, erit et linea ${}_1A_2A$ aequalis lineae ${}_2A_3A$, alioqui non satis convenient motus prior posteriori (contra def. motus simpliciter simplicis). Itaque punctum aequalibus temporibus aequalia describit spatia, hoc est (per dictam def. 1) motus ejus est uniformis.

Propositio 2. Definitio 2.

Motus simpliciter simplex est rectilineus. Rectilineus autem motus est in quo unumquodque punctum mobilis describit lineam rectam.

Sit (fig. 84) mobilis punctum quodcunque A describens lineam ${}_1A_2A_3A$; si motus mobilis est simpliciter simplex, ajo lineam descriptam esse rectam. Sit enim non recta, si possibile est, et sumto aliquo puncti A loco intermedio ut ${}_2A$ non cadente in directum cum primo et ultimo punctis ${}_1A$ et ${}_3A$, utique junctae rectae ${}_1A_2A$ et ${}_3A_2A$ facient angulum ${}_1A_2A_3A$. Quodsi jam motus prior et posterior conveniunt (ex def. motus simpliciter simplicis), angulus ${}_1A_2A_3A$ semper erit aequalis, ubicunque durante motu sumatur punctum ${}_2A$ vel ${}_{(2)}A$, itaque linea ${}_1A_2A_{(2)}A_3A$ erit arcus circuli (ex Elementis). Sed hoc esse non potest. Jungatur enim recta ${}_1A_3A$, necesse est (ob motum simpliciter simplicem) angulum ${}_2A_1A_3A$ aequalem esse angulo ${}_{(2)}A_1A_3A$; cumque et angulus ad ${}_2A$ sit aequalis angulo ad ${}_{(2)}A$, etiam tertius in triangulis ${}_1A_2A_3A$ et ${}_1A_{(2)}A_3A$ angulus erit aequalis, nempe ${}_2A_3A_1A$ et ${}_{(2)}A_3A_1A$; sunt ergo triangula aequiangula, et cum habeant et latus commune ${}_1A_3A$, erunt et congrua, adeoque latus ${}_2A_3A$ erit aequale lateri ${}_{(2)}A_3A$, ac proinde durante motu omnia puncti mobilis A loca intermedia ut ${}_2A$ et ${}_{(2)}A$ semper aequaliter distabunt ab extremo motus puncto ${}_3A$, quod est absurdum, nunquam enim

perveniret mobile ad $_3A$. Necesse est ergo, ut rectae $_1A_2A$, $_2A_3A$ nullum faciant angulum neque inter se neque ad rectam $_1A_3A$, hoc est necesse est motum $_1A_2A_3A$ fieri in linea recta, seu puncta $_2A$ cadere in rectam $_1A_3A$.

Propositio 3. Definitio 3.

Motus simpliciter simplex est consentiens. Motus autem consentiens est, in quo puncta mobilis easdem inter se distantias servant seu moventur ad modum rigidorum.

Magis enim convenient motus, si easdem servent distantias et possunt servare; itaque (per def. motus simpliciter simpl.) eas servabunt.

Propositio 4.

Motus simpliciter simplex est aequidistributus.

Sint (fig. 85) mobilis puncta duo quaecunque A et B, quae eodem tempore describant lineas $_1A_2A$ et $_1B_2B$, erunt lineae aequales (ex def. motus simpliciter simpl.). Jam mobile, cujus duo puncta quaevis eodem tempore aequales describunt lineas (seu aequali velocitate moventur), id utique (per def. 1 cap. de velocitate motus aequidistr.) movetur motu aequidistributo.

Propositio 5. Definitio 4.

Motus simpliciter simplex est aequidirectus. Aequidirectus autem Motus est, si directiones quas duo quaevis mobilis puncta habent eodem tempore, sunt parallelae et ad easdem partes. Directio autem puncti est recta tangens lineam a puncto descriptam ex loco puncti educta ad eas partes, ad quas punctum porro tendit.

Sint (fig. 86) duo mobilis puncta quaecunque A et B, sintque simul A in loco $_1A$, et B in loco $_1B$, continueturque utcunque motus ipsius A in $_2A$, et eodem tempore ipsius B in $_2B$. Jam cum $_1A_2A$ et $_1B_2B$ sint rectae (per prop. 2 hic) et recta tangens rectam non possit esse nisi recta ipsamet, coincidens ei quam tangit (neque enim aliter recta rectae occurrere potest quin producta eam secet) et ob aequales $_1A_1B$ et $_2A_2B$ (per prop. 3 hic) itemque $_1A_2A$ et $_1B_2B$ (per prop. 4 hic) sint (ex Elementis) ipsae $_1A_2A$ et $_1B_2B$ parallelae; erunt parallelae inter se tangentes in easdam

partes in quas puncta ex $_1A$ et $_1B$ porro tendunt eductae, adeoque et directiones erunt parallelae inter se et ad easdem partes, id est (per def. hic) motus aequidirectus.

Possunt autem duo puncta habere motus aequidirectos, etsi non describant lineas parallelas, nam duae esse possunt curvae non parallelae (fig. 87) CC et DD tales, ut dato puncto C, in una assignari possit semper respondens punctum D in alia, cujus tangens sit tangenti prioris parallela, et punctis C et D motis ut semper in locis duarum linearum ita respondentibus simul reperiantur, motus erit aequidirectus.

Propositio 6.

Si motus sit uniformis et aequidistributus et rectilineus et aequidirectus, est simpliciter simplex.

Nam motus ejusdem puncti in mobili durante aliquo tempore non magis convenire potest sibi ipsi quam si motus sit uniformis et in linea recta et in easdem partes; et motus duorum quorumlibet punctorum non magis convenire possunt inter se quam ut aequales simul describant lineas easque prorsus similes et similiter positas, nempe rectas et parallelas et ad easdem partes ductas. Data enim magnitudine temporis, lineae descriptae, et hujus specie et directione, ipse motus puncti dati est datus. Quae vero conveniunt in his quibus datis dantur, non magis convenire possunt, nisi prorsus coincidant; quod fieri, est contra hypothesin.

Horum quatuor motus simpliciter simplicis requisitorum unumquodque sine reliquis stare potest, et velocitatem quidem uniformem aut non uniformem fieri posse constat eadem manente linea motus, et lineae motus a diversis punctis simul descriptae magnitudo manere potest, mutata licet directione et flexu lineae, ut cum mobile aliquod concipitur velut compositum ex pluribus globis disjunctis in liquore natantibus, aut ad instar gregis vel exercitus ex militibus compositi, quorum alii in diversam ab aliis plagam tendunt. Potest etiam mobile dari rigidum seu ad rigidi instar sive consentienter motum, et quidem motu rectilineo ita ut quodvis punctum describat rectam, motus tamen non sit simplex; fieri enim potest, ut non sit aequidirectus, nec rectae a punctis descriptae sint parallelae. Caeterum ex hac propositione juncta prop. 3 patet, motum qui simul sit uniformis, aequidistributus,

rectilineus et aequidirectus, etiam esse consentientem, perinde ac si puncta omnia in eodem rigido essent.

Propositio 7.

Quicquid est in moto motu simpliciter simplici, id ipsum movetur motu simpliciter simplici.

Quicquid enim verum est de omnibus punctis continentis, id etiam verum est de omnibus punctis contenti, quippe quae sub illorum numero continentur. Motus autem simplex (per def. 1) ex illis cognoscitur, quae de omnibus mobilis punctis vera sunt.

Propositio 8.

Omnis motus per se est simpliciter simplex.

Omnia enim per se omnino manent qualia sunt, per se, inquam, id est nisi accidat aliunde supervenire rationem mutationis. Jam motus qui manet omnino qualis est (seu ita, ut non possit magis), est simpliciter simplex (per def. 1 hic).

SECTIO TERTIA.

DE ACTIONE ET POTENTIA.

Caput I.

De Actione motus formali ejusque Effectu.

Definitio 1. Quantitas est numerus partium, posito mensuram esse unitatem.

Ita decempedae quantitas est denarius pedum, seu denarius, cujus unitas est pes.

Definitio 2. Quantitas effectus formalis in motu est, cujus mensura est materiam certae quantitatis (motu aequidistributo) motam esse per certam longitudinem.

Ut (fig. 88) quantitatem materiae contentam in AB translatam esse ex ${}_1A_1B$ in ${}_2A_2B$ per certam longitudinem, nempe lineae ${}_1A_2A$ a quocunque corporis puncto ut A descriptae, quae scilicet est longitudo motus aequidistributi (def. cap. de velocitate motus aequidistr.), ubi nempe linea a quocunque mobili spuncto descripta est aequalis (def. 1 dict. cap.). Itaque si haec mensura effectus in motu aliquoties repetatur, etiam toties repetetur seu multiplicabitur quantitas effectus.

Definitio 3. Quantitas actionis formalis in motu est, cujus mensura est materiam certae quantitatis motam esse per certam longitudinem (motu uniformi aequidistributo) intra certum tempus.

Itaque differt effectus ab actione, quod in effectu solum ejus quod praestitum est, nempe materiae translatae et spatii, per quod facta est translatio, in actione vero integra etiam velocitatis seu temporis T quo praestitus est effectus seu quo (in fig. def. praec.) facta est translatio ex ${}_1A_1B$ in ${}_2A_2B$, habetur ratio. Formalem autem appellavi tam effectum quam actionem, quia, ut hoc loco definivimus, motui est essentialis; secus ac sunt alii effectus aliaeve actiones, ex impedimento quodam peculiari nascentes, ut ex vi gravitatis corpora versus centrum terrae prementis, aut ex resistentia medii vel contractus, aut ex elastro aliquo vincendo, et similibus materiae concretae accidentibus. Si quis autem vocabulum Metaphysicum aegrius fert in re Mathematica, cogitet non aliud commodius suppetiisse, et assignata definitione omnem ambiguitatem esse sublatam.

Cautio.

Sequentes Propositiones circa actionem et potentiam de motibus simplicibus vel saltem de motibus aequidistributis simul et uniformibus intelliguntur.

Propositio 1.

Si eadem quantitas materiae per diversas longitudines mota sit, effectus formales motuum sunt ut longitudines. Quodsi praeterea velocitatum gradus sint aequales, etiam actiones formales motuum sunt ut longitudines.

Sit (fig. 89) materia A (unius librae si placet) translata per longitudinem ${}_0A_2A$, et materia B ei aequalis (etiam unius librae) translata per longitudinem ${}_0B_3B$; et mensura longitudinum communis sit pes, resoluta nimirum longitudine ${}_0A_2A$ in pedes quotcunque, verbi gr. duos, ${}_0A_1A$, ${}_1A_2A$, et resoluta longitudine ${}_0B_3B$ in pedes quotcunque, ut tres ${}_0B_1B$, ${}_1B_2B$, ${}_2B_3B$; et unusquisque pedum absolvatur eadem velocitate, nempe tempori aequali ipsi tempori T, veluti tempore minuti, si placet. His positis mensura actionum formalium erit actio movendi materiam unius librae per

longitudinem pedis unius tempore minuti (per def. 3 hic), et ad transferendam libram A per duos pedes transfertur libra A per pedem unum ${}_0A_1A$ tempore minuti, et rursus transfertur libra A per pedem unum ${}_1A_2A$ tempore minuti. Itaque actio transferendi libram A per ${}_0A_2A$ duos pedes, continet mensuram actionis toties, quoties longitudo ${}_0A_2A$ continet pedem seu mensuram longitudinis, nempe bis. Similiter actio transferendi libram B per ${}_0B_3B$ pedes tres, continet mensuram actionis, quoties longitudo ${}_0B_3B$ continet mensuram longitudinis sive pedem, nempe ter. Jam quantitates sunt ut numeri, posito mensuram esse unitatem (per def. 1). Itaque quantitates actionum sunt ut quantitates longitudinum. Idem est de quantitatibus effectuum, etiamsi velocitates non fuissent aequales (per def. 2 hic). Quodsi longitudines sint incommensurabiles, possunt pro ipsis substitui commensurabiles ab ipsis differentes minus differentia quavis data, veluti si mensurae quantitas data differentia tanto minor assumatur, ut error etiam prodeat minor errore quovis dato, id est nullus.

Propositio familiariter ita enuntiari ostendique potest:

Effectus movendi libram unam per pedes duos (tres) est duplus (triplus) effectus movendi libram unam per pedem unum. Et actio movendi libram unam per pedes duos (tres) tempore duorum (trium) minutorum est dupla (tripla) actionis movendi libram unam per pedem unum tempore unius minuti.

Manifestum enim est, in quantitate composita bis (terve) repeti simplicem, quae est, mensura (per defin. 2 et 3). Itaque composita quantitas erit ad simplicem (per def. 1) ut numerus repetitionum ad unitatem. Et constat ejusdem velocitatis esse percurrere unum pedem tempore unius minuti, et percurrere duos (tres) pedes tempore duorum (trium) minutorum (per prop. 5 cap. de veloc. motus aequidistr. et unif.).

Propositio 2.

Si diversa mobilia moveantur per longitudines aequales, effectus motuum formales erunt ut mobilia. Quodsi praeterea et velocitatum gradus sint aequales, etiam actiones motuum formales erunt ut mobilia.

Sint (fig. 90) mobilia AC et LP translata per longitudinem

${}_1A_2A$ vel ${}_1L_2L$ unius pedis, aequali velocitate seu tempore T unius si placet minuti; et mobilium mensura sit libra, et mobile AC resolvatur in libras si placet duas, AB, BC, mobile autem LP in libras tres LM, MN, NP; habemus in ipsius AC motu bis repetitam mensuram actionis, nempe habemus libram AB translatam per longitudinem unius pedis tempore T seu velocitate unius gradus (per def. 8) et rursus libram BC tempore aequali seu velocitate eadem per longitudinem unius pedis translatam. Similiter in motu ipsius LP habemus mensuram actionis ter repetitam. Et utrobique toties habemus mensuram actionis, quoties mensuram materiae in mobilibus. Sunt ergo quantitates actionum ut mobilium (per def. 1). Idem est in effectibus (per def. 2), quaecunque sit velocitas aut quodcunque impensum tempus. Et idem est in mobilibus incommensurabilibus, ut patet per rationem adhibitam in prop. praeced.

Propositio familiarius ita enuntiari potest: Effectus movendi libras duas (tres) per pedem unum est duplus (triplus) effectus movendi libram unam per pedem unum; et actio movendi libras duas (tres) per pedem unum tempore unius minuti, est dupla (tripla) actionis movendi libram unam per pedem unum tempore unius minuti.

Propositio 3.

Effectus motuum formales et, posita aequali velocitate, etiam actiones motuum formales sunt in ratione composita mobilium et longitudinum.

Si mobilia sint aequalia, caeteris positis erunt effectus et actiones ut longitudines (per prop. 1 hic); ergo in casu aequalitatis mobilium, erunt in ratione mobilium et longitudinum composita.

Sin mobilia sint inaequalia, sumatur (fig. 91) majoris LMN (4) pars LM(3) aequalis minori AB(3); effectus itemque actio motus ${}_1A_2B(6)$ est ad effectum itemque actionem motus ${}_1L_2M(15)$ ut longitudo ${}_1A_2A(2)$ ad longitudinem ${}_1L_2L(5)$ (per prop. 1 hic); rursus effectus itemque actio motus ${}_1L_2M(15)$ ad effectum itemque actionem motus ${}_1L_2N(20)$ est ut mobile LM(3) seu AB(3) ad mobile LN(4) (per prop. 2 hic). Ergo jungendo prima postremis effectus itemque actio motus ${}_1A_2B(6)$ est ad effectum itemque actionem

motus ${}_1L_2N(20)$ in ratione composita longitudinis ${}_1A_2A(2)$ ad longitudinem ${}_1L_2L(5)$ et mobilis AB(3) ad mobile LN(4), seu ut est rectangulum ${}_1A_2B$(3 in 2 seu 6) ad rectangulum ${}_1L_2N$(4 in 5 seu 20).

Nimirum effectus movendi libras duas per pedes tres est bis triplus seu sextuplus ipsius effectus movendi unam libram per pedum unum; et actio movendi libras duas per pedes tres in minuto temporis uno est bis tripla seu sextupla actionis movendi libram unam per pedem unum in uno temporis minuto.

Axioma.

Eandem materiae quantitatem per eandem longitudinem moveri in tempore minore, est actio major.

Percurrere leucam in dimidia hora est majus quam percurrere leucam in hora integra; et ita de caeteris *).

Propositio 4.

Si eadem materiae quantitas moveatur per longitudines aequales temporibus quatuor, et sint tempora duo priora inter se ut tempora duo posteriora, vel (quod idem est) velocitates duae priores inter se ut velocitates duae posteriores; etiam actiones duae priores in eadem inter se ratione erunt, in qua duae actiones posteriores.

Sit (fig. 92) mobile A percurrens longitudines quatuor aequales ipsi ${}_1A_2A$ temporibus BC, EFG, LM, NPQ, sitque tempus EFG in eadem proportione ad tempus BC, in qua est tempus NPQ ad tempus LM; ajo et actionem, cui impensum est tempus EFG, esse ad actionem, cui impensum est tempus BC, in ea proportione, in qua actio, cui impensum est tempus NPQ, est ad actionem, cui impensum est tempus LM. Cum enim actionis mensura sit, mobile certae magnitudinis percurrisse longitudinem certae extensionis

*) Leibniz hat im Original bemerkt: Si nollemus demonstrare prop. 4, possemus ex Axio. et prop. 4. facere tale axioma utrumque complectens: Si eadem materiae quantitas per eandem longitudinem moveatur quatuor temporibus B, E, L, M, sitque B minus quam E in ratione qua L minus quam M, erit actio per B major actione per E, in ratione qua actio per L major est actione per M.

certo velocitatis gradu seu certa temporis parte (per def. 8), et longitudo translationis itemque magnitudo mobilis sint in omnibus eaedem (ex hypothes.), et eadem ratio utrobique temporum (adeoque velocitatum), omnia, quibus actio aestimari potest, erunt similia a parte BC et EFG ut a parte LM et NPQ. Itaque nulla causa reperiri potest, cur major ab una parte quam alia actionum proportio esse dicatur. Est ergo eadem. Idem est de velocitatibus, nam si duae priores velocitates in ea sunt ratione, in qua duae posteriores, etiam tempora posteriora prioribus erunt proportionalia, quia velocitates (aequalibus longitudinibus percursis) sunt temporibus reciproce proportionales (per prop. 8 cap. de veloc. in motu aequidistr. et unif.).

Fieri non potest, ut alius modus haec demonstrandi reperiatur, quia actiones, quae velocitate differunt, non possunt reduci ad congruentiam, uti paulo ante reduximus ad congruentiam eas, quae velocitatem eandem habent, tantumque magnitudine mobilis aut longitudinis differunt; itaque per viam similitudinis comparatio differentium velocitate actionum obtinenda est.

Propositio 5.

Si velocitates in eadem materiae quantitate per longitudinem eandem movenda exercitae assumantur in progressione Geometrica crescente, erunt et actiones formales motuum in progressione Geometrica crescente.

Sint velocitates A, B, C progressionis Geometricae seu A ad B ut B ad C, et sint actiones L, M, N; ajo etiam esse L ad M ut M ad N. Nam assumatur alia velocitas H aequalis ipsi B, qua fiat alia actio Z aequalis ipsi M; quia A ad B ut B ad C (ex hyp.), ergo A ad B ut H ad C (ex constructione); ergo et L ad M ut Z ad N (per prop. praeced.), id est (per construct.) L ad M ut M ad N. Idemque est si progressio Geometrica continuetur utcunque. Crescentibus autem velocitatibus crescunt actiones, quia crescentibus velocitatibus et manente longitudine, tempora decrescunt (per prop. 8 cap. de veloc. in motu aequidistr. et unif.), et decrescentibus temporibus manente longitudine, cui impenduntur, crescunt actiones (per axioma hic).

Propositio 6. Lemma.

Si duae sint progressiones Geometricae simul crescentes, termini unius erunt in eadem, multiplicata aut submultiplicata ratione terminorum respondentium alterius.

Sint Geometricae progressiones vel series A, B, C, D, E, F, et L, M, N, P, Q; ajo esse A ad B in ratione eadem vel multiplicata L ad M, vel contra L ad M in eadem aut multiplicata ratione A ad B (quo casu erit A ad B in submultiplicata L ad M). Nam interpolando continue seriem priorem, omnes aliae quantitates homogeneae vel ab illis indefinite parvo errore differentes in eam cadent; itaque et in seriem priorem A, B, C cadet series posterior L, M, N, et quidem intervallis seu logarithmorum differentiis aequalibus, quia ipsa quoque L, M, N progressionis Geometricae est. Jam si in serie geometricae progressionis assumatur alia series progressionis geometricae, sed majoribus intervallis, tunc termini posterioris sunt in multiplicata ratione terminorum prioris, et quidem ratio multiplicata est in ratione intervalli majoris ad minus, seu intervalli seriei unius ad intervallum alterius, quod in unaquaque serie est constans; contra termini prioris sunt in ratione submultiplicata terminorum posterioris.

Sic si sint duae series simul crescentes progressionis geometricae 1, 4, 16, 64, et 2, 16, 128, 1024; tunc interpolata priore, ut in eam incedat posterior, res ita stabit:

	A		B		C		D		E		F
Series communis.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
		L			M			N			P
Logarithm. . . .	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Series prior . .	1	·	4	·	16	·	64	.	.	.	.
Logarithm. . . .	(0)	·	(2)	·	(4)	·	(6)	.	.	.	.
Intervalla . . .	·	(2)	·	(2)	·	(2)	·	·	·	·	·
Series posterior .	·	2	·	·	16	·	·	128	·.·	·	1024
Logarithm. . . .	·	1	·	·	4	·	·	7	·	·	10
Intervalla . . .	·	·	·(3)·		·	·(3)·		·	·(3)	·	·

Et cum differentiae logarithmorum seriei A, B, C, D sint ad differentias logarithmorum seriei L, M, N, P ut 2 ad 3, erunt termini seriei posterioris in ratione multiplicata terminorum prioris secundum rationem 3 ad 2 sive numerum indicem vel exponentem $\frac{3}{2}$, seu ratio L ad M (2 ad 16) est rationis A ad B (seu 1 ad 4) triplicata subduplicata, vel ratio A ad B est rationis L ad M duplicata subtriplicata; cum enim ratio L ad M sit ut cuborum (nam 2, 16, 128 etc. est ut 1, 8, 64 etc.), ratio A ad B est ut quadratorum (nempe 1, 4, 16 etc.). Eademque locum habent in aliis omnibus, etiamsi indefinite sit progrediendum in interpolanda serie priore ut in eam incidat posterior, quemadmodum factum est in calculandis logarithmis.

Propositio 7.

Si eadem materiae quantitas moveatur per longitudines aequales, velocitates erunt actionibus proportionales.

Nam velocitates duae quaecunque A et B possunt intelligi termini seriei progressionis Geometricae. Haec series continuetur ut sit A, B, C; itaque respondentes eis actiones L, M, N erunt etiam termini progressionis Geometricae (per prop. 5) et quidem vel ejusdem seu in ratione simplice velocitatum, vel in ratione velocitatum secundum numerum certum multiplicata aut submultiplicata (per prop. 6 hic). Sed quoniam longitudine et materia posita eadem, nullius alterius quam solius velocitatis vel temporis (quod velocitati, qua eadem longitudo percurritur, reciproce proportionale est) consideratio superesse potest (per def. 3 hic), itaque nulla fieri potest compositio sive multiplicatio rationum. Et proinde necesse est actiones eandem quantitatem materiae per eandem longitudinem transferentes esse simpliciter in ratione velocitatum, seu ob eandem longitudinem (per prop. 8 cap. 4 sect. 2) in ratione temporum reciproca.

Hanc propositionem ita pro captu omnium facilius enuntiavimus: Transferre libram per unum pedem intra temporis minutum duplo (triplo) major actio est, quam transferre unam libram per unum pedem intra duo (tria) minuta. Idque tamquam axioma assumere poteram, quod iis sufficere potest, qui vim ratiocinationis Geometricae profundioris non satis facile attingunt. Volui tamen ad agendam artem ra-

tionis in usum Geometrarum ostendere, quomodo in praesenti materia ex solo axiomate simpliciore assumto, quod nempe majus sit efficere idem minore tempore, consequatur actionem motus formalem esse praecise in ea proportione majorem, in qua minus est tempus; quemadmodum Archimedes assumens majus esse momentum ex majore distantia, tandem (licet alia methodo) demonstravit esse momenta ut distantias.

Propositio 8.

Si aequales sunt effectus, erunt quantitates materiae reciproce ut longitudines motus; idemque est, si aequales sint actiones et motuum tempora seu velocitates. Et vicissim: Si quantitates materiae sint reciproce ut longitudines, effectus vel aequalibus simul velocitatibus et actiones sunt aequales.

Quoniam enim effectus vel in casu aequalium temporum actiones sunt in ratione composita et quantitatum materiae et longitudinum (per prop. 3 hic), ideo si effectus vel actiones sint aequales, fient (per Elementa) quantitates materiae longitudinibus reciproce proportionales. Et contra, si reciproce proportionales sint quantitates materiae longitudinibus, erunt effectus aequales, et in casu aequalium velocitatum et actiones. Itaque tres libras transferre per longitudinem duorum pedum aequalis est effectus effectui, vel si aequalia sint tempora, aequalis est actio actioni transferendi duas libras per longitudinem trium pedum. Quod et sic ostendi potest: Tres libras transferre per longitudinem duorum pedum sextuplus est effectus transferentis unam libram per longitudinem unius pedis. Et duas libras transferre per longitudinem trium pedum sextuplus est effectus transferentis unam libram per longitudinem unius pedis (utrumque per prop. 3 hic). Ergo aequale est duas libras per tres pedes vel tres libras per duos pedes transferre.

Propositio 9.

Si eadem sit quantitas effectus in motibus, actiones motuum formales sunt velocitatibus agendi proportionales.

Sit (fig. 93) motus A effectus quicunque B, uti transferendi duas libras per sex pedes, velocitas C graduum quorumcunque ut 2. Et sit rursus motus L effectus B, priori aequalis, vel uti trans-

ferendi tres libras per quatuor pedes (quem aequalem priori esse patet ex prop. praec.), velocitas N graduum quorumcunque ut 3; ajo actionem motus A esse ad actionem motus L ut C(2) ad N(3). Assumantur duo alii motus, unus R transferens unam libram per unum pedem velocitate C(2), alter S transferens unam libram per unum pedem velocitate N(3), et effectus transferendi unam libram per unum pedem vocetur Q. Actio motus A est ad actionem motus R (ob velocitates C aequales, ambas graduum 2) ut effectus B ad effectum Q (per prop. 3 hic), et actio motus R est ad actionem motus S ob effectus aequales Q (utrobique unius librae translatae per unum pedem) ut velocitates, nempe ut velocitas C(2) ad velocitatem N(3) (per prop. 7 hic). Et denique actio motus S est ad actionem motus L (ob velocitates N aequales, ambas graduum 3) ut effectus Q ad effectum B (per prop. 3 hic). Ergo denique actio motus A est ad actionem motus L in ratione composita B ad Q et C ad N et Q ad B; et quia ratio composita ex B ad Q et Q ad B est aequalitatis, erit actio motus A ad actionem motus L in ratione C ad N, seu in ratione velocitatum agendi.

Propositio 10.

Actiones formales motuum sunt in ratione composita effectuum formalium et velocitatum agendi, seu in ratione composita quantitatum materiae, longitudinum, per quas sunt motae, et velocitatum.

Nam si effectus sint aequales, erunt actiones ut velocitates efficiendi (per prop. 7 hic); ergo sic et in ratione composita effectuum et velocitatum. Si effectus sint inaequales, sit (fig. 94) effectus A, velocitas B, actio C; et rursus effectus DEF, velocitas GH, actio NPQ. Sumatur effectus majoris DEF pars DE aequalis ipsi effectui A, producta actione NP parte actionis NPQ, et eadem velocitate ut GH, qua actio integra NPQ. Jam actio NPQ est ad actionem NP ut effectus DEF ad effectum DE ob aequalem velocitatem utrobique GH (per prop. 3 hic) et actio NP est ad actionem C ut velocitas GH ad velocitatem B ob effectus DE et A aequales (per prop. 9 hic). Ergo actio NPQ est ad actionem C in ratione composita ex ratione effectus DEF ad effectum DE et ratione velocitatis GH ad velocitatem B. Sunt autem effectus in ratione composita quantitatum materiae et longitudinum translationis (per prop. 3 hic), unde habetur propositio.

Definitio 4. Diffusio actionis in motu vel actionis extensio est quantitas effectus formalis in motu. Intensio ejusdem actionis est quantitas velocitatis, qua factus est effectus seu qua materia per longitudinem translata est.

Diffunditur enim actio eodem gradu per majus spatium vel mobile distributo. Intenditur gradus etiam eodem manente mobili et spatio.

Propositio 11.

Actiones motuum formales sunt in ratione composita diffusionum et intensionum.

Nam sunt in ratione composita effectuum et velocitatum translationis (per prop. 10 hic). Sunt autem effectus ut diffusiones, et velocitates ut intensiones (per def. 4 hic).

Propositio 12.

Si effectus (formales intelligo) sint proportionales temporibus, erunt actiones (formales scilicet) ut longitudines, et vicissim.

Nam Actiones sunt in ratione composita effectuum et velocitatum (per prop. 10 hic), et effectus sunt ut tempora (ex hypothesi); ergo actiones sunt in ratione composita temporum et velocitatum. Sed longitudines sunt etiam in ratione composita temporum et velocitatum (per prop. 6 vel 7 cap. 4 sect. 2); ergo actiones sunt ut longitudines translationum. Vicissimque si actiones sunt ut longitudines translationum, actiones erunt in ratione composita temporum et velocitatum; sed sunt etiam actiones in ratione composita effectuum et velocitatum. Ergo effectus sunt ut tempora.

Propositio 13.

Si eadem sit quantitas materiae motae, et longitudines motuum sint ut tempora, erunt actiones quoque ut tempora, et vicissim.

Nam effectus erunt ut longitudines (per prop. 1 hic), ergo ut tempora (ex hypothesi). Ergo actiones ut longitudines (per prop. 12), ergo ut tempora (ex hyp.). Vicissim si actiones sint ut tempora et quantitas materiae sit eadem, erunt actiones in ratione composita longitudinum et velocitatum (per prop. 10 hic); ergo etiam ut tempora (ex hyp.). Sed tempora sunt in ratione di-

recta longitudinum et reciproca velocitatum (per prop. 9 cap. 4 sect. 2). Ergo aequalis est ratio velocitatum directa et reciproca, adeoque velocitates sunt aequales; itaque longitudines sunt ut tempora.

Propositio 14.

Si actiones sint aequales, effectus sunt reciproce ut velocitates, et vicissim.

Nam actiones sunt in ratione composita effectuum et velocitatum (per prop. 10 hic), unde constat propositum per Elementa.

Propositio 15.

Si velocitates sint aequales, tunc effectus (pariterque actiones) sunt in ratione composita quantitatum materiae et temporum motibus impensorum, et vicissim.

Nam si velocitates sint aequales, actiones (vel effectus) sunt in ratione quantitatum materiae et longitudinum (per prop. 3 hic); sed longitudines sunt ut tempora in casu velocitatum aequalium (per prop. 5 cap. 4 sect. 2, adde ibid. prop. 6).

Vicissim si effectus sint in ratione composita quantitatum materiae et temporum (ex hyp.), ideo quia effectus sunt in ratione quantitatum materiae et longitudinum, erunt longitudines ut tempora. Sed tunc (per dictam prop. 5) aequales sunt velocitates.

Propositio 16.

Effectus motuum formales sunt in ratione composita mobilium, velocitatum et temporum motus.

Nam effectus sunt in ratione composita mobilium et longitudinum (per prop. 3 hic), et longitudines sunt in ratione composita velocitatum et temporum (per prop 6 vel 7 cap. 4 sect. 2).

Propositio 17.

Actiones motuum formales sunt in ratione composita ex rationibus mobilium et temporum simplice et velocitatum agendi duplicata.

Sunt enim actiones in ratione composita velocitatum et effectuum (per prop. 10 hic), et effectus sunt in ratione composita velocitatum, temporum et mobilium (per prop. 16 praeced.). Ergo

actiones sunt in ratione composita ex duplicata velocitatum simpliceque temporum et mobilium.

Propositio 18.

Si aequales sint materiae quantitates, et tempora actionum aequalia, actiones motuum formales erunt in duplicata ratione velocitatum vel longitudinum motus.

Nam longitudines sunt in ratione composita temporum et velocitatum (per prop. 6 vel 7 cap. 4 sect. 2). Ergo si tempora sint aequalia, velocitates sunt ut longitudines. Rursus quia mobilia sunt in ratione composita mobilium et temporum et duplicata velocitatum (per prop. 17 praeced.), et mobilia et tempora sunt aequalia (ex hyp.), actiones sunt in duplicata velocitatum, id est hoc loco longitudinum.

Itaque actio transferendi unam libram intra minutum per pedes duos (tres) quadrupla (noncupla) est actionis transferendi unam libram intra minutum per pedem unum. De quo pluribus ad prop. 4 cap. de Potentia.

Propositio 19.

Si aequales sint quantitates materiae mobilium, actiones formales motuum sunt in ratione composita longitudinum motus et velocitatum.

Nam generaliter actiones formales sunt in ratione composita quantitatum materiae, longitudinum et velocitatum (per prop. 10); Ergo si quantitates materiae aequales, erunt in ratione composita longitudinum et velocitatum.

Propositio 20.

Si aequales sint materiae mobilium quantitates, actiones formales motuum sunt in ratione composita ex duplicata longitudinum motus directa et simplice temporum reciproca.

Sunt enim actiones aequalium mobilium in ratione composita longitudinum et velocitatum (per prop. 19), et velocitates sunt in ratione composita ex directa longitudinum et reciproca temporum (per prop. 8 c. 4 sect. 2); ergo actiones sunt in ratione composita ex duplicata directa longitudinum et simplice reciproca temporum.

Scholium.

In propositione 4 dictum est, si eadem longitudo percurratur celeritatibus quatuor sequentibus, et ex iis sit BC ad EG ut LM ad NQ; etiam actionem BC fore ad actionem EG, ut actio LM ad actionem NQ. Hinc prop. 7 collegi, longitudine percursa posita eadem, actiones esse in ratione velocitatum vel simplice vel multiplicata vel submultiplicata; porro excludi multiplicationem vel submultiplicationem, cum nulla sit causa ad rationum compositionem, ac proinde, longitudine posita eadem, actiones fore ut velocitates. Unde postremo colligitur prop. 18, si aequalia sint tempora, actiones fore in duplicata ratione longitudinum vel celeritatum. Sed dicet aliquis, hoc argumentum posse in contrarium verti, nam si in prop. 4 posuissemus non eandem longitudinem, sed idem tempus, non ideo minus videtur potuisse concludi temporibus positis aequalibus actiones fore ut celeritates. Nam poterit dici pari jure, si celeritas BC sit ad celeritatem EG ut celeritas LM ad celeritatem NQ, etiam actionem BC fore ad actionem EF, ut actio LM ad actionem NQ. Et hoc verum esse concedo, cum enim mea sententia hoc casu actiones sint ut quadrata celeritatum sitque cel. BC ad cel. EG ut cel. LM ad cel. NQ, erit etiam quadrat. cel. BC ad quadrat. cel. EG ut quad. cel. LM ad quadrat. cel. NQ. Sed actiones itidem sunt ut haec quadrata. Si hinc jam porro inferas ad prioris argumentationis modum, ergo tempore posito eodem actiones sunt in velocitatum ratione vel simplice vel multiplicata aut submultiplicata, ne hoc quidem abnuo. Hactenus ergo omnia consentiunt; sed in hoc tantum divergium est, quod longitudine posita eadem, nulla habet locum compositio rationum, adeoque actiones erunt ut velocitates, seu reciproce ut tempora; at tempore posito eodem, habet locum rationum compositio, adeoque non licet dicere iisdem positis temporibus actiones fore ut celeritates. Locum autem hic habere compositionem sic ostendo. Sint tres actiones, A facere duplum tempore simplo, B facere duplum tempore duplo, et denique C facere simplum tempore simplo; ratio A ad C, quae est actionum diversis celeritatibus tempore eodem, composita est ex ratione A ad B, quae est actionum diversis celeritatibus longitudine eadem, et B ad C, quae est duplae actionis ad simplam. Unde jam patet, A ad C rationem habere dupla majorem, quod separatim demonstrari merebatur peculiari propositione; quemadmodum et praemittendum erat quod de ratione B ad C dixi-

mus. Sed inter rationem A ad B nulla simplicior ratio interponi potest; itaque nihil aliud dici potest, quam iisdem temporibus actiones esse celeritatibus vel longitudinibus proportionales, seu cum tempora aequalia sunt, actiones esse effectibus continuis mensurandas.

Est et hoc argumentum a priore diversum. Actionum aestimatio composita est ex aestimatione effectuum seu longitudinum et velocitatum; sed longitudines sunt in ratione composita temporum et velocitatum; ergo actiones sunt in consideratione composita ex simplice temporum et duplicata velocitatum. Ergo si tempora sint aequalia, actiones sunt in consideratione duplicata velocitatum; sed haec consideratio duplicata non alia erit quam ratio duplicata. Quod de multiplicata vel submultiplicata ratione collegimus, etiam ex eo patet, quod nulla assumi potest constans, qua opus foret ad relationem alterius naturae.

Caput II.

De Potentia motrice absoluta demonstrata a priori.

Definitio. Potentia absoluta ejus quod movetur est affectus ejus, proportionalis quantitati actionis ex motum habentis statu per se consequentis intra certum tempus, seu quantitati actionis formalis, quam exerceret mobile, si motum per datae magnitudinis tempus uniformiter continuaret. Itaque aequalibus existentibus agendi temporibus, et actionibus formalibus positis uniformibus, potentiae motrices absolutae sunt ut actiones formales.

Ponamus (fig. 95) A in motu esse positum, et in loco ${}_1A$ ita esse affectum, ut continuato uniformiter motu, tempore T absoluturum sit longitudinem ${}_1A_2A$; similiterque B eodem (vel aequali) tempore longitudinem ${}_1B_2B$. Itaque potentiam mobilis A in loco ${}_1A$ existentis ajo esse ad potentiam mobilis B in loco ${}_1B$ existentis, ut actio formalis motus ${}_1A_2A$ ad actionem formalem motus ${}_1B_2B$, seu potentias absolutas motuum aestimo quantitatibus actionum, quae per se ex agentium statu consequuntur. Et potentiae absolutae mobilium in motu existentium perinde erunt ut actiones uniformes transferendi mobilia ipsa per aliquas longitudines intra datum tempus, ita ut revera nihil aliud sit actionem esse uniformem, quam

potentiam in tempus ductam esse seu potentiam per tempus fluere vel exerceri. Et quod in potentia momentaneum est (quae enim moventur, quovis momento habent potentiam), id in actione per se consequente ex statu potentiae seu ex statu momentaneo est successivum seu continuatum: unde infra prop. 7 ostendemus, actiones esse in ratione composita temporum et potentiarum seu ut rectangula sub temporibus et potentiis. Distinguo autem potentiam mobilis absolutam, in corpore per se consideratam, a respectiva, qua aliud percutit, de qua suo loco.

Propositio 1.

Si duo mobilia eandem habeant materiae quantitatem eandemque velocitatem, erunt potentiae ipsorum aequales.

Sint (fig. 96) mobilia aequalia A et B, et velocitates eorum aequales; ajo et potentias eorum esse aequales. Nam ob velocitates aequales continuato uniformiter motu aequali, aequales describent longitudines (per defin. 2 cap. 4 sect. 2), itaque actiones erunt aequales (per def. 3 cap. 1 sect. 3); ergo et potentiae (per defin. praeced. hic).

Propositio 2.

Si duorum mobilium velocitates sint aequales, erunt potentiae eorum motrices absolutae in proportione ipsorum mobilium.

Sint (fig. 97) mobilium ABC (librarum duarum) et LMNP (librarum trium) velocitates aequales, dico esse potentiam ipsius AB ad potentiam ipsius LMN ut mobile AB ad mobile LMN (seu ut 2 ad 3). Si AB et LM sint commensurabiles, sumatur eorum mensura communis F. Jam cum quaelibet pars ipsius ABC vel LMNP aequalis ipsi F, velut AB vel LM, aequalis sit, et praeterea aequali moveatur velocitate (subintelligimus enim semper motum esse aequidistributum, ubi per prop. 6 cap. 4 sect. 2 velocitates eorum, quae mobili eidem insunt, sunt aequales), erunt eorum potentiae aequales (per prop. 1 hic), verbi gr. potentia ipsius AB aequalis est potentiae ipsius LM. Ergo toties aequalis potentia inest mobili cuique, quoties mensura mobilium communis (ut potentia transferendi unam libram velut AB per unum pedem $_1A_1B$ minuto temporis T, inest mobili ABC bis, et mobili LMNP ter). Potentia autem totius componitur ex potentiis partium. Itaque potentia tota mobi-

lis ABC est ad potentiam totam mobilis LMNP ut numeri repetitionum mensurae communis (2 ad 3), id est, ut ipsa mobilia ABC, LMNP. Quod si mobilia sint incommensurabilia, sufficit pro iis assumi commensurabilia tam parum ab ipsis differentia, ut error sit minor errore quovis dato, adeoque error erit nullus. Eadem propositio sic brevius ostenditur, quia duo mobilia ABC et LMNP aequali velocitate praedita sunt, aequali tempore easdem motu uniformi describent longitudines (per def. 2 cap. 4 sect. 2). Itaque tunc actiones eorum sunt ut mobilia (per prop. 1 cap. 1 sect. 3), et proinde (per defin. hic praeced.) potentiae erunt ut mobilia.

Nimirum potentia transferendi duas libras per unum pedem intra unum minutum dupla est potentiae transferendi unam libram per unum pedem intra unum minutum. Bis enim continet potentiam transferendi unam libram per unum pedem intra unum minutum. Quemadmodum et actio transferendi duas libras per unum pedem intra unum minutum dupla est actionis transferendi unam libram per pedem unum intra unum minutum (per prop. 2 cap. 1 sect. 3).

Propositio 3.

Aequales potentiae possunt movere aequales materiae quantitates per longitudines diversas, modo longitudines motuum sint temporibus proportionales.

Nam (fig. 98) si duo mobilia A et B sint ejusdem velocitatis, et A tempore T transferatur per longitudinem $_{1}A_{2}A$, et B tempore E per longitudinem $_{1}B_{2}B$, erunt longitudines temporibus proportionales, seu $_{1}A_{2}A$ ad $_{1}B_{2}B$ ut T ad E (per prop. 5 cap. 4 sect. 2). Jam mobilia sunt aequalia (ex hypoth.) et mobilia aequalia ejusdem velocitatis sunt aequalis potentiae (per prop. 1 hic). Ergo aequales potentiae possunt eandem materiae quantitatem transferre per longitudines diversas diversis temporibus, quae sint longitudinibus proportionalia.

Idem sequitur ex prop. 1 de action., item ex prop. 13. Nam cum in praesenti casu actiones sint ut tempora per dictam prop. 13, ergo aequalibus temporibus erunt aequales actiones, itaque (per def. potentiae praeced.) erunt aequales potentiae.

Nimirum ejusdem potentiae est transferre unam

libram per unum pedem intra unum minutum et transferre unam libram per duos pedes intra duo minuta. Ex priore enim posterius sponte consequitur, continuato motu et utrobique aequali tempore sumto actio est aequalis, ideoque et potentia.

Propositio 4.

Si mobilia aequalem contineant materiae quantitatem, potentiae motrices absolutae sunt in ratione duplicata velocitatum seu ut velocitatum quadrata.

Nam potentiae motrices absolutae sunt ut actiones formales motuum uniformiter exercitae intra tempora aequalia (per def. 1 hic), et mobilia sunt aequalia (ex hyp.). Aequalibus autem existentibus mobilibus et temporibus actiones formales sunt in duplicata ratione velocitatum (per prop. 18 cap. praeced.). Sed altius ordiendo idem sic conficiemus. Sint (fig. 99) aequalia mobilia A et B, et velocitates eorum sint graduum C(1) et D(2); ajo esse potentiam ipsius A ad potentiam ipsius B, ut quadratum ipsius C (seu ut 1) ad quadratum ipsius D (seu 4). Ponamus mobile A tempore TE motu uniformi transferri per longitudinem ${}_1A_2A$, et mobile B tempore aequali TE transferri motu uniformi per longitudinem ${}_1B_2B_3B$, erunt longitudines ut velocitates (per prop. 4 cap. 4 sect. 2) seu ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B_3B$ ut C(1) ad D(2). Assumatur longitudinis ${}_1B_2B_3B$ pars ${}_1B_2B$ (percursa parte temporis TM) et ob motum uniformem (ex hyp.) eadem, qua tota longitudo, velocitate. Jam ob mobilia A et B aequalia et aequales longitudines ${}_1A_2A$ et ${}_1B_2B$ erit actio transferendi uniformiter mobile A per longitudinem ${}_1A_2A$ ad actionem transferendi aequale mobile B per aequalem longitudinem ${}_1B_2B$ ut eorum velocitates, seu ut velocitas C(1) ad velocitatem D(2) (per prop. 7 cap. praec.) id est, ut longitudo ${}_1A_2A$ ad longitudinem ${}_1B_2B_3B$; rursus actio tranferendi B per longitudinem ${}_1B_2B$ est ad actionem transferendi idem per longitudinem ${}_1B_2B_3B$, eadem (ob motum uniformem) velocitate D, ut longitudo ${}_1B_2B$ id est ${}_1A_2A$ ad longitudinem ${}_1B_2B_3B$ (per prop. 1 cap. praec.). Itaque jungendo prima postremis, actio transferendi mobile A per longitudinem ${}_1A_2A$ est ad actionem transferendi mobile aequale B per longitudinem ${}_1B_2B_3B$ tempore aequali, in duplicata ratione longitudinum ${}_1A_2A$ ad ${}_1B_2B_3B$. Sed ob aequalia tempora longitudines sunt ut velocitates, ut ostensum est. Itaque

actiones sunt in duplicata ratione velocitatum. Sed si aequalia sint tempora et actiones sint uniformes, utique potentiae sunt ut actiones (per defin. potentiae hic). Sunt ergo potentiae aequalium mobilium in duplicata ratione velocitatum seu ut velocitatum quadrata.

Haec est propositio, quae etsi ex principiis manifestissimis facili consequentia nascatur, nescio quomodo tamen hactenus accuratam indagantium perspicaciam effugit. Placet autem cum probatione sua eandem familiarius proponere ad omnium captum hoc modo.

In actionibus uniformibus (ubi quodvis punctum mobilis aequalibus temporibus aequales percurrit longitudines) et aequidistributis (ubi longitudines a quibuslibet mobilis punctis simul descriptae sunt aequales) actio (L) transferendi unam libram intra unum minutum per longitudinem veluti trium pedum tripla est actionis transferendi unam libram triplo tempore seu intra tria minuta per eandem longitudinem, nempe trium pedum. Quod demonstravimus prop. 7 cap. praec. assumto axiomate, quod major actio sit idem efficere minore tempore; quamquam haec ipsa conclusio pro axiomate assumi possit, duplum (vel triplum) esse idem efficere dimidio tempore (aut tertia ejus parte) adeoque triplam esse actionem transferendi idem pondus per eandem longitudinem intra temporis trientem.

Rursus actio (M) transferendi unam libram triplo tempore seu tribus minutis per longitudinem triplam seu per tres pedes tripla est actionis (N) transferendi unam libram simplo tempore seu uno minuto per longitudinem simplam unius pedis. Hoc generalius demonstravimus prop. 13 cap. praec. Sed idem per se ita manifestum redditur: Actio (M) transferendi unam libram tribus minutis per tres pedes ter continet actionem (N) transferendi unam libram uno minuto per unum pedem. Nam qui transfert tribus minutis per tres pedes (in motu scilicet uniformi et aequidistributo, ut subintelligimus), is primo minuto transfert per unum pedem, et secundo rursus, et tertio tertia vice; actio autem, quae aliam actionem ter praecise repetit, utique ejus tripla est. Nam totum, triplum est partis, qua ter repetita totum componitur.

Igitur actio (L) transferendi unam libram intra unum minutum per longitudinem triplam seu trium pedum noncupla est actionis (N) transferendi unam libram uno minuto per longitudinem simplam seu unius pedis. Cum enim actio L sit tripla ipsius M, et actio M sit tripla ipsius N, erit actio L noncupla ipsius N.

Porro Potentiae transferendi sunt ut actiones transferendi uniformes intra aequale tempus exercitae, seu potentia libram transferendi uniformiter (seu constanti velocitate) intra minutum per longitudinem unam est ad potentiam transferendi uniformiter libram intra minutum per longitudinem aliam, ut ipsa actio transferendi prior ad posteriorem, per positam defin. potentiae, quam actione ex ipsa per se consequente (adeoque uniformi) intra datae magnitudinis tempus exercenda aestimamus. Nempe in potentia momentaneum est, quod in actione succedente per tempus uniformiter est diffusum.

Itaque potentia transferendi unam libram intra unum minutum per longitudinem trium pedum est noncupla potentiae transferendi unam libram intra minutum per unum pedem, seu potentiae absolutae mobilium aequalium sunt ut quadrata longitudinum translationis intra aequalia tempora absolvendarum. Nam per articulum praeced. sunt potentiae dictae ut actio L ad actionem N, actionem autem L actionis N noncuplam esse ostensum est.

Jam (in motibus uniformibus et aequidistributis) velocitates sunt ut longitudines translationum aequalibus temporibus absolvendae, seu velocitas mobile intra minutum transferendi per tres pedes tripla est velocitatis intra minutum transferendi mobile per unum pedem, ut manifestum est et demonstravimus prop. 4 cap. 4 sect. 2.

Itaque tandem potentiae absolutae mobilium aequalium sunt ut quadrata velocitatum, seu duplicata (triplicata) velocitate mobilis, potentia fit quadrupla (noncupla). Et eleganter evenit, ut velocitatibus per rectas repraesentatis, potentiae corporis per rectarum potentias (quas vaticinio quodam sic appellarunt Geometrae) exprimantur.

365.

Propositio 5.

Potentiae motrices absolutae sunt in ratione composita ex simplice mobilium et duplicata velocitatum, vel ex simplice mobilium et duplicata longitudinum, per quas mobilia ex virtute potentiarum suarum intra tempus datum uniformiter sese essent translatura.

Sint (fig. 100) mobilia ABC et LM earumque velocitates CD vel $_1C_2C$ et MN vel $_1M_2M$; ajo esse potentiam mobilis ABC ad potentiam mobilis LM in ratione composita mobilium ABC et LM et quadratarum velocitatum, seu esse potentias ut rectangula $_1A_1C_2C_1D$ et $_1L_1M_2M_1N$, quorum altitudines sint ut mobilia AC, LM, bases ut velocitatum quadrata. Nam si mobilia sint aequalia, utique potentiae sunt ut quadrata velocitatum, adeoque in ratione composita mobilium, hoc loco aequalium, et quadratarum velocitatum. Sin mobilia sint inaequalia, et alterutrum ABC majus, sumatur ipsius pars AB aequalis minori mobili LM: potentia ipsius ABC est ad potentiam ipsius AB ut mobilia, ABC ad AB (ob velocitatem communem per prop. 2 hic). Sed potentia ipsius AB est ad potentiam ipsius LM, mobilium aequalium, ut quadrata velocitatum CD et MN (per prop. 4 hic). Ergo jungendo prima postremis, potentia ipsius ABC erit ad potentiam ipsius LM in ratione composita mobilis ABC ad AB seu ad mobile LM et quadratarum velocitatum D_2C ad N_2M. Velocitates autem sunt ut longitudines aequalibus temporibus percurrendae (per prop. 4 c. 4 sect. 2); itaque etiam potentiae erunt in ratione composita mobilium simplice et harum longitudinum duplicata.

Nimirum potentia transferendi tres libras per duos pedes est duodecupla potentiae transferendi unam libram per unum pedem.

Propositio 6.

Si quadrata velocitatum vel longitudinum translationis aequalibus temporibus absolvendarum sint mobilibus reciproce proportionalia, potentiae motrices absolutae sunt aequales; et vicissim, si potentiae sint aequales, quadrata dicta sunt mobilibus reciproce proportionalia.

Retenta figura propositionis praeced. sit mobile AC ad mobile LM ut quadratum MNP ad quadratum DE; manifestum ergo

est (ex Elementis) factum ex extremis aequari facto ex mediis, seu rectangulum solidum ACE, potentiam mobilis AC, aequari rectangulo LMP, potentiae mobilis LM, unde et conversa manifesta est.

Nimirum ejusdum potentiae est motu uniformi (horizontali) aequali tempore transferre novem libras per unum pedem, et unam libram per tres pedes; sive corpus unius librae et velocitatis trium graduum tantundem habet potentiae, quantum corpus novem librarum velocitatem habens unius gradus.

Propositio 7.

Actiones sunt in ratione composita potentiarum a quibus exercentur, et temporum quibus durant; vel potentiae sunt in ratione composita ex actionum directa et temporum exercitae actionis reciproca.

Nam actiones sunt in ratione composita mobilium, duplicatarum velocitatum et temporum, prop. 17 cap. de Act. formal. Sed potentiae absolutae sunt in ratione mobilium et duplicatarum velocitatum (per prop. 5 hic). Ergo actiones sunt in ratione composita potentiarum et temporum.

Propositio 8.

Potentiis existentibus aequalibus actiones sunt ut tempora quibus exercentur.

Nam actiones sunt in ratione composita potentiarum et temporum per praecedentem. Jam potentiae sunt in ratione aequalitatis (ex. hyp.), ergo actiones sunt in ratione temporum.

Hinc quoniam infra ostendemus, eandem in mundo servari quantitatem potentiae, consequens est actionum in Universo (vel etiam in Machina quacunque cum aliis non communicante) exercitarum quantitates esse ut tempora, adeoque aequalibus temporibus aequalem esse actionum in Universo exercitarum quantitatem.

Admonitio 1.

Corpora consideramus ut in medio liberrimo translata et gravitate exuta, vel si gravitatem ipsis relinquamus, ut mota in horizonte. Ita ut motus sit uniformis, ubi ostendimus potentias esse ut quadrata translationum; sed in motu uniformiter accelerato vel retardato qualis gravium

est, potentiae ponderum aequalium sunt ut ipsae translationes perpendiculares horizonti, id est ut altitudines, quod ex hac ipsa aestimatione nostra consequitur. Altitudines enim sunt ut quadrata velocitatum, quarum vi corpora sese ad eas altitudines attollere possunt; et iisdem existentibus ponderibus seu corporum motibus, potentiae (ut ostendimus) sunt etiam ut quadrata velocitatum. Itaque si pondera sint inaequalia, sed reciproce ut altitudines, ita ut tanto majus sit pondus, quanto minor altitudo, potentiae attollendi sunt aequales. Quod cum pro concesso habeatur, hinc demonstrationes nostrae a posteriori confirmantur. Sed ita stare non potest, quod vulgo sibi persuadent potentias esse in ratione composita simplice velocitatum et mobilium. Ita enim fieri nequit (quemadmodum mox uberius ostendetur) ut ejusdem potentiae sit attollere grave unius librae ad altitudinem trium pedum, et attollere grave trium librarum ad altitudinem unius pedis, quod tamen merito omnes agnoscunt.

Admonitio 2.

Propositiones praecedentes circa actionem et potentiam intelliguntur de motibus uniformibus et aequidistributis, sed tamen et aliis accommodari possunt.

Nam cum mobile non movetur motu aequidistributo, sed diversae ejus partes diversas habent velocitates, attribui ipsi toti potest communis quaedam velocitas media, quam obtinere licet ope centri gravitatis totius. Et cum mobile per aliquod tempus non movetur motu uniformi, attribui ipsi potest velocitas constans mediae potentiae inter velocitates mobili toto tempore competentes. Ita motum aequidistributum totius mobilis et uniformem totius temporis habebimus, motibus partium propositis ipsa magnitudine actionum et potentiarum in summa aequivalentem.

SECTIO QUARTA.
DE VELOCITATE DIFFORMI.

Caput I.
De Tractu seu spatio per motum absoluto.

Definitio I. Tractus ipsius mobilis vel spatium absolutum sive percursum, est factum ex viis singulorum mobilis punctorum simul descriptis, in mobile ordinatim ductis.

Ut si mobilis cujusque punctum ponatur gravitatem specificam accipere proportionalem viae, pondus totius mobilis erit ut summa omnium viarum in mobile ordinatim ductarum, hoc est, ut spatium percursum seu tractus. Ita si (fig. 101) recta AB angulo ad ${}_1B_2B$ recto moveatur ex ${}_1A_1B$ in ${}_2A_2B$, spatium motu dimensum seu tractus est rectangulum ${}_1A_2B$; et idem hoc loco est spatium motu designatum seu vestigium motus. Sed si rectangulum planum ABCD intra rectas ${}_1A_1D$, ${}_1B_1C$ continuatas motum transferatur ex ${}_1A_1B_1C_1D$ in ${}_2A_2B_2C_2D$, vestigium motus seu via simplex est rectangulum planum ${}_1A_2C$; via autem plena seu tractus est factum ex rectangulo ABCD ducto in rectam ${}_1A_2A$ aequalem lineae motus seu viae vel tractus cujusque puncti (in punctis enim coincidunt semper via et tractus), hoc est ut rectangulum solidum ACE (fig. 102) cujus basis est rectangulum planum ABCD, altitudo vero AE aequalis ipsi ${}_1A_2A$, vel etiam parallelepipedum; nam ad tractus quantitatem aestimandam nihil interest, quo angulo applicetur via puncti ad mobile; modo enim in omnibus tractibus inter se comparandis idem observetur angulus, eadem manet proportio; praestat tamen constanter uti angulo recto. Quodsi diversa mobilis puncta diversae magnitudinis lineas describunt, etiam tractus inveniri possunt; ut si (fig. 103) radius LM agatur circa centrum L, nec plus una circulatione absolvat, tractus erit ut ipse sector descriptus LMN, qui simul est via radii LM. Sed si recta AB in radio moto peculiariter moveatur recedens a centro, ita ut dum transit ab ${}_1A_1B$ in ${}_1\alpha_1\beta$, simul hinc transeat in ${}_2A_2B$, via est quadrilineum ${}_1A_1B_2B_3B_2A_2A_1A$. Sed tractus seu summa viarum omnium punctorum, huic viae non est proportionalis. Quatenus autem motus fit in parallelis, vel saltem quatenus motus in paral-

lelis assumtis, utcunque in motus propositi compositionem ingredi intelligitur (ut suo loco patebit), habetur tractus, dum via centri gravitatis ipsius voluminis seu figurae ducitur in mobilis volumen sive extensionem (si modo puncta diversa non eant in contrarias partes). Sed hoc quod ad viam mobilis metiendam non sufficit, nisi cum coincidit cum tractu, quod fit cum lineae a punctis mobilis descriptae eundem semper faciunt angulum ad curvam, nec una mobilis pars in locum alterius statim succedit. Porro si sphaera rotetur uniformi vertigine (si placet) circa suum axem immotum, tractus sphaerae erit ut pondus sphaerae, quod fieret, si quodlibet ejus punctum gravitatem specificam acciperet viae a se percursae proportionalem; unde si duae sphaerae sic rotentur, erunt earum tractus inter se in ratione composita ex quadruplicata diametrorum simplicibusque vertiginum et temporum. **Vertiginem** autem metior quantitate anguli descripti, si circulandi velocitas eadem dato tempore continuaretur. Ex his intelligimus, quantum intersit inter tractum (seu spatium absolutum) et viam, etsi aliquando tractus sint ut viae.

Propositio 1.

Si mobilis gravitas specifica in quovis puncto sit ut via ejusdem puncti, tunc spatium a mobili absolutum erit ponderi proportionale.

Nam tractus seu spatium absolutum fit ex viis punctorum in mobile ordinatim ductis (per defin. hic). Sed ductus sunt ut pondera mobilium; si ordinatim ductae sint ut gravitates specificae, recipientia vero ductum ut mobilia (per prop. 1 cap. de ductibus).

Propositio 2.

Si mobile sit punctum, tractum seu spatium motu absolutum est ipsa puncti via.

Sequitur ex definitione, nam singula puncta ad unicum reducuntur, et viae ad unicam, scilicet ipsam hujus puncti lineam.

Propositio 3.

Si mobile sit linea, spatium motu absolutum est ut area superficiei factae per rectas viae cujusque puncti proportionales, ipsi lineae in rectum extensae eodem angulo recto in puncto respondente insistentes.

Cum enim tractus sit ductus factus ex lineis a puncto descriptis in mobile ordinatim ductis (per defin. hic) et ductus sint proportionales figuris isogoniis proportionaliter formatis (per prop. 6 et 7 cap. de ductibus), habetur propositum.

Sit (fig. 104) linea mobilis ABC, cujus extrema A et C describant lineas ${}_1A{}_2A{}_3A$ et ${}_1C{}_2C{}_3C$, et punctum quodvis ut B describat lineam ${}_1B{}_2B{}_3B$, fiat figura orthogonia comprehensa recta ${}_3A{}_3B{}_3C$ et rectis ad hanc normalibus ${}_3ADG$, ${}_3CFK$ et linea GHK, sic ut ordinata quaevis normalis ipsi ${}_3A{}_3B{}_3C$ sit ${}_3BEH$, et viis punctorum ${}_1A{}_2A$, ${}_1B{}_2B$, ${}_1C{}_2C$, itemque ${}_1A{}_2A{}_3A$, ${}_1B{}_2B{}_3B$, ${}_1C{}_2C{}_3C$ sint respective proportionales ordinatae ${}_2AD$, ${}_2BE$, ${}_2CF$, itemque ${}_3ADG$, ${}_3BEH$, ${}_3CFK$; et idem fiat respectu alterius mobilis LMN pro punctis D, G, E, H, F, K substituendo P, S, Q, T, R, V; ajo tractus seu spatia absoluta fore figuris orthogoniis respondentibus proportionalia. Sic tractus ab ${}_1A{}_1B$ in ${}_2A{}_2B$ est ad tractum ab ${}_1A{}_1C$ in ${}_3A{}_3C$, ut figura ${}_3ADE{}_3B$ ad ${}_3AGK{}_3C$; et tractus ab ${}_1A{}_1C$ in ${}_2A{}_2C$ ad tractum ab ${}_1L{}_1N$ in ${}_2L{}_2N$, ut figura ${}_2ADF{}_2C$ ad ${}_2LPR{}_2N$; et tractus ab ${}_1A{}_1C$ in ${}_3A{}_3C$ ad tractum ab ${}_1L{}_1N$ in ${}_3L{}_3N$, ut figura ${}_3AGK{}_3C$ ad figuram ${}_3LSV{}_3N$. Pro orthogoniis substitui possunt figurae isogoniae quaevis, modo in omnibus ordinatim applicatis semper idem angulus servetur. Nec refert, linea curva durante motu in rectam extendatur, an sit rigida, modo in rectam extendi deinde fingatur.

Propositio 4.

Si mobile sit superficies, spatium motu absolutum est area solidi facti per rectas superficiei in planum extensae ad angulos rectos insistentes in punctis respondentibus, et ipsis lineis a puncto quovis mobilis descriptis proportionales.

Patet ad eum modum, quo praecedens.

Propositio 5.

Omnis superficies mota constituitur ex infinitis lineis, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo; et omne corpus motum constituitur ex infinitis superficiebus, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo.

Constitui dico, non componi. Sequitur ex demonstratione prop. 12 de ductibus.

Sic si (fig. 105) cylinder L moveatur circa centrum C, constituitur ex infinitis superficiebus cylindricis concentricis ut L, M, N, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo, ita nempe ut ejus puncta simul aequales percurrant rectas. Manifestumque est ab ipsis omnia solidi puncta absumi praeterquam cadentia in axem, quae nihil solido homogeneum constituunt.

Propositio 6. Problema 1.

Exhibere figuram planam proportionalem tractui mobilis solidi.

Quoniam solidum constituitur ex infinitis superficiebus, quarum quaevis movetur motu aequaliter distributo (per praeced.), dividi per eas intelligatur in sua elementa solida. Inde ducatur linea quaecunque omnes superficies secans, et hujus in rectum extensae punctis respondentibus, inter superficies interceptis, ordinatim applicetur in plano recta, quae sit in ratione composita ex directis rectae ab uno superficiei puncto descriptae ipsiusque elementi solidi et in ratione reciproca elementi lineae, inter superficies duas proximas intercepti; et tunc figura isogonia producta erit spatio a mobili absoluto proportionalis.

Constructio haec est casus soluti problematis generalis de ductibus prop. 12. Ut si (fig. 106) superficies motum aequaliter distributum habentes, in quas resolvitur solidum motum, sint L, M, N et eas secet linea LMNC, quae extendatur in rectam $\lambda\mu\nu\varkappa$, et huic in punctis λ, μ, ν applicentur normales λE, μF, νG, sintque inter se duae quaecunque exempli gratia $\lambda\varepsilon$ ad μF in ratione composita modo dicto seu ita ut rectangulum elementare E$\lambda\mu$ ad aliud F$\mu\nu$ sit in ratione composita elementi solidi LMA ad elementum solidum MNB et rectae P ad Q, id est lineae a puncto L descriptae, ad lineam a puncto M simul descriptam; erit figura λEF$\varkappa$ proportionalis tractui ipsius solidi, sive cum alterius solidi tractu eadem proportione repraesentato comparetur, sive partibus tractus ejusdem solidi, ita ut verbi gratia tractus partis solidi LN sit ad tractum totius solidi LC ut figura λEGν ad figuram λEG$\varkappa$.

Propositio 7.

Spatium absolutum motu aequaliter distributo est factum ex ductu mobilis in lineam ab aliquo mobilis puncto descriptam, sive est in ratione composita mobilis et lineae a puncto mobilis descriptae.

Sit (fig. 107) mobile AB, cujus punctum ut A describit rectam ${}_1A{}_2A$ aequalem rectae ${}_1B{}_2B$, quam simul describit quodvis aliud punctum B; idemque intelligatur in mobili LM; ajo esse tractum ipsius AB ad tractum ipsius LM in ratione composita AB ad LM et ${}_1A{}_2A$ ad ${}_1L{}_2L$. Patet ex prop. 3 de ductibus, cum tractus sit factus ex ductu mobilis in lineas a punctis suis descriptas ordinatim applicatas, quae hoc loco sunt aequales; idem est ergo ac si fit tractus ex mobili in rectam constantem.

Propositio 8.

Tractus rectarum circa extrema immota circulos describentium sunt in duplicata ratione rectarum seu diametrorum.

Sint (fig. 108) rectae CL, CM; ajo tractum C_1L_2LC esse ad tractum C_1M_2MC, ut quadratum CL ad quadratum CM. Sunt enim per praecedentem, ut rectangulum sub CL in ${}_1L_2L$ ad rectangulum sub CM in ${}_1M_2M$; est autem ${}_1L_2L$ ad ${}_1M_2M$, ut CL ad CM; ergo sunt ut quadrata CL ad CM.

Propositio 9.

Circulorum (aut cylindrorum ejusdem altitudinis) horumve sectorum circa suos axes revolutionem absolventium aut eosdem angulos efficientium tractus sunt in triplicata ratione diametrorum (intelligo autem rigidos esse, seu ad instar rigidorum motos).

Sit (fig. praeced.) circulus aut cylinder AL circa axem C revolutionem ${}_1L_2L_3L_1L$ absolvens, et alius BM (cylinder ejusdem altitudinis cum ipso AL) circa axem C; ajo esse tractum ipsius AL, ad tractum ipsius BM, ut cubus AL ad cubum BM. Nam punctis M, L rectae CL (radii circuli) applicentur normales MN, LP, ita ut sit MN ad LP in ratione composita circumferentiae ${}_1M_2M_3M$ ad circumferentiam ${}_1L_2L_3L$, itemque spatii, quod describit M, ad spatium, quod L, id est iterum circumferentiae ad circumferentiam, id est in ratione duplicata circumferentiarum seu diametrorum, erit figura LPNC proportionalis tractui, per constructionem problematis in prop. 6. Sed trilineum parabolicum MNC (cujus vertex C et tangens verticis MC) est ad trilineum parabolicum LPC in triplicata ratione CM ad CL. Ergo tractus circuli BM est ad

tractum circuli AL (idemque est in cylindris aequealtis), ut cubus diametri BM ad cubum diametri AL.

Propositio 10.

Tractus sphaerarum rigidarum eosdem revolutionis angulos (vel integram revolutionem) absolventium sunt in quadruplicata ratione diametrorum.

Demonstratur eodem modo, cum sphaera resolvatur in superficies concentricas motus aequaliter distributi, quae sunt in duplicata ratione diametrorum, et tractus earum in triplicata diametrorum, et adeo summae tractuum seu tractus integer sphaerae in quadruplicata.

Definitio 2. Longitudo percursa vel spatii absoluti seu longitudo tractus est longitudo lineae, quae ducta in volumen mobilis dat tractum. Itaque spatia percursa sunt in ratione composita voluminum mobilis et longitudinum percursarum.

Itaque si mobile sit linea vel superficies, repraesentabitur tractus per rectangulum, cujus altitudo sit ipsa longitudo tractus, basis sit linea vel superficies mobilis in rectam vel planam extensa. Quodsi mobile sit solidum, poterit ei exhiberi planum proportionale, quod in longitudinem percursam ductam repraesentet tractum.

Propositio 11.

Longitudo tractus in motu uniformiter distributo est longitudo lineae a quocunque puncto descriptae.

Nam cujusvis puncti linea in mobile ducta dat tractum (per prop. 8), ergo ejus longitudo est longitudo tractus per defin. 2.

Gravitas specifica unius puncti eadem est, quae gravis ubique eandem gravitatem specificam habentis. Est scilicet longitudo tractus id ipsum, quod in cap. de motu aequidistributo et ejus velocitate appellavimus longitudinem motus, et utrobique longitudinem percursam.

Propositio 12.

Longitudo tractus in motu dato quocunque est longitudo viae a puncto quovis ejusdem vel aequalis mobilis dato motu aequaliter distributo aequalem tractum faciente moti.

Nam longitudo viae puncti in motu uniformiter distributo est

longitudo tractus mobilis (per prop. 11). Jam tractus iste est aequalis dato (ex hypothesi), et positis tractibus aequalibus et mobilibus iisdem vel aequalibus, et longitudines tractuum sunt aequales (per defin. 2). Ut si grave varias in variis locis gravitates specificas habeat et quaeratur aliud grave ejusdem voluminis ejusdemque ponderis similare seu eandem ubique habens gravitatem specificam, ea erit ipsa gravitas (media) gravis propositi, respondens longitudini tractus seu spatii percursi.

Propositio 13. Problema 2.

Exhibere figuram planam mobili superficiei vel solido rigido positione dato proportionalem, et cujus pariterque partium ejus circa axem immotum gyratarum tractus sint ipsius mobilis aut partium ejus circa eundem axem gyratarum tractibus proportionales.

Transferatur huc figura et constructio ad prop. 16 de ductibus, sumaturque MN non ut illic praescribitur, sed proportionalis sectioni mobilis per superficiem cylindricam, et figura plana ANP erit quaesita, ut consideranti patet.

Propositio 14. Problema 3.

Exhibere figuram tractui mobilis circa axem immotum gyrati proportionalem.

Si figuram planam postulamus, tantum in praecedenti figura et constructione sumamus MN tales, ut sint in ratione composita sectionum et distantiarum superficiei ab axe, et figura ANP erit quaesita. Sin solida simus contenti, fiat cylinder rectus, cujus basis figura ANP constructa secundum problema praecedens, altitudo vero sit non minor maxima MN, et per axem EQ transeat planum, quod ad planum AQE angulum faciat semirectum, et ungula per C prius planum abscissa seu portio cylindri inter plana duo et superficiem cylindri comprehensa erit solidum quaesitum.

Propositio 15. Problema 4.

Motum rectilineum adeoque uniformiter distributum dati mobilis rigidi invenire, cujus tractus sit tractui ejusdem mobilis circa datum axem immotum gyrantis aequalis, seu invenire longitudinem hujus tractus.

Figurae ANP constructae secundum probl. 2 (seu propos. 16 de ductibus) insistat cylinder ungulae in probl. praeced. constructae aequalis; tum sumatur recta, quae sit ad altitudinem hujus cylindri, ut arcus ab aliquo mobilis puncto durante gyratione descriptus ad ejusdem distantiam ab axe; et mobile moveatur motu rectilineo, ita ut quodlibet ejus punctum rectam describat praedictae aequalem, is erit quaesitus; recta haec erit longitudo tractus per defin. 2.

Caput II.

De Velocitate in universum.

Definitio 1. Velocitas in motu quocunque est affectio mobilis, quae est proportionalis longitudini, quam percurreret, si motus per datae magnitudinis tempus hac eadem mobilis affectione retenta continuaretur. Eadem autem maneret, si aequalibus temporibus aequales percurreret longitudines, quo casu motus dicitur aequivelox.

Hactenus non egeramus nisi de velocitate motus aequidistributi, ubi omnia corporis puncta aequali velocitate moventur. Operae tamen pretium fuit notionem altius nunc attollere et generalius concipere velocitatem, ut cuicunque mobili attribui possit, etiamsi ejus puncta diversas habeant celeritates; nempe in casu similaris corporis, velocitas ipsius erit media arithmetica inter omnium punctorum velocitates, qua in mobile similare ducta idem prodit impetus, ac si singulorum punctorum celeritates mobili ordinatim assignavissemus. Et quidem, si omnia puncta tendant ad easdem partes, velocitas mobilis erit ipsa velocitas centri gravitatis, ut suo loco patebit distinctius infra. Quemadmodum autem supra dimensi sumus velocitatem aequidistributam per longitudinem motus aequivelocis, ita nunc metimur velocitatem quamvis per eandem longitudinem motus aequivelocis, sed elevatae (vel exaltatae) notionis ad motum etiam non aequidistributum, ut cap. de tractu est explicatum, seu longitudinem tractus, quaerendo scilicet pro longitudine percursa a mobili, longitudinem mediam arithmeticam inter omnium punctorum longitudines simul percursas. Quodsi haec ad exemplum applicemus, rectae verbi gr. in plano circa extremum immotum motae, aut semicir-

culi moti circa diametrum immotam, reperiemus velocitates duorum radiorum inter se, aut duorum semicirculorum inter se esse in ratione composita vertiginum et radiorum. **Vertigines** autem sunt ut velocitates punctorum a centro aequidistantium, seu ut anguli percursi motu uniformi intra aequale tempus.

Propositio 1.

Velocitates mobilium, quorum quodque constanti velocitate movetur, sunt inter se ut longitudines aequalibus temporibus percursae.

Sint mobilia A et B, quorum utrumque suam velocitatem servat, et A tempore T percurrat longitudinem L, at B tempore aequali ipsi T percurrat longitudinem M; ajo fore velocitatem in A ad velocitatem in B, ut L ad M.

Nam (per defin. praeced.) si velocitates suas retinerent, ipsae velocitates forent ut longitudines L et M; jam retinent eas (ex hypothesi), tales ergo erunt velocitates.

Propositio 2.

Coincidit velocitas motus aequidistributi secundum definitionem positam supra cap. de motu aequidistributo, et secundum definitionem velocitatis praesentem.

Nam longitudo percurrenda secundum defin. praesentem in casu motus aequidistributi est ut longitudo viae puncti alicujus in mobili sumti (per prop. 11 cap. de tractu), quae eodem modo in defin. superiore velocitatis motus aequidistributi adhibebatur, ut in proxima adhibetur longitudo percurrenda; neque aliud est definitionum discrimen.

Propositio 3.

Velocitas quaecunque aequalis est velocitati motus aequidistributi mobilis aequalis, eandem continuata per aequale tempus constanti velocitate aliquo sui puncto percursuri longitudinem, quam propositum continuata sua, adeoque etiam aequale percursuri spatium.

Sit (fig. 109) mobile AB motum etiam motu non-aequidistributo, et ponatur ejus velocitas talis in ${}_1A_1B$, ut (eadem velocitate manente) per tempus T sit motus ${}_1A_2B$, longitudo autem

motus hujus seu longitudo percursa (seu longitudo tractus explicata def. 2 cap. de tractu) sit linea ${}_1C_2C$; sit jam aliud aequale mobile vel idem ${}_2A_2B$ motum motu aequidistributo uniformi ${}_2A_2B$, a cujus puncto ${}_2C$ longitudo percursa per tempus aequale ipsi T sit ${}_2C_2C$: ajo velocitatem motus ${}_2A_2B$ esse velocitati mobilis AB in ${}_1A_1B$ existentis aequalem. Nam velocitas ipsius A_1B per ${}_1A_2B$ est ad velocitatem ipsius ${}_2A_2B$ per ${}_2A_2B$, ut longitudines aequalibus temporibus percurrendae velocitatibus aequalibus continuatis (per defin. praeced. velocitatis). Sed longitudo ab ${}_1A_1B$ percurrenda eadem velocitate intra tempus T est ${}_1C_2C$ (ex hyp.) et ${}_2C_2C$ est longitudo percursa a puncto ${}_2C$ mobilis ${}_2A_2B$ aequivelociter et aequidistribute moti (etiam ex hypothesi) et longitudo lineae a puncto mobilis aequidistribute moti descriptae est ipsa longitudo percursa (per prop. 11 cap. de tractu); erit ergo velocitas ${}_1A_1B$ ad velocitatem ${}_2A_2B$, ut ${}_1C_2C$ ad ${}_2C_2C$, quae cum sint aequales (ex hyp.), erunt etiam aequales velocitates. Idem est de spatiis, quod de longitudinibus, quia voluminibus aequalibus spatia percursa sunt ut longitudines (per def. 2 de tractu).

Si ponamus AB esse rectam, quae in plano eodem eadem velocitate servata gyretur circa centrum immotum E tempore T, erit tractus ejus seu spatium percursum hoc loco coincidens ipsi viae seu spatio generato sive per motum designato ${}_1A_2B$, parti scilicet sectoris ${}_1AE_2E$ contenti rectis ${}_1A_1B, {}_2A_2B$ et circulis ${}_1A_2A$, ${}_1B_2B$, quia lineae a punctis descriptae seu arcus angulum semper faciunt rectum ad AB describentem. Hic tractus autem seu area hujus spatii aequatur rectangulo ${}_2A_3B$ vel ${}_3A_2B$, contento sub recta AB id est extensione mobilis AB et rectae ${}_2A_3A$, si modo ${}_2A_3A$ sit aequalis ipsi ${}_1C_2C$ arcui descripto a puncto rectae AB medio C, seu ejus centro gravitatis; itaque longitudo ista arcus ${}_1C_2C$, seu rectae ${}_2A_3A$, est longitudo spatii percursi (per defin. 2 cap. de tractu). Si jam ponatur eadem recta porro ex ${}_2A_2B$ progredi motu rectilineo, adeoque aequidistributo, et quidem uniformi, ita ut describat rectangulum ${}_1A_2B$, tractus seu spatium erit ipsum rectangulum, et longitudo ejus erit recta percursa ab aliquo ejus puncto A vel C, ut ${}_1A_2A$ vel ${}_1C_2C$ (per prop. 1 dicti cap. de tractu). Unde patet et tractus et longitudines esse aequales, quae tempore aequali mobile uniformiter percurrit, sive motu aequidistributo ${}_2A_2B$, sive diverso in diversis punctis ut ${}_1A_2B$ percurrat, atque adeo et velocitates horum duorum motuum dici aequales.

Propositio 4.

Spatia a mobilibus suam velocitatem retinentibus tempore aequali percursa sunt in ratione composita voluminum mobilis cujusque et velocitatum.

Sint (fig. 110) mobilia AB, LM, quae temporibus aequalibus ipsi T moveantur velocitatibus suis V et E retentis, et percurrant spatia ${}_1A_2B$, ${}_1L_2M$; ajo esse spatia ${}_1A_2B$ ad ${}_1L_2M$ in ratione composita voluminum AB ad LM et velocitatum V ad E. Sint longitudines percursae ${}_1C_2C$, ${}_1N_2N$; constat (per defin. 2 cap. de tractu) esse spatia ${}_1A_2B$ ad ${}_1L_2M$ in ratione composita voluminum AB ad LM et longitudinum percursarum ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_2N$. Sed longitudines percursae in motibus aequivelocibus aequalium temporum sunt ut velocitates (per prop. 1 hic).

Propositio 5.

In motu ejusdem mobilis aequiveloce vel duorum mobilium volumina aequalia et constantes velocitates habentium longitudines percursae, itemque spatia percursa sunt ut tempora impensa; et vicissim si talia sint, velocitas est constans seu motus aequivelox.

Mobile AB (fig. 111) motu aequiveloce, tempore TE, percurrat longitudinem ${}_1C_2C$ et spatium ${}_1A_2B$; et idem seu aequale tempore TP longitudinem ${}_1C_3C$ spatiumque ${}_1A_3B$; ajo esse ${}_1C_2C$ ad ${}_1C_3C$ vel ${}_1A_2B$ ad ${}_1A_3B$ ut TE ad TP. Sint motus aequidistributi ejusdem vel aequalis volumine mobilis, ejusdemque cum prioribus velocitatis, ac proinde (per prop. 3 hic) sint hi motus percursis intra aequalia respective tempora longitudinibus et spatiis aequales, adeoque (per prop. 3 cap. de velocitate uniformi et aequidistributa) uniformes, quorum spatia ${}_3A_4B$ et ${}_3A_5B$, longitudines ${}_3C_4C$, ${}_3C_5C$. Jam (per prop. 5 cap. de veloc. aequidistr. et unif.) longitudo ${}_3C_4C$ est ad longitudinem ${}_3C_5C$, ut tempora impensa TE ad TP. Ergo eodem modo erunt et longitudines ${}_1C_2C$ (aequales ipsi ${}_3C_4C$) ad ${}_1C_3C$ (aequalem ipsi ${}_3C_5C$), adeoque et spatia, quippe ob idem (vel aequale volumine) mobile sunt (per def. 2 cap. de tractu) in ratione longitudinum. Idemque et vicissim locum habet, quia et dicta prop. 5 cap. citati conversam annexam habet.

Propositio 6.

Si diversa mobilia moveantur unumquodque motu aequiveloce (seu constantis velocitatis), longitudines aequalibus temporibus percursae erunt velocitatibus impensis proportionales, inaequalibus percursae erunt in ratione composita temporum et velocitatum. Quodsi aequalia sint mobilium volumina, idem erit de spatiis, quod de longitudinibus. Et vicissim si talia locum habeant, mobilia retinebunt suas velocitates.

In figura prop. praecedentis adjiciatur mobile LM, ita ut puncta L, M, N eodem modo tractentur ut puncta A, B, C, sitque et mobilis LM motus velocitatem retinens. Jam si aequalibus (ipsi TE) temporibus sint percursae longitudines ${}_1C_2C$ et ${}_1N_2N$, et aequalibus (ipsi TP) temporibus percursae longitudines ${}_1C_3C$ et ${}_1N_3N$; erit ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_2N$ ut velocitas ipsius AB ad velocitatem ipsius LM, quia substitutis motibus aequidistributis eorundem mobilium et earundem velocitatum (ut in prop. praecedentis demonstratione) est ${}_3C_4C$ ad ${}_3C_5C$, ut velocitas ipsius AB ad velocitatum ipsius LM (per prop. 5 cap. citati). Quodsi tempora sint inaequalia, et percurrerit AB longitudinem ${}_1C_2C$ tempore TE, et LM longitudinem ${}_1N_3N$ tempore TP, erit ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_3N$ in ratione composita temporum TE ad TP et velocitatum ipsius AB ad ipsius LM. Posito enim LM, cujus majus tempus parte sui temporis TE, percurrisse longitudinem ${}_1N_2N$, est ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_2N$ ut velocitas in AB ut velocitas in LM; et est ${}_1N_2N$ ad ${}_1N_3N$ ut tempus TE ad tempus TP (per prop. praeced.); ergo ${}_1C_2C$ ad ${}_1N_3N$ in ratione composita temporum et velocitatum. Quodsi mobilia AB et LM sunt aequalium voluminum, etiam spatia in ratione sic composita erunt, quia (per defin. 2 cap. de tractu) spatia tunc longitudinibus sunt proportionalia. Eadem vicissim locum habere manifestum est, quia et propositiones, quibus in demonstratione usi sumus, conversas habent.

Propositio 7.

Spatia percursa a mobilibus suam velocitatem retinentibus sunt in ratione composita voluminum cujusque mobilis, velocitatum, et temporum impensorum.

Sint (fig. 112) mobilia AB, CD, quae percurrunt spatia ${}_1A_2B$, ${}_1C_2D$, temporibus T et P, velocitatibus GH, LM; ajo esse spatia ${}_1A_2B$ ad ${}_1C_2D$ in ratione composita voluminum AB ad CD et velocitatum GH ad LM et temporum T ad P. Sint longitudines percursae ab AB quidem GK, a CD vero LN; spatia ${}_1A_2B$ et ${}_1C_2D$ sunt in ratione composita voluminum AB ad CD et longitudinum GK ad LN (per def. 2 cap. de tractu). Sed longitudines (per prop. 6 hic) in casu velocitatum constantium sunt in ratione composita temporum T ad P et velocitatum GH ad LM. Ergo in casu velocitatum constantium, sunt in ratione composita voluminum, temporum et velocitatum.

Propositio 8.

In motu utcunque accelerato, conservato aut retardato longitudines a mobilibus percursae sunt ut facta ex velocitatibus in tempus ordinatim ductis; spatia percursa seu tractus in ratione composita horum factorum et voluminum.

Sit (fig. 113) mobile A tempore BE percurrens longitudinem A(A) in temporis BE instantibus B, C, E, velocitates habens quascunque BF, CG, EH; et primum ponamus tempus per plura instantia ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$ etc. in partes dividi utcunque ut B_1C, ${}_1C_2C$, ${}_2C_3C$ etc., per quarum unamquamque duret eadem velocitas, ut velocitates ${}_1C_1G$, ${}_2C_2G$, ${}_3C_3G$ per tempora B_1C, ${}_1C_2C$, ${}_2C_3C$, ${}_3CE$. Si jam ponamus velocitates ordinatim in tempora duci, ut fiant deinde rectangula FB_1C, ${}_1G_1C_2C$, ${}_2G_2C_3C$, ${}_3G_3CE$, erunt haec rectangula in ratione composita elementorum temporis et velocitatum; itaque (per prop. 6 hic) ut longitudines elementares respondentes a mobili A percursae, A_1A, ${}_1A_2A$, ${}_2A_3A$, ${}_3A(A)$. Itaque summae rectangulorum, seu figurae scalares, erunt ut longitudines totae percursae, veluti $BF_1G_2G_2C$ ad $BF_1G_2G_3GHE$ ut A_2A ad A(A), et spatia, quae (per def. 2 cap. de tractu) sunt in ratione composita longitudinum et voluminum, erunt in ratione composita horum factorum et voluminum. Idemque est, si plures diversorum mobilium velocitates in sua tempora ordinatim ducantur, modo rectis proportionalibus tempora et velocitates repraesententur. Quodsi elementa temporis, quibus eadem durat velocitas, sint assignabilibus utcunque parvis minora, ita ut nulla pars temporis assignari queat, in qua eadem

duret velocitas; figura scalaris evanescet in orthogonium curvilineum, quod longitudini percursae erit proportionale.

Hujus propositionis usus latissime patet; Phorometriam enim connectit cum Geometria. Ex ea pendent, quae de motu uniformiter accelerato habentur apud Galilaeum, quaeque a nobis multo ampliora et difficiliora circa varia accelerationum aut retardationum genera exhibentur.

Caput III.

De Gradibus velocitatis in Motu varie difformi.

Definitio 1. Motus uniformiter secundum tempora acceleratus vel retardatus est, cum aequalibus quibuscunque temporis partibus transmissis aequalia sunt incrementa vel decrementa velocitatis.

Definitio 2. Motus uniformiter secundum spatia acceleratus vel retardatus est, cum quibuscunque aequalibus longitudinis percursae partibus transmissis aequalia sunt velocitatis incrementa vel decrementa.

Propositio 1.

In motu inde a quiete uniformiter accelerato acquisitae velocitates sunt temporibus impensis proportionales.

Sint (fig. 114) ${}_1T_2T$ et ${}_2T_3T$ aequales, erunt et ${}_1E_2C$ et ${}_2E_3C$ aequales (per def. 1 hic). Ergo ${}_1CF$ ad F_3C, ut ${}_1C_1E$ ad ${}_1E_2C$. Ergo ${}_1C$, ${}_2C$, ${}_3C$ cadunt in rectam. Itaque si AT sint tempora, at TC velocitates, erit A_1T ad A_2T ut ${}_1T_1C$ ad ${}_2T_2C$, id est tempora ut velocitates.

Propositio 2.

Iisdem positis longitudines percursae sunt in duplicata ratione temporum impensorum vel velocitatum acquisitarum.

Nam longitudines sunt ut facta ex velocitatibus TC in tempus AT ordinatim ductis (per prop. 1 hic vel per prop. 8 cap. de velocitate in universum). Ergo longitudines sunt ut triangula ATC, id est ut quadrata ipsarum AT vel TC.

Propositio 3.

Spatia motu uniformiter secundum tempora accelerato aequalibus temporis partibus ordine percursa crescunt ut numeri impares deinceps ab unitate.

Nam quadratorum 0, 1, 4, 9, 16, 25 etc. differentiae sunt 1, 3, 5, 7, 9 etc. Et patet, tempore A_1T percursum esse triangulum A_1C_1T ut 1; tempore ${}_1T_2T$ trapezium ${}_1C_1T_1T_2C$, quod est ut 3; tempore ${}_2T_3T$ trapezium ${}_2C_2T_2T_3C$, quod est ut 5; et ita porro.

Propositio 4.

Media temporis velocitas (arithmetica) in motu uniformiter secundum tempora accelerato seu qua latum uniformiter mobile tantundem longitudinis percurrisset eodem tempore, quantum nunc percurrerat dicto motu accelerato, est dimidia ultimae velocitatis acceleratione quaesitae.

Hoc est, si mobile per tempus A_3T moveretur celeritate uniformi ${}_3TG$ vel AH dimidia ipsius ${}_3T_3C$ acquisitae tempore A_3T motu aequabiliter accelerato, tantundem longitudinis seu spatii absolveret hac celeritate uniformi seu constante, quantum nunc accelerata. Nam longitudo percursa celeritate AH tempore A_3T repraesentatur rectangulo HA_3T; et longitudo percursa celeritatibus TC proportione temporum AT crescentibus repraesentatur triangulo rectangulo A_3T_3C (per prop. 8 cap. de velocitate in universum.) Ut autem sit rectangulum HA_3T aequale triangulo A_3T_3C, oportet esse AH dimidiam ipsius ${}_3T_3C$.

Propositio 5.

Si acquisitae velocitates sint in ratione duplicata, triplicata etc. aliterque multiplicata temporum inde a quiete impensorum, longitudines percursae sunt (respective) in triplicata, quadruplicata, et generaliter unitate magis quam velocitates multiplicata temporum ratione.

Nam temporibus existentibus (fig. 115) ut AT partibus rectae ATT, et ipsis TC normalibus ad AT existentibus ut velocitatibus et in duplicata ratione seu ut quadrata ipsarum AT, linea ACC erit parabola, cujus vertex A, spatia autem percursa erunt ut areae ATCA (per dictam prop. 8 cap. de velocitate in univer-

sum) quae (ex quadratura parabolae nota) sunt trientes rectangulorum ATC; ergo sunt ipsis istis rectangulis proportionalia. Rectangula autem ATC (quorum altitudines AT sunt ut tempora, et bases TC ut quadrata temporum) erunt ut temporum cubi seu in triplicata eorum ratione. Eodem modo si velocitates TC sint in triplicata temporum AT, spatia percursa erunt ut areae curvilineae ATCA, seu ut quartae partes rectangulorum ATC, seu ut rectangula ATC, seu in temporum AT ratione quadruplicata. Et ita porro in reliquis.

Cum tempore Galilaei nondum notae essent generales quadraturae parabolarum, quas primus, ni fallor, dedit Fermatius, hinc ille in primo gradu motus accelerati substitit.

Propositio 6.

Iisdem positis, spatia temporibus aequalibus inde a quiete percursa sunt ut numeri deinceps ab unitate sumti, qui in casu velocitatis uniformis sunt unitates; in casu velocitatis proportione temporum crescentis eorum differentiae primae sunt binarii, (seu factum ex 1 in 2); in casu velocitatis proportione temporum duplicata crescentis eorum differentiae secundae sunt senarii (seu factum ex 1. 2. 3); in casu velocitatis proportione temporum triplicata crescentis eorum differentiae tertiae sunt 24 (seu factum ex 1. 2. 3. 4); et ita porro.

Nam dicta spatia in casu motus uniformis sunt aequalia, adeoque incipiendo ab unitate etiam reliqua sunt unitates; in casu motus proportione temporum crescentis spatia sunt differentiae quadratorum, seu numeri impares, eorum autem differentiarum differentiae primae sunt 2, nam ita stat series:

0	1	4	9	16	25	quadrati
	1	3	5	7	9	numeri spatiorum
		2	2	2	2	differentiae.

In casu velocitatis proportione temporum duplicata crescentis dicti numeri sunt differentiae cuborum (0, 1, 8, 27, 64, 125 etc.), nempe hae differentiae sunt 1, 7, 19, 37, 61, qui repraesentant dicta spatia A_1T_1CA, ${}_1C_1T_2T_2C_1C$, ${}_2C_2T_3T_3C_2C$ etc. posito primum A_1T_1CA esse 1, et tempora A_1T, ${}_1T_2T$, ${}_2T_3T$ esse aequalia; sed horum differentiae secundae sunt 6, scilicet

0	1	8	27	64	125	cubi
1	7	19	37	61		numeri spatiorum.
6	12	18	24			differentiae primae.
6	6	6				differentiae secundae.

In casu velocitatis proportione temporum triplicata crescentis numeri spatia dicta aequalibus temporibus percursa repraesentantes sunt differentiae biquadratorum, et horum spatiorum proinde differentiae tertiae sunt 24, scilicet:

0	1	16	81	256	625	biquadrati.
1	15	65	175	369		numeri spatiorum.
14	50	110	194			differentiae primae.
36	60	84				differentiae secundae.
24	24					differentiae tertiae.

atque ita porro in altioribus.

Propositio 7.

Iisdem positis, media arithmetica temporis velocitas, qua motum mobile uniformiter eodem tempore tantundem quantum nunc longitudinis percurrisset, si velocitates sint in temporum ratione simplice, duplicata, triplicata etc., est (respective) portio velocitatis ultimae acquisitae dimidia, tertia, quarta etc. seu generaliter portio ejus secundum numerum, qui est exponens multiplicatae rationis unitate auctus.

Nam ad eum modum, quo ratiocinati sumus prop. 4 hic, si rectang. HA_4T sit aequale areae A_4T_4CA, et AT sint tempora ac TC velocitates, tunc HA repraesentat velocitatem temporis mediam arithmeticam. Jam si TC sint ut quadrata, cubi, biquadrata etc. ipsarum AT, erit (ex nota paraboloidum quadratura) AH vel $_4TG$ pars tertia, quarta, quinta etc. ipsius $_4T_4C$.

Quae diximus, cum velocitates a quiete crescunt in ratione temporum utcunque multiplicata, verbi gr. duplicata, aut triplicata, quadruplicata etc. seu cum velocitates acquisitae sunt ut quadrata, cubi, biquadrata etc. temporum impensorum, etiam locum habent, cum velocitates a quiete crescunt in ratione temporum utcunque submultiplicata seu ut radices quadraticae, cubicae, biquadraticae etc. temporum, id est (quod eodem redit) cum tempora impensa sunt ut quadrata, cubi, biquadrata etc. velocitatum acquisitaru m

idem enim est dicere. velocitates esse in ratione temporum subduplicata vel subtriplicata seu ut radices temporum quadratas vel cubicas, ac dicere, velocitates esse in ratione temporum multiplicata secundum numerum exponentem $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3}$. Quin et fieri potest, ut neque velocitates sint ut dignitates temporum nec tempora ut dignitates velocitatum, sed ut dignitates velocitatum sint dignitates temporum, sed alterius gradus, verbi gr. cubi velocitatum ut quadrata temporum; et tunc dicetur, velocitates esse in ratione temporum duplicata-subtriplicata, seu in ratione temporum multiplicata secundum numerum exponentem $\frac{2}{3}$. Sin velocitatum quadrata fuissent ut cubi temporum, seu velocitates in ratione temporum triplicata-subduplicata, forent velocitates in ratione temporum multiplicata secundum exponentem $\frac{3}{2}$. Idem est dicendum, si non velocitates ad tempora aut contra, sed vel spatia percursa ad tempora aut velocitates aut horum alterum ad spatia referatur: idemque est, si numeri exponentes sint negativi, hoc est, si rationes, quas diximus, pro directis assumantur reciprocae etc., sed tunc crescente uno, decrescit id cujus ratio reciproca est, et vice versa, de quo mox distinctius. Semper autem locum habent demonstrationes propositionum 5 et 7, quamvis numeri indices seu exponentes multiplicationis rationum non sint integri, sed fracti. Hinc generaliter solvitur problema sequens.

Propositio 8. Problema.

Si ex his tribus: tempora impensa, velocitates acquisitae, longitudines percursae, unum utcunque a minimo crescere dicatur in ratione alterius multiplicata (vel submultiplicata, vel multiplicata-submultiplicata), definire, secundum quam rationis multiplicationem tertium crescat, et quae sit velocitas media arithmetica, seu aequivalens uniformis.

Condantur tabulae sequentes ope prop. 5 et 7 ampliatarum juxta scholion subjectum propositione 7, quarum prima ostendit, data ratione velocitatum multiplicata rationis temporum quomodo ratio longitudinum percursarum sit multiplicata rationis temporum; et item, quae sit velocitatis mediae quantitas.

Tab. I.

0	1	2 (T)	3	4	5	Tempora
1	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	Longitudines percursae in multiplicata ratione temporum.
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	
(V) 3	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$ (L)	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	
5	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{5}$	
Velocitates	Longitudines percursae in multiplicata ratione temporum.					

Usus tabulae praecedentis: Dato in qua ratione temporum sint velocitates vel contra, invenire in qua ratione temporum sint longitudines percursae, et quae sit media velocitas. Exempli causa, sint velocitates in ratione temporum multiplicata secundum numerum $\frac{2}{3}$, seu in ratione temporum duplicata-subtriplicata, seu velocitatum cubi (v³) sint ut temporum quadrata (t²), tunc ad inveniendas longitudines ex temporibus quaeratur in columna sinisterrima (quae est velocitatum) numerus 3 notatus signo (V) et in linea suprema (quae est temporum) numerus 2 notatus signo (T), et in cella notata signo (L) utrique (T) et (V) respondente occurret numerus $\frac{5}{3}$, qui significat, longitudines percursas esse in temporum ratione multiplicata secundum numerum $\frac{5}{3}$, seu esse in temporum ratione quintuplicata subtriplicata, hoc est, cubos longitudinum esse ut quintana seu surdesolida temporum. Et generali theoremate, si sit v^m ut t^n, fiet l^m ut t^{m+n}, seu l ut $t^{m+n:m}$. Idem numerus $\frac{5}{3}$ significat velocitatem mediam se habere ad maximam acquisitam ut 3 ad 5, seu ut $\frac{3}{5}$ ad 1, seu generaliter ut m ad m+n.

Tabula secunda ostendit, quomodo data ratione temporum ex ratione velocitatum, etiam spatia seu longitudines percursae habeantur ex ratione velocitatum:

Tab. II.

0	1	2 (T)	3	4	5	Tempora.
1	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	Longitudines percursae, in multiplicata ratione velocitatum.
2	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	
(V) 3	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{2}$ (L)	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{5}$	
4	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{9}{5}$	
5	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{10}{5}$	
Velocitates	Longitudines percursae in multiplicata ratione velocitatum.					

Exempli causa, si tempora sint in ratione velocitatum multiplicata secundum rationem $\frac{3}{2}$, seu in ratione velocitatum triplicata-subduplicata, seu temporum quadrata (t^2) sint ut velocitatum cubi (v^3), tunc ad inveniendas longitudines ex velocitatibus quaeratur in linea suprema (quae est temporum) numerus 2 notatus signo (T), et in columna sinisterrima (quae est velocitatum) numerus 3 notatus signo (V), et in cella notata signo (L) utrique (T) et (V) respondente occurret numerus $\frac{5}{2}$, qui significat longitudines percursas esse in velocitatum ratione multiplicata secundum numerum $\frac{5}{2}$, seu esse in velocitatum ratione quintuplicata-subduplicata, hoc est, quadrata longitudinum esse ut quintana seu surdesolida velocitatum. Et generali theoremate, si sit t^n ut v^m, fore l^n ut ut v^{m+n}, seu l ut $v^{m+n:n}$. Patet autem ex inspectione, tabulam secundam habere eosdem numeros cum prima, sed inverso situ, si velocitates pro temporibus ponantur, et contra.

Tabula tertia ostendit, quomodo data ratione longitudinum percursarum ex ratione temporum impensorum, etiam velocitatum acquisitarum ratio habeatur ex ratione temporum impensorum.

Tab. III.

·0	1	2	3	4	(T) 5	Tempora.
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	Velocitates acquisitae in multiplicata ratione temporum.
2	*	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	
(L) 3	*	*	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	(V) $\frac{2}{3}$	
4	*	*	*	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	
5	*	*	*	*	$\frac{0}{5}$	
Longitudines.	Velocitates acquisitae in multiplicata ratione temporum.					

Exempli causa, si longitudinum cubi (l^3) sint ut temporum surdesolida (t^5), seu si longitudines sint in ratione temporum quintuplicata-subtriplicata, seu multiplicata secundum numerum $\frac{5}{3}$; tunc ad inveniendas velocitates ex temporibus quaeratur in linea suprema (quae est temporum) numerus 5 notatus signo (T) et in columna sinisterrima (quae est longitudinum) numerus 3 notatus signo (L), et in cella notata signa (V) utrique (T) et (L) respondente occurret numerus $\frac{2}{3}$, qui significat velocitates acquisitas esse in temporum ratione duplicata-subtriplicata seu multiplicata secundum numerum $\frac{2}{3}$, hoc est, cubos velocitatum esse ut quadrata temporum. Et generali theoremate, si sit l^e ut t^r, fore v ut $t^{r-e:e}$, seu v^e ut t^{r-e}.

Notandum autem est in hac tabula, $\frac{0}{1}$ vel $\frac{0}{2}$ vel $\frac{0}{3}$ etc. id est 0, significare, tunc cum longitudines percursae sunt ut tempora impensa, vel quadrata longitudinum ut quadrata temporum, vel cubi illorum ut cubi horum etc., velocitates esse ut t^0, id est ut unitates seu quantitates constantes, seu quod idem est, tunc velocitatem esse uniformem. Ratio autem, cur in hac tabula relicta sint loca vacua, haec est, quod tunc exponens numerus foret minor quam 0, quod fieri non debet. Exempli causa, cum l^2 sunt ut t^1, fieret v ut $t^{1-2:2}$, seu v ut $t^{-1:2}$, vel v^2 ut t^{-1}, vel quod idem est v^2 ut $\frac{1}{t}$ seu $1 : t$, seu velocitatum quadrata erunt reciproce

ut tempora. Quibus casibus utique existentibus velocitatibus vel earum potentiis progressionis arithmeticae, tunc tempora vel eorum potentiae forent progressionis harmonicae; unde sequeretur, initio seu primo momento, cum tempus infinite parvum est, velocitatem esse infinitam, quod utique admittendum non est; idemque in caeteris omnibus locis fieret, quos ideo vacuos reliquimus. Et proinde fieri non potest, ut longitudinum percursarum quadrata sint ut tempora impensa, vel longitudinum cubi sint ut temporum quadrata aut ut ipsa tempora, vel ut longitudinum biquadrata sint ut temporum cubi vel quadrata vel ut ipsa tempora, et ita porro.

Tabula quarta ostendit, quomodo data ratione temporum impensorum ex data ratione longitudinum percursarum, etiam velocitatum acquisitarum ratio ex data ratione longitudinum percursarum detur.

Tab. IV.

	0	1	2	3	4	(T) 5	Tempora
	1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	Velocitates
	2	*	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	acquisitae in multiplicata
(L)	3	*	*	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{4}$	(V) $\frac{2}{5}$	ratione lon-
	4	*	*	*	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{5}$	gitudinum percursa-
	5	*	*	*	*	$\frac{0}{5}$	rum.
	Longitudines	Velocitates acquisitae in multiplicata ratione longitudinum percursarum.					

Exempli causa, si temporum surdesolida (t^5) sint ut longitudinum cubi (l^3), seu si tempora sint in longitudinum ratione triplicata-subquintuplicata, vel si tempora sunt in ratione longitudinum multiplicata secundum numerum $\frac{3}{5}$; tunc ad inveniendas velocitates ex longitudinibus quaeratur in linea suprema (quae est temporum) numerus 5 notatus signo (T) et in columna sinisterrima (quae est longitudinum) quaeratur numerus 3 notatus signo (L), et tunc in cella notata signo (V) utrique (T) et (L) respon-

dente occurret numerus $\frac{2}{5}$, qui significat velocitates acquisitas esse in longitudinum percursarum ratione duplicata-subquintuplicata, seu in ratione longitudinum multiplicata secundum numerum $\frac{2}{5}$, seu, quod idem est, velocitatum acquisitarum surdesolida fore ut longitudinum percursarum quadrata. Et generali theoremate, si sit t^r ut l^e seu t ut $l^{e:r}$, fore v ut $l^{\overline{r-e}:r}$, seu v^r ut l^{r-e}. Et eo casu, quo velocitates in tabula praecedenti erant ut t^0, etiam in hac fiunt ut l^0, id est ut unitates, seu sunt velocitates uniformes. Et loca tabulae antecedentis vacua quippe impossibilia, etiam in hac vacant, cum iisdem sunt utriusque tabulae respondentes casus, tantum quod velocitates in praecedente per tempora, in hac per longitudines seu loca absoluta aestimantur: eodem modo, ut primae quoque et secundae tabulae iidem fuere casus, eo tantum discrimine, quod longitudines percursae eaedem in prima per tempora, in secunda per velocitates aestimabantur. Et in sequentibus quoque proximis duabus tabulis eadem tempora insumta in quinta quidem per longitudines percursas, in sexta vero per velocitates acquisitas aestimabuntur.

Igitur tabula quinta ostendit, quomodo data ratione velocitatum acquisitarum ex data ratione longitudinum percursarum, etiam temporum impensorum ratio ex data ratione longitudinum percursarum detur.

Tab. V.

		(L)				
0	1	2	3	4	5	Longitudines
1	$\overset{*}{\smile}$	*	*	*	*	Tempora impensa in multiplicata ratione longitudinum.
2	$\frac{1}{2}$	*	*	*	*	
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	*	*	*	
4	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	*	*	
(V) 5	$\frac{4}{5}$	(T) $\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	*	
Velocitates.	Tempora impensa in multiplicata ratione longitudinum.					

Exempli causa, si velocitatum surdesolida (v^5) sint ut longitudinum quadrata (l^2), seu si velocitates sint in ratione longitudinum duplicata - subquintuplicata, sive multiplicata secundum numerum $\frac{2}{5}$, tunc ad invenienda tempora ex longitudinibus quaeratur in linea suprema (quae est longitudinum) numerus 2 notatus signo (L) et in columna sinisterrima (quae est velocitatum) numerus 5 notatus signo (V), et in cella notata signo (T) utrique (L) et (V) respondente occurret numerus $\frac{3}{5}$, qui significat, tempora impensa esse in longitudinum percursarum ratione triplicata-subquintuplicata, seu multiplicata secundum numerum $\frac{3}{5}$, hoc est, surdesolida temporum esse ut cubos longitudinum. Et generali theoremate, si sit v^{c} ut l^{b}, fore t ut $l^{\overline{c-b}:c}$, seu t^{c} ut l^{c-b}. Sed ex inspectione tabulae naturaque calculi rursus apparet, multa manere loca vacua, ubi casus sunt impossibiles. Nam impossibilis est (ex. gr.) casus cellae ☽ respondentis longitudinis exponenti 1 et volocitatis 1, id est, ubi velocitates sunt ut longitudines, seu v^{1} ut l^{1}; nam ita tam c quam b existentibus 1, fieret $c-b=0$, et foret t ut $l^{0:1}$, seu t ut l^{0}, seu tempus durante motu non cresceret, sed maneret constans sive idem, quod est absurdum. Similis absurditas oritur in omnibus locis vacantibus. Itaque fieri non potest, ut velocitates acquisitae crescant ut longitudines percursae, vel ut earum quadrata, cubi altioresque potestates; aut ut velocitatum acquisitarum quadrata crescant ut longitudinum percursarum quadrata, cubi altioresque potestates seu dignitates; aut ut velocitatum acquisitarum cubi crescant ut longitudinum percursarum cubi, biquadrata altioresve potestates. Et generaliter fieri non potest, ut velocitatum dignitates crescant ut dignitates pares vel altiores longitudinum, quemadmodum paulo ante ad Tab. III. ostendimus fieri non posse, ut temporum dignitates crescant ut longitudinum dignitates altiores, seu ut longitudinum dignitates crescant uti temporum dignitates inferiores.

Denique tabula sexta ostendit, quomodo data ratione longitudinum percursarum ex ratione data velocitatum acquisitarum, etiam temporum impensorum ratio ex data ratione velocitatum acquisitarum detur.

Tab. VI.

		(L)				
0	1	2	3	4	5	Longitudines
1	*	*	*	*	*	Tempora impensa in multiplicata ratione velocitatum.
2	$\frac{1}{1}$	*	*	*	*	
3	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	*	*	*	
4	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{3}$	*	*	
(V) 5	$\frac{4}{1}$	(T) $\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	*	
Velo- citates.	Tempora impensa in multiplicata ratione velocitatum.					

Exempli causa, si longitudinum quadrata (l^2) sint ut velocitatum surdesolida (v^5), seu si longitudines sint in velocitatum ratione quintuplicata-subduplicata vel in velocitatum ratione multiplicata secundum numerum $\frac{5}{2}$, tunc ad invenienda tempora ex velocitatibus quaeratur in linea suprema (quae est longitudinum) numerus 2 notatus signo (L) et in columna sinisterrima (quae est velocitatum) quaeratur numerus 5 notatus signo (V), et tunc in cella notata signo (T) utrique (L) et (V) respondente occurret numerus $\frac{3}{2}$, qui significat tempora impensa esse in velocitatum acquisitarum ratione triplicata-subduplicata, seu in ratione velocitatum multiplicata secundum numerum $\frac{3}{2}$, hoc est, temporum quadrata fore ut longitudinum cubos. Et generali theoremate, si sit l^b ut v^c seu l ut $v^{c:b}$, fore t ut $v^{c-b:b}$ seu t^b ut v^{c-b}. Et casus, qui in tabula proxime praecedente nempe quinta erant impossibiles, etiam hic vacant.

In omnibus autem tabulis uno eodemque exemplo usi sumus, ut consensus appareat. Nempe in tabula 1. velocitatum cubis existentibus ut temporum quadrata, tunc longitudinum cubi sunt ut temporum surdesolida. In tabula 2. temporum quadratis existentibus ut velocitatum cubi, tunc longitudinum quadrata sunt ut velocitatum surdesolida. In tabula 3. longitudinum cubis existentibus ut temporum surdesolida, tunc velocitatum cubi sunt ut temporum quadrata (consentit tabulae primae). Et in tabula 4. tem-

porum surdesolidis existentibus ut longitudinum cubi, tunc velocitatum surdesolida sunt ut longitudinum quadrata. In tabula 5. velocitatum surdesolidis existentibus ut longitudinum quadratata, tunc temporum surdesolida sunt ut longitudinum cubi (consentit tabulae quartae). Denique in tabula 6. longitudinum quadratis existentibus ut velocitatum surdesolida, tunc temporum quadrata sunt ut velocitatum cubi (consentit tab. secunda).

Postremo pretium operae videtur ostendere, quomodo unius tabulae canon analyticus ex alterius tabulae canone per calculum generalem derivetur, praesertim cum alioquin analytici non satis uti soleant exponentibus potentiarum generalibus seu per literas expressis, quod tamen hic requiritur.

Et quidem tabulae primae canon analyticus erat talis Si v^m ut t^n, fiet l^m ut t^{m+n}, ubi habetur l ex t. Quaeritur jam canon analyticus tabulae secundae, seu posito t^n ut v^m quaeritur l ex v. Quod calculo tali invenitur: t^n (1) ut v^m ex hypothesi; ergo t (2) ut $v^{m:n}$. Jam ex canone tabulae primae est l^m (3) ut t^{m+n}; ergo fit l (4) ut $t^{\overline{m+n}:m}$; et in analogia (4) pro t substituendo valorem ex analogia (2) fit l (5) ut $v^{\overline{m+n}:n}$, id est l^n (6) ut v^{m+n}. Itaque si t^n ut v^m, fit l^n ut v^{m+n}, qui est canon analyticus tabulae secundae. Et eodem modo ex canone tabulae tertiae derivatur canon quartae, itemque ex canone tabulae quintae derivatur canon sextae, aut vice versa. Sed ut ostendamus, quomodo et alii canones ex primo aut inter se deriventur, in exemplum apponemus calculum, quo canon tabulae quintae derivatur ex canone tabulae primae.

In tabula igitur quinta est v^c (1) ut l^b seu v (2) ut $l^{b:c}$, quaeritur t ex l, $^{b,c.}$ Jam ex tab. 1 canone, cum esset v (3) ut $t^{n:m}$, erat l (4) ut $t^{\overline{m+n}:m}$. Ergo t (5) ut $l^{m:\overline{m+n}}$. Ergo tollendo t ex analogia (3) per analogiam (5), fit v (6) ut $l^{n:\overline{m+n}}$. Comparando igitur analogias (2) et (6), fit $\overline{m+n}:n$ (7) $= c:b$ seu $1+\overline{m:n}$ (8) $= c:b$, et $n:m$ (9) $= b:c-b$. Jam ex articulo (4) erat l (10) ut $t^{\overline{1+n:m}}$. Ergo per artic. (9) fit l (11) ut $t^{c:c-b}$, seu fit t^c (12) ut l^{c-b}. Itaque si sit v^c ut l^b, fit t^c ut l^{c-b}, qui est canon analyticus tabulae quintae. Eademque methodus in caeteris locum habet. In qua non tantum notandus est usus calculi exponentium literalium, sed et analogiarum, quae ad instar aequa-

tionum adhibentur, et quidem analogiarum non communium, sed per duos tantum terminos eosque indefinitos seu universales quamcunque ejusdem nominis propositi quantitatem comprehendentes expressarum, ut cum dicitur velocitates in gravium descensu acquisitas esse ut tempora impensa (seu velocitatem priorem esse ad velocitatem posteriorem ut tempus acquisitionis illius ad tempus hujus), quae formulae brachylogiae analogias contracte exprimendi geometris quidem in usu sunt, nondum autem in calculo analytico frequentabantur. Itaque nos, cum usus horum sit maximus in translatione geometriae ad motum potentiasque, his exemplis praeiri viam aliis e re fore putavimus.

Propositio 9.

Fieri non potest, ut temporibus eorumve potentiis in progressione Arithmetica crescente assumtis, velocitates quaesitae vel etiam spatia percursa crescant in progressione Geometrica inde a quiete. Et generaliter fieri non potest, ut uno ex his tribus: tempore, velocitate, spatio (seu longitudine percursa) vel ejus dignitate arithmetice seu uniformiter crescente, alterum vel ejus dignitas geometrice ab initio crescat.

Ponatur enim, si fieri potest, (fig. 116) temporibus AT ab initio motus A assumtis in progressione Arithmetica seu ut logarithmis, velocitates acquisitas esse in progressione Geometrica seu ut numeros, patet tres velocitates acquisitas quascunque, ut $_1T_1V$, $_2T_2V$, $_3T_3V$, quae aequalibus distant temporis intervallis $_1T_2T$, $_2T_3T$, fore progressionis Geometricae, adeoque et velocitates existentes momentis A, $_1T$, $_2T$ (posito tempora A_1T, $_1T_2T$ esse aequalia) esse progressionis Geometricae, quod est absurdum. Nam velocitas initio seu in A est nulla ex hypothesi, adeoque est velocitate in $_1T$ repraesentata per $_1T_1V$ infinities minor; jam velocitas in A est ad velocitatem in $_1T$, ut haec ad velocitatem in $_2T$, ex hypothesi; ergo etiam $_1T_1V$ est ipsa $_2T_2V$ infinities minor, adeoque si $_1T_1V$ sit velocitas gradus cujuscunque quantumvis parvi assignabilis, velocitas $_2T_2V$ foret infinita. Et cum instans $_2T$ utcunque vicinum sumi possit instanti A, patet mobile secundum hanc accelerationis legem aut nullum habere motum, aut statum habere instantaneum seu infinitae velocitatis. Et sane si ordinatae

TV velocitatem repraesentantes sint progressionis geometricae, ipsis temporum intervallis $_1T_2T$, $_2T_3T$ etc. existentibus aequalibus, tunc VV nunquam attingit rectam AT, quippe sibi asymptoton, ut construenti manifestum est. Et proinde velocitas hoc modo crescens, a minimo seu a quiete incipere non potest, contra hypothesin. Hinc porro sequitur, temporibus arithmetice assumtis, spatia quoque percursa geometrice crescere non posse. Quoniam tunc spatiis Geometrice crescentibus etiam velocitates Geometrice crescunt. Nam si spatia crescunt Geometrice, etiam differentiae eorum seu elementa crescent Geometrice; sed elementa spatii sunt in ratione composita elementorum temporis et velocitatum (supra cap. de velocitate in genere prop. 8) id est, quia elementa temporis (quippe differentiae terminorum arithmeticae progressionis) aequalia sunt, elementa spatii sunt in ratione velocitatum; ergo et velocitates forent progressionis Geometricae, quod fieri non posse jam ostendimus.

Porro quo argumento ostendimus, temporibus crescentibus Arithmetice, spatia percursa seu longitudines tractus non posse crescere Geometrice inde a quiete, eodem etiam evincitur, spatiis percursis Arithmetice, velocitates acquisitas non posse crescere Geometrice inde a quiete. Eadem enim ratiocinatio est, substituendo tantum spatia pro temporibus. Unde spatiis crescentibus Arithmetice, etiam tempora Geometrice crescere non possunt a quiete. Nam spatiis crescentibus Arithmetice, elementa temporis sunt velocitatibus reciproce proportionalia (per dict. prop. 8). Itaque cum si tempora sint geometricae progressionis, talia etiam futura sint elementa eorum, sequitur et velocitates geometricae progressionis fore, quod absurdum esse ostensum est. Postremo velocitatibus crescentibus Arithmetice, spatia non possunt Geometrice crescere inde a quiete. Nam si in figura eadem rectae AT, quae sunt progressionis arithmeticae, exhibeant velocitates, et ipsae rectae TV, quae sunt progressionis geometricae, exhibeant tempora, sequitur eodem (quo tunc, cum AT essent tempora et TV velocitates, usi sumus) argumento, posito quod velocitati in A minimae seu quieti respondeat spatium minimum seu spatii initium et volocitati in $_1T$ respondeat spatium percursum $_1T_1V$, tunc necessario velocitati in $_2T$ acquisitae respondere spatium $_2T_2V$ percursum infinitum. Quod est absurdum, cum $_2T$ sumi possit ubique post A, adeoque motus futurus sit instantaneus. Et velo-

citatibus crescentibus Arithmetice, simili argumento nec tempora inde ab initio crescere possunt Geometrice; nam velocitate quacunque A_2T acquisita tempus ${}_2T_2V$ foret infinitum, adeoque ad minimum quemque gradum velocitatis acquirendum tempore infinito opus foret, adeoque motus foret nullus. Eadem vis ratiocinationis et in dignitatibus locum habet, nam quorum dignitates sunt progressionis Geometricae, ea sunt ipsamet progressionis Geometricae. Ex his autem, ut obiter dicam, intelligi potest, quam commode et utiliter mens humana etiam ipsa infiniti consideratione ad res aestimandas uti queat.

Propositio 10.

Fieri non potest, ut velocitatum dignitates determinati nominis crescant in ratione dignitatum parium vel altiorum a longitudinibus. Item fieri non potest, ut longitudinum dignitates determinati nominis crescant in ratione dignitatum inferiorum a temporibus.

Verbi gratia fieri non potest, ut quadrata velocitatum crescant ut quadrata vel cubi longitudinum, aut ut cubi longitudinum crescant ut quadrata temporum vel ut tempora. Horum prius demonstravimus in explicatione problematis 8 ad tab. 3, posterius ibidem ad tab. 5. Praeterea ad tab. 3 etiam ostendimus, quomodo progressio harmonica excludatur. Caeterum fieri non posse, ut velocitates crescant uti spatia percursa, qui unus est casus partis prioris hujus propositionis, jam et a Galilaeo et uberius a Fermatio est demonstratum. Quin et brevissima conclusione sequitur ex prop. 9 proxime praecedenti, non posse velocitates inde a quiete crescere ut longitudines percursas seu spatia. Nam si ita esset, forent etiam continua velocitatis incrementa incrementis longitudinis continuis percursae proportionalia. Sed in omni motu, temporibus aequabiliter crescentibus, progressuum seu longitudinis percursae incrementa continua sunt ut velocitates (per prop. 8 cap. de velocitate in genere). Ergo in nostro casu velocitatis incrementa sunt ut velocitates, adeoque velocitates sunt progressionis Geometricae. Sed motum hac lege inde a quiete crescere non posse demonstratum est prop. 9 proxime praecedente.

Equidem P. Cazraeus S. J. olim libello scripto contra Gali-

laeum ratiociniis quibusdam suis atque experimentis demonstrare conatus erat, motum gravium inde a quiete accelerari in ratione spatiorum transcursorum. Sed Fermatius in Epistola, tum inter Gassendea tum etiam inter opera posthuma Fermatii edita, ostendit hoc esse impossibile. Audio et P. Laloveram S. J. qui sane fuit ingeniosissimus, aliquid circa hoc argumentum praestitisse, quod ad manus meas non pervenit. Gassendus autem integrum libellum Cazraeo opposuit. Cazraeus porro (ut obiter dicam) lapsus est in sua experimentorum instituendorum ratione, quod discrimen inter vim vivam et mortuam, seu inter impetum conceptum et primos conatus infra a nobis uberius expositum non percepit. Nec satis scio, an ipse Gassendus hunc difficultatis nodum solverit. Nimirum Cazraeus sibi deprehendisse videbatur, librae lance una quiescente in tabula cum ponderibus impositis, altera vero lance manente libera et in hanc vacuam pondere aliquo ex altitudine quadam cadente et pondus unius librae in lance opposita attollente, idem pondus ex decupla vel duodecupla altitudine cadens, decem vel duodecim libras in lance opposita collocatas attollere posse, atque inde colligere sibi posse videbatur, gradus velocitatum acquisitos esse ut altitudines. Sed plerumque, qui rerum rationes non considerant, etiam in experimentis sumendis falluntur. Sciendum enim est, et a nobis infra demonstratum, grave quantumcunque attolli posse nonnihil lapsu alterius quantulicunque ex altitudine quantulacunque, cum gravitatis vis quae mortua est, a concepto impetu, qui infinities major est, semper superetur, sed quo altior erit lapsus, eo altius attolletur grave in lance positum. Itaque si unica ex pedis altitudine cadens attollit pondus lancis oppositae ad unum pollicem, eadem ex duodecim pedibus lapsa attollere poterit idem pondus ad pollices duodecim seu pedem. Et oportet pondus ipsum esse unicae duodecuplum, quae cap. de causa et effectu demonstravimus. Interim abstrahendus est animus a variis accidentibus, quibus efficitur, ut corpora valde gravia a minoribus sensibiliter non moveantur; grave enim magnum iis, quibus innititur, se fortiter applicat, nec sine frictione aliqua et medii quoque ambientis resistentia avelli aut moveri potest. Ut de partibus lancis tensionis ac flexionis alicujus patientibus nihil dicam: simile quid experimur in eo quod Galli vocant tractum bilancis, le trait de la balance. Bilanx enim magnis ponderibus in aequilibrio positis onerata non quodvis exiguum pondus adjectum sentit,

quod Cl. Perraltus in tentamentis physicis sane egregiis inertiae materiae tribuisse visus est. Sed haec inertia id tantum praestat, ut corpora majora moveantur tardius, non ut omnino non moveantur minorum impulsu. Verum haec obiter anticipavimus occasione data, cum alioqui hujus loci non sint.

Propositio 11. Problema.

Si velocitates decrescant in ratione temporum aut longitudinum percursarum crescentium multiplicata utcunque, reliqua definire ad instar prop. 8.

Quando velocitas prius in eadem ratione crevisse intelligi potest, vicissim ut creverat decrescet, et sufficit recurri ad solutionem et tabulas problematis dictae prop. 8. Sed in casibus, ubi locum non habebat incrementum tale velocitatis inde a quiete, quid agendum sit, expositis difficilioribus quibusdam exemplis viam praeivimus in Appendice de resistentia medii, cujus effectus, ut illic explicuimus, ad hujusmodi motuum aestimationes reducitur. Quibus perceptis caetera quoque similia praestare diligenter consideranti non difficile erit, aditu semel aperto. Nobis enim nunc singula persequi non vacat, ne nimium ab elementorum instituto abeamus.

SECTIO QUINTA.

PHOROMETRICA DIFFORMIUM.

Caput I.

De Quantitate Motus seu impetu.

Definitio 1. Quantitas motus seu impetus est actum ex velocitatibus in quantitatem materiae seu molem ordinatim ductis.

Ut si (fig. 117) in mobili eandem ubique quantitatem materiae in volumine aequali seu densitatem constantem habente puncti cujusque ut C velocitas sit ut CE, rectae AB mobile repraesentanti ad angulos rectos applicata, impetus seu quantitas motus repraesentabitur per figuram AEDB, et quidem si ACB sit recta et ve-

locitates sint ut distantiae ab A, impetus ipsius AC erit ad impetum ipsius AB in duplicata ratione mobilium AC, AB seu ut quadratum AC ad quadratum AB, nempe ut area ACE ad aream ABD.

Quodsi mobilis diversa sit densitas in diversis partibus, tota motus quantitas similiter colligetur. Sit (fig. 118) recta AB uniformiter mota circa centrum immotum A punctis suis, ut C, describens arcus ${}_1C_2C$ velocitatibus punctorum proportionales, et ponatur praeterea mobile esse gravius seu densius versus B in ratione distantiae ab A; repraesentabitur tota moles seu quantitas materiae per triangulum rectangulum ABF, cujus basi BF parallela seu ordinatim applicata CG sit ad basim BF, ut densitas in C ad densitatem in B. Fiat jam aliud triangulum rectangulum ad eandem rectam AB in alio plano ad prius recto, nempe triangulum ABD, ordinatis suis CE repraesentans velocitates respondentes, seu ut CE sit ad BD ut velocitas ${}_1C_2C$ ad velocitatem ${}_1B_2B$; tunc rectangulum ECG repraesentabit impetum puncti C, et pyramis (quam constituunt haec rectangula) ejusque partes repraesentabunt impetus partium lineae, et ita erit impetus ipsius AC ad impetum ipsius AB ut pyramis ACEHG ad pyramidem ABDLF, adeoque ut cubus ipsius AC ad cubum ipsius AB. Ex his etiam patet, idem esse impetum, quod summam velocitatum, posito elementa molis, quibus competunt velocitates, esse aequalia inter se. Ex his etiam intelligitur, impetum esse quantitatem motus sed non nisi momentanei, et aptius dici quantitatem conatus; ac proprie loquendo, cum motus tempore indigeat, id potius quantitatem motus fore, quod oritur ex conatuum toto tempore existentium aggregato, et a nobis infra dicitur quantitas translationis. Maluimus tamen recepto significatui morem gerere.

Definitio 2. Intensio motus seu vigor in mobili est velocitas mobilis aequidistribute moti, quod mobili proposito mole et impetu est aequale, seu velocitas, quae ducta in molem dat impetum.

Ut si (fig. 119) omnes ${}_1B_2B$ celeritates punctorum B rectae AB circa centrum A immotum in plano motae et ubique aeque densae repraesententur rectis BD ordinatim ad angulos rectos ei insistentibus, et sumatur recta CE vel ${}_1A_2A$ talis ut rectangulum ${}_2A_1A_2B_2B$ aequetur figurae ADB; tunc celeritas repraesentata per rectam CE erit velocitas, qua motum mobile AB motu aequidistri-

buto ${}_2A_2B$ in ${}_3A_3B$ eundem habebit impetum quem ante, seu (quod idem est) recta CE repraesentans celeritatem ducta in molem seu mobile AB dat rectangulum ${}_2A_3A$ aequale figurae ADB impetum repraesentanti. Idem succedit in mobili AB inaequalis densitatis. Ut si (fig. 120) ponantur densitates punctorum B crescere in ratione distantiarum ab A, adeoque moles mobilis repraesentari per triangulum rectangulum ABF, et ejusdem mobilis protractio (vel elementum tractus) seu, quod idem est, summa velocitatum in volumen ductarum repraesentari per triangulum rectangulum ABD, cujus planum sit rectum ad planum prioris; impetumque cujuslibet puncti B repraesentari per rectangulum BDLF, adeoque impetum mobilis AB per pyramidem ex his rectangulis conflatam ABDLF; et sumatur jam recta CE talis magnitudinis, ut ducta ipsa normaliter in molem ABF producat solidum prismaticum seu ubique aequealtum ${}_1A_3A_3BMF_2B$, cujus basis sit moles ABF, altitudo sit celeritas CE; sitque solidum hoc prismaticum pyramidi aequale, adeoque recta AB motu aequidistributo ${}_2B_3A$ celeritate ut CE seu ${}_1A_3A$ incedens eundem impetum habeat, quem ante cum motu circulari moveretur; his positis celeritas CE erit intensio motus seu vigor: quae etiam erit media arithmetica inter omnes velocitates moli ordinatim applicatas, seu inter omnes rectas ex pyramidis hedra ADL in hedram ABF (quae molem repraesentat) normaliter incidentes. Suo loco autem patebit, velocitatem CE, quae intensionem motus seu vigorem mobilis exhibet, seu quae ducta in molem dat impetum, esse ipsam velocitatem centri gravitatis, quando omnia mobilis puncta in easdem partes tendant, vel saltem (etsi non tendant in easdem partes) quatenus motus eorum quicunque compositus intelligi potest ex motu in parallelis ad easdem partes, eatenus velocitas hujus motus paralleli conspirantis per velocitatem centri gravitatis similiter parallelam et conspirantem exprimetur.

Propositio 1.

Si nullum sit discrimen densitatis in materiis, coincidit impetus mobilis et ejusdem protractio seu elementum tractus.

Nam mobilia seu moles iisdem existentibus densitatibus sunt ut volumina (per prop. 1 cap. de quantitate materiae). Jam impetus est factum ex velocitatibus in molem ordinatim ductis

(per def. 1 hic), et protractio est factum ex velocitatibus in volumen ordinatim ductis (per defin. 2 cap. de velocitate in universum); coincidunt ergo.

Inspicienti figuras praecedentes definitionum 1 et 2 patet, si nulla habeatur ratio densitatis, nullave ejus sit diversitas in mobilibus ut AB, evanescere triangulum molis ABF, et molem exhiberi per ipsam rectam AB; evanescere etiam solida ut pyramides pro impetu rectae exhibendo excogitatas, et impetum exhiberi per sola triangula AB. Et vero, cum in naturae interioribus revera nulla sit materiae dissimilaritas (ut ego quidem arbitror), consequens est in natura coincidere quae diximus, etsi a nobis notionis phaenomenis et sensui accommodantibus plus materiae in gravioribus seu densioribus esse, per aversionem quandam, compendiosae ratiocinationis causa, hic admittatur.

Propositio 2.

Si nullum sit discrimen densitatis in materiis, coincidunt intensio motus in mobili seu vigor, et ipsa mobilis velocitas.

Nam vigor est ut quotiens factus divisione impetus per molem (per defin. 2 hic), et velocitas est ut quotiens factus divisione protractionis per volumen (per defin. 2 cap. de velocitate in universum). Et si nullum sit discrimen in densitatibus, moles repraesentantur per volumina (per prop. 1 cap. de quantitate materiae), et coincidunt impetus et protractiones (per prop. 1 hic); coincidunt ergo vigor et velocitas.

Nimirum inspiciendo figuras definitionum 1 et 2 manifestum est, si eadem ubique in mobilibus sit densitas, ipsam CE seu ${}_1A_2A$ vigorem nihil aliud esse quam velocitatem mobilis, quia ducta in rectam AB dat protractionem seu impetum rectae hujus. Sed si recta densitate differat, aut alioquin densitatum ratio habeatur, recta adhibenda ut non HK, quae ducta in volumen AB exhibeat planum protractionis ABD, seu rectangulum BAα huic triangulo aequale, sed CE, quae ducta in molem ABF exhibeat solidum impetus, seu in exemplis supradictis solidum prismaticum pyramidi aequale. Et posito omnia puncta mobilis in easdem partes ferri, tam vigor quam velocitas mobilis exhiberi potest per velocitatem centri gravitatis secundum cautionem dictam ad defin. 2. Velocitas scilicet mobilis est eadem, quae velocitas centri gravitatis ipsius mo-

luminis, ut in recta AB velocitas puncti medii K nempe ${}_1K_2K$; si vero densitas rectae variet, quaerendum est centrum gravitatis ipsius molis, quod in recta AB, densitate versus B crescente, proportione distantiae ab A, est vicinius ipsi B, ita ut BC sit triens rectae AB, et hujus velocitas erit mobilis vigor seu motus intensio, ductaque in molem dabit impetum.

Propositio 3.

Impetus sunt in ratione composita mobilium et intensionum motus.

Sint (fig. 121) mobilia AB,4 et LM, 2; et intensiones motuum BC, 3 et MN, 5; impetus ABC, 12, LMN, 10 sunt ut facta ex AB in BC, et ex LM in MN (per defin. 2 hic), ergo in ratione composita AB ad LM, 4 ad 2, et BC ad MN, 3 ad 5 (ex elementis).

Propositio 4.

Impetus sunt in ratione composita voluminum, densitatum, et intensionum motus.

Nam impetus sunt in ratione composita mobilium et intensionum motus (per prop. 3 hic), et mobilia seu moles sunt in ratione composita voluminum et densitatum (per prop. 3 cap. de quantitate materiae), unde habetur propositum.

Inspiciatur figura definitionis 2; patet mobilis rectae AB circa suum extremum A immotum motae volumen exhiberi per longitudinem rectae AB; densitatem per BN dimidiam ipsius ${}_2BF$; molem seu quantitatem materiae per triangulum ABF seu per rectangulum ex volumine in densitatem ABN; vigorem seu intensionem motus per rectam CE seu ${}_1A_2A$, impetum per pyramidem ABDLF seu per solidum prismaticum nempe ${}_1A_2A_2BMF_2B$ sub mole ABF et vigore CE vel ${}_1A_2A$ contentum; unde impetum per praecedentem esse in ratione composita mobilium seu molium, et vigorum seu intensionum motus, seu denique impetum repraesentari per rectangulum solidum $N_2B_1A_2A$ sub tribus rectis angulum rectum facientibus volumine AB, densitate BN, et vigore ${}_1A_2A$ contentum.

Propositio 5.

Si densitates sint aequales, impetus seu quantitates motuum sunt in ratione composita voluminum seu extensionum mobilis et velocitatum ejusdem mobilis.

Nam si densitates sint aequales, impetus sunt in ratione composita voluminum et intensionum motus (per prop. 4 hic); et, si densitates sint aequales, intensiones motus sunt ut velocitates mobilis (per prop. 2 hic). Ergo impetus sunt in ratione composita voluminum et velocitatum.

Haec propositio jam recepta est apud alios, qui impetum seu quantitatem motus magnitudine mobilis et velocitate aestimant, etsi eam solummodo de motu aequidistributo accipere soleant, non assueti velocitatem quandam certam mobili assignare, cujus puncta diversis velocitatibus moventur, quod nos facere et propositiones vulgo de motu tantum aequidistributo intellectas, generaliores reddere operae pretium duximus.

Itaque generaliter, si mobile, cujus magnitudo repraesentatur (fig. 122) recta AB, feratur velocitate repraesentata per rectam $_1A_2A$, vel $_1B_2B$, tunc impetus seu quantitas motus (momentanei) seu summa velocitatum aestimatur per rectangulum $_1A_2B$; rectangula autem sunt in ratione composita laterum; itaque impetus $_1A_2B(6)$ est ad impetum $_1L_2M(20)$ in ratione mobilium AB(3) ad LM(4) et velocitatum $_1B_2B(2)$ ad $_1M_2M(5)$; et si magnitudo mobilis seu volumen sit 3, velocitas graduum 2, impetus erit graduum 6; si volumen 4, velocitas 5, erit impetus 20. Sed si mobile non sit ejusdem ubique densitatis, non velocitas mobilis, quae magnitudine spatii intra datum tempus uniformiter percurrendi aestimatur, sed intensio motus, seu ea velocitas mobilis aequidistribute moti adhibenda est, qua in molem scilicet mobilis ducta idem prodiret, quod ex facto, velocitatibus in punctorum singulorum densitates ordinatim ductis. Nam in velocitate et spatio percurso, voluminis tantum spatio continue applicati ratio habetur, densitas vero in considerationem non venit.

Sint duo globi aequales, unus ferreus, alter ex duobus hemisphaeriis ferreo et plumbeo compositus. Hi si aequalia spatia eodem tempore uniformiter suis centris percurrant, haec duo corpora magnitudine aequalia eadem velocitate moveri dicentur. Sed non erit idem eorum impetus, neque etiam vigor, etsi enim magnitudine dimensionis seu volumine, non tamen mole seu pondere aequantur.

Quod ut appareat clarius, rem ad figuram revocemus. Ut si (fig. 123) globus A♀♀ ferreus moveatur circa punctum immotum B, centro suo A describens arcum circuli $_1A_2A$ et eodem tem-

pore aequali velocitate circa punctum M moveatur globus diametro priori aequalis L♂♄, qui circulo maximo ad LM normali dividatur in duo hemisphaeria, ferreum remotius a B, plumbeum propius, describatque centro suo L arcum circuli priori aequalem ${}_1L_2L$; manifestum est aequalia esse spatia percursa, seu tractus ut velocitates; sunt enim spatia percursa (ob voluminum aequalitatem) in ratione longitudinum percursarum, seu linearum ${}_1A_2A$, ${}_1L_2L$ percursarum a centris gravitatis voluminum, id est centris sphaerarum. Sed secus est de impetibus et vigoribus; nam hemisphaerium plumbeum majorem impetum habet majoremque vigorem quam ferreum. Nempe quaeratur centrum gravitatis globi L, quod cadet infra L in N, quia plumbum gravius ferro: centrum (inquam) gravitatis, non voluminis, sed molis mobilis. Itaque ut velocitas mobilis L repraesentatur per ${}_1L_2L$ longitudinem percursam a centro voluminis L, quae est ipsa longitudo a mobili percursa, et tractus mobilis seu spatium percursum est in ratione composita longitudinis percursae (seu hoc loco ob motum uniformem, velocitatis) et voluminis seu magnitudinis sphaerae, seu ut factum ex multiplicatione longitudinis lineae ${}_1L_2L$ per magnitudinem sphaerae L♂♄; ita intensio motus seu vigor hujus sphaerae repraesentatur per ${}_1N_2N$ longitudinem percursam ab N centro gravitatis ipsius mobilis seu molis sive ponderis sphaerae, quae est id quod infra definiemus longitudinem translationis; et effectus formalis ipsius motus seu translationis quantitas (quam infra definiemus) est factum ex longitudine translationis seu (hoc loco ob motum uniformem) vigore seu motus intensione ducta in molem seu in pondus sphaerae, seu est in longitudinis, quam habet translatio, et ipsius ponderis translati ratione composita. Unde impetus globi A est ad impetum globi L, ut pondus globi A (ferrei) multiplicatum per vigorem ${}_1A_2A$ est ad pondus globi L (semiferrei et semiplumbei) multiplicatum per vigorem ${}_1N_2N$. Et quidem si contingat tanto majorem esse vigorem globi ferrei, quanto majus est pondus semiplumbei, erit impetus utrobique aequalis. Nam ex prop. 3 sequitur, impetibus existentibus aequalibus vigores fore reciproce ut mobilia, quod peculiari propositione enuntiare nihil necesse est.

Caput II.

De Quantitate Translationis seu Effectu motus formali.

Definitio I. Translationis seu effectus formalis a motu quantitas est, cujus mensura est percursio certae longitudinis facta a mobili aequidistribute moto certae molis, seu est factum ex longitudinibus percursis in molem ordinatim ductis.

Sit (fig. 124) corpus similare unius pedis cubici A, 1, motu aequidistributo motum et tempore T percurrens longitudinem 1 seu $_1A_2A$ unius pedis, qui casus sit mensura. Sint jam tria alia corpora ipsi A consimilaria B, 4, C, 8, D, 6 pedum cubicorum quatuor, octo, sex, quae motu aequidistributo percurrunt B,4, C,8, D,6 longitudines pedum $_1B_2B$, 5; $_1C_2C$, 7; $_1D_2D$, 9. Et in B,4, cujus longitudo percursa est 5, quantitas translationis seu effectus formalis a motu est 20; in C,8, cujus longitudo percursa 7, quantitas translationis est 56; in D, 6, cujus longitudo percursa est 9, quantitas translationis est 54.

Nimirum, ut distinctius exponamus, in B,4, cujus longitudo percursa 5, ideo quantitas translationis seu effectus formalis a motu est 20, quoniam vigesies repetitur casus assumtus pro mensura seu hypothesis corporis unius pedis cubici aequidistribute percurrentis longitudinem unius pedis, cum B quater in se contineat congruens ipsi A, et unumquodque ex istis contentis quinquies percurrat unum pedem, unde vigesies habetur congruens ipsi A percurrens longitudinem congruentem ei quam percurrit A, ita ut quoad ea, quae nunc in considerationem veniunt, nullum occurrat discrimen. Quodsi corpora non essent consimilaria, tunc id quod est duplo densius vel duplo gravius altero, censetur intra idem volumen duplo plus materiae similaris continere, et ita longitudinem a quaque parte similari aequidistribute percursam ducendo in materiae quantitatem seu molem, et summam ineundo (quod appello factum ex longitudinibus in moles ordinatim ductis) habebimus quantitatem translationis. Et ideo translationem seu effectum formalem motus subinde voco spatium percursum exaltatum, dum scilicet longitudines non in volumen (ut in simplici spatio percurso), sed in molem resultantem ex volumine et densitate ducantur. Nec minus procedit aestimatio, si mobile non moveatur aequidistribute, sed compenatur ex partibus,

quae varias simul longitudines percurrunt, ut si C et D unum compositum constituant; resoluto enim toto non aequidistribute moto (ut est C et D simul) in partes, quarum quaelibet aequidistribute movetur (C, D), uniuscujusque singulatim aestimanda translatio est, atque ineunda deinde summa. Et aliquando intelligendum est continuari resolutionem in infinitum, quando nulla pars assignari potest, in cujus partibus non rursus occurrat diversitas translationis, ut fit cum corpus gyratur circa axem, nihilominus tamen succedit aestimatio ad eum modum, quo Geometrae lineam curvam comparare possunt cum recta, etsi nunquam resolvendo curvam perveniatur ad partes rectae congruentes. Adjungantur, quae praeveniendo diximus cap. de impetu, maxime ad prop. 5. Translationem autem hactenus explicatam voco motus effectum formalem, quia hic effectus intelligitur ex hoc solo, quod mobile movetur, etiamsi nulla alia impedimenta ab ipso superanda considerentur.

Definitio 2. Longitudo translationis seu longitudo percursa exaltata est longitudo motus aequidistributi, cujus translatio (seu effectus formalis) propositae translationi aequalis molis sit aequalis, seu longitudo, quae ducta in molem mobilis idem producit quod translatio proposita.

Nimirum cum corpus verbi gr. compositum (fig. 125) ex E, 8 et F, 6 non movetur motu aequidistributo, sed partes ejus diversas habent longitudines, ut E, 8 longitudinem ${}_1E_2E, 9$, et F, 6 longitudinem ${}_1F_2F, 16$; poterit quaeri longitudo quaedem media, quae sit 12, exprimens longitudinem translationis totius compositi. Sumatur enim G, 14 aequale ipsi E, 8 et F, 6 simul, motu aequidistributo longitudinis ${}_1G_2G, 12$ motum, eadem prodibit quantitas translationis. Nam translatio ipsius E, 8 per longitudinem 9 est 72, ipsius F, 6 per longitudinem 16 est 96; summa translationum est 168. At translatio ipsius G, 14 per longitudinem 12 est etiam 168.

Memorabile autem est, si omnia mobilis perturbate licet moti puncta tendant in easdem semper partes, viam centri gravitatis esse illam ipsam, quam hic definivimus longitudinem translationis, quod suo loco demonstravimus, nunc in hoc ipso exemplo ostendamus. Sit ipsorum ${}_1E$ et ${}_1F$ centrum gravitatis commune ${}_1K$, et ipsorum ${}_2E$ et ${}_2F$ centrum commune ${}_2K$, dico ${}_1K_2K$ viam centri

gravitatis esse etiam 12. Nam in rectam ${}_1E_2E_1F_2F$ (haec enim puncta ponamus jacere in directum) et ${}_1K_2K$ demittantur normales ${}_1L_2L$, et ${}_2N_1F$ distantia inter mobile ${}_2E_2N$ et mobile ${}_1F$ in recta dicta sit 1; reperietur ${}_1E_1L$ esse $7\frac{4}{7}$, et ${}_2E_2L$ esse $10\frac{4}{7}$. Jam ${}_1E_2E$ est 9; et patet esse ${}_1K_2K$ aequal. ${}_2L_2E + {}_2E_1E - {}_1E_1L$. Jam 12 est aequal. $10\frac{4}{7} + 9 - 7\frac{4}{7}$. Ergo ${}_1K_2K$ aequal. 12, adeoque ${}_1G_2G$ aequal. ${}_1K_2K$. Idem succedit in aliis exemplis quibuscunque. Et quidem si mobile non sit aequalis ubique densitatis, non adhibendum est centrum voluminis, sed molis, quae melius intelligentur adjunctis quae diximus ad prop. 5 capitis de impetu. Et quoniam longitudo translationis a longitudine percursa non differt, nisi quod in illa aestimanda etiam densitatis in mobili ratio habetur; ideo longitudo translationis etiam a me vocatur longitudo percursa exaltata, ut translatio ipsa est spatium exaltatum.

Propositio 1.

In motibus aequidistributis aequalium molium translationes sunt ut longitudines percursae.

Sint (fig. 126) AB et CD aequalis molis, et mota motibus aequidistributis ${}_1A_2B$ et ${}_1C_4D$; ajo translationes seu effectus formales esse ut longitudines ${}_1A_2A_3A$ et ${}_1C_2C_3C_4C$. Mensura longitudinum communis, si commensurabiles sint, sit ${}_1E_2E$, quam longitudo ${}_1A_2A_3A$ contineat si placet bis, et ${}_1C_2C_3C_4C$ ter, et longitudinem ${}_1E_2E$ aequidistribute percurrat mobile EF aequale ipsis AB vel CD. Jam (per def. 1 hic) potest translatio ${}_1E_2F$ accipi pro mensura communi, eaque toties continetur in translatione ${}_1A_3B$ vel ${}_1C_4D$, quoties longitudines continent mensuram, nempe in ${}_1A_3B$ bis, et in ${}_1C_4D$ ter. Ergo translationes sunt ut longitudines. Si longitudines sint incommensurabiles, possunt pro ipsis assumi commensurabiles sic, ut error sit minor quovis dato, atque adeo error est nullus.

Propositio 2.

In motibus aequidistributis aequalium longitudinum translationes sunt ut mobilia.

Sint (fig. 127) mobilium AB, CD motus aequidistributi, et longitudines ${}_1A_2A$, ${}_1C_2C$ aequales; ajo translationes ${}_1A_2B$, ${}_1C_2D$ esse ut mobilia. Sit mobilium mensura communis EF, quae transferatur per longitudinem ${}_1E_2E$ prioribus aequalem; patet translationem

${}_1E_2F$ esse mensuram translationum ${}_1A_2B$ et ${}_1C_2C$ et toties in illis contineri, quoties EF in mobilibus. Sunt ergo translationes ut mobilia. Quodsi mobilia sint incommensurabilia, eadem manet ratio per dicta in demonstr. praec.

Propositio 3.

Translationes (vel effectus formales a motu) sunt in ratione composita mobilium et longitudinum aequidistribute percursarum.

Sint (fig. 128) mobilium AB, CD motus aequidistributi per longitudines ${}_1A_2A$, ${}_1C_2C$; ajo translationes ${}_1A_2B$, ${}_1C_2D$ esse in ratione composita mobilium AB, CD et longitudinum ${}_1A_2A$, ${}_1C_2C$. Si essent longitudines aequales, constat per praecedentem; si sint inaequales, sumatur majoris ${}_1C_2C$ pars ${}_1C_2C$ aequalis minori ${}_1A_2A$, et per ${}_1C_2C$ sit translatio ${}_1C_2D$. Erit translatio ${}_1A_2B$ ad translationem ${}_1C_2D$, ut AB ad CD (per prop. praec.) Jam translatio ${}_1C_2D$ est ad translationem ${}_1C_2D$, ut ${}_1C_2C$ (seu ${}_1B_2B$) est ad ${}_1C_2C$ (per prop. 1 hic.). Ergo jungendo prima postremis, est translatio ${}_1A_2B$ ad translationem ${}_1C_2C$ in ratione composita mobilium AB ad CD et longitudinum ${}_1B_2B$ ad ${}_1C_2C$.

In numeris, si mobile AB sit ad mobile CD ut 3 ad 5, et longitudo ${}_1A_2A$ ad longitudinem ${}_1C_2C$ ut 2 ad 4 (seu 1 ad 2), erit translatio ${}_1A_2B$ ad translationem ${}_1C_2C$, ut 6 ad 20 (seu 3 ad 10).

Propositio 4.

Translationes seu effectus formales in omni motu sunt in ratione composita mobilium et longitudinum translationis.

Translationes enim quaecunque propositae (fig. 129) ${}_1B_1A_2A_2B$, et ${}_1D_1C_2C_2D$ sunt inter se ut translationes aequidistributae, ipsis (respective) aequales ${}_2A_3B$, ${}_2C_2D$, et translationes aequidistributae ${}_2A_3B$ et ${}_2C_3D$ sunt in ratione composita mobilium AB ad CD et longitudinum percursarum ${}_2A_3A$ et ${}_2C_2C$ (per prop. 3 praeced.); ergo translationes quaecunque sunt in ratione composita mobilium AB ad CD et longitudinum ${}_2A_3A$ et ${}_2C_3C$, quae percurrendae essent motu aequidistributo, ut translatio aequidistributa ipsi propositae possit esse aequalis (seu ut translatio ${}_2A_3B$ aequalis sit ipsi ${}_1B_1A_2A_2B$ et translatio ${}_2C_3C$ ipsi ${}_1D_1C_2C_2D$). Sed hae longitudines ${}_2A_3A$, ${}_2C_2C$ translationum aequidistributarum ${}_2A_3B$, ${}_2C_2C$ propositis

aequalium sunt ipsae longitudines translationum propositarum (per def. 2 hic). Ergo translationes sunt in ratione composita mobilium et longitudinum translationis.

In numeris et exemplo ponatur in plano semper eodem (fig. 120) radius AB centro B transferri ex ${}_1AB$ in ${}_2AB$, et radius DC ex ${}_1CD$ in ${}_2CD$; et translationes erunt ut sectores circulares B_1A_2A et D_1C_2D, hisque aequales translationes aequidistributae erunt ut rectangula his sectoribus aequalia ${}_2A_3B$ et ${}_2C_3D$, posito altitudines esse mobiles rectas AB, CD et bases seu longitudines percurrendas ${}_2A_3A$, ${}_2C_3C$ esse dimidios arcus ${}_1A_2A$ et ${}_1C_2C$; et ${}_2A_3A$, ${}_2C_3C$ erunt longitudines translationum B_1A_2A et D_1C_2C (per defin. 2 hic). Si jam sit mobile CD duplum mobilis AB, et ipsa ${}_2C_3C$ (longitudo translationis D_1C_2D) tripla ipsius ${}_2A_3A$ (quae est longitudo translationis B_1A_2A) erit translatio D_1C_2D sextupla translationis B_1A_2A, quemadmodum aequales translationes aequidistributas in eadem esse proportione, nempe translationem ${}_2C_3D$ sextuplam translationis ${}_2A_3B$. Quae omnia eodem modo intelligenda sunt etiam cum translationes per areas spatiorum designatorum exhiberi non possunt; id enim tantum locum habet, cum partes mobilis sibi non succedunt, et linea a puncto mobilis descripta eundem semper facit angulum ad mobile. Unde translationes solidorum nullas dant figuras, etsi figuris proportionalibus arte geometrica repraesentari possint, quoniam solidum moveri non potest, quin partes sibi succedant.

Propositio 5.

In motibus aequalium densitatum, translationes sunt ut spatia percursa, et longitudines translationum sunt ut longitudines tractuum sive spatiorum percursorum (seu ut longitudines percursae).

Nimirum si inspiciatur figura propositionis praecedentis, rectae mobiles AB et CD sint translatae ex A_1B in A_2B et C_1D in C_2D; longitudo percursa est aequalis ${}_2A_3A$ vel ${}_2C_3C$, quam si percurreret AB vel CD motu aequidistributo ${}_2A_3B$ vel ${}_2C_3D$, spatium percursum seu tractus foret aequalis tractui priori ${}_1B_1A_2A$ vel ${}_1D_1C_2C$, seu est longitudo, quae ducta in volumen dat tractum (per defin. 2 cap. de tractu). Porro longitudo translationis est, quae ducta in mobilis molem dat translationem (per def. 2 et prop. 4), id est in mobilis volumen, si densitates sint eaedem (per prop. 1

cap. de quantitate motus), id est quae ducta in mobilis volumen dat quantum molis quantam longitudinem percurrerit; hoc ipsum enim translatio est (per def. 1 hic), id est quantum hoc loco voluminis quantum longitudinis percurrerit, id est (per def. 2 cap. de tractu seu spatio) quantum percursum sit spatii. Sunt ergo translationes ut spatia, et longitudines translationum ut longitudines spatiorum, nempe ut $_2A_2A$, $_2C_2C$. Longitudo autem spatii vel translationis semper ea intelligitur, secundum quam si mobile aequidistribute translatum esset, tantundem in summa spatii vel translationis efficeret, quantum nunc, ut satis explicatum est.

Propositio 6.

Si intensiones motuum tempori ordinatim applicentur, factum inde est ut longitudo translationis; et si impetus tempori ordinatim applicentur, factum est ut quantitas translationis seu effectus formalis; adeoque impetus (temporis elemento ordinatim applicatus) est elementum effectus.

Demonstratur eodem modo quo ostensum est (prop. 8 de velocitate in genere) ex velocitatibus mobilis ordinatim applicatis ad tempus, in quo quaeque fuit, fieri longitudinem spatii percursi, seu velocitates in elementa temporis respondentia ordinatim ductas esse ut elementa spatii. Nam nihil interest inter velocitatem mobilis et intensionem motus, et inter longitudinem percursam et longitudinem translationis, quam quod aestimatur in illis quantitas sola voluminis, in his quantitas molis seu voluminis et densitatis. Quoniam igitur vigores elementis temporis ordinatim applicati exhibent longitudines translationum, etiam vigores in molem semper constantem ducti seu impetus elementis temporis semper ordinatim applicati dabunt longitudinem ductam in eandem molem, seu ipsam quantitatem translationis.

Transferatur huc figura prop. 8 itemque prop. 10 cap. de velocitate in universum, et in figura prop. 8 BCE sit ut tempus et CG sint ut intensiones motus seu vigores, figura BFGKE erit ut longitudo translationis. Et similiter in figura prop. 10 dicti cap. si AEB sit ut tempus, EF ut moles, FG ut intensiones motus seu vigores, rectangula EFGH ut impetus seu facta ex mole in vigores, figura A_1G_2GB ut longitudo translationis, solidum ex omnibus

impetibus (parallelis EFGH) tempori AEB applicatis seu solidum factum ex mole EF in longitudinem translationis A_1G_2GB ducta seu solidum $_1E_1F_1H_1G_2G_2H_2E$ vel ei aequale solidum A_1BCDLF erit ut ipsa quantitas integra effectus a motu formalis seu quantitas translationis sub pondere translato et longitudine translationis comprehensa.

Definitio 3. Vigor medius (temporis) seu velocitas media exaltata est, quae ducta in tempus impensum dat longitudinem translationis, seu est velocitas exaltata, qua constanter motum mobile tantundem quantum nunc longitudinis exaltatae aequali tempore percurrisset. Et impetus medius est, qui fit ex velocitate media exaltata in molem ducta, seu qui in tempus ductus dat spatium exaltatum seu quantitatem translationis.

Conferantur haec cum dictis ad defin. 3 capitis de velocitate in universum, et adhibita figura propositionis 10 ejusdem capitis; omnia enim eodem modo se habent, modo pro volumine moles, pro velocitate longitudineque simplicibus eaedem exaltatae, et pro impetu restricto absolutus substituantur.

Propositio 7.

Media arithmetica sunt: **Densitas** seu gravitas specifica mobilis, inter omnes punctorum voluminis densitates seu gravitates specificas elementares; **Velocitas** mobilis, inter omnes punctorum voluminis ejus velocitates, seu inter omnes velocitates voluminis elementares; **Longitudo** a mobili **percursa**, inter omnes longitudines elementares seu a voluminis punctis simul percursas; **Velocitas media** temporis, inter omnes velocitates mobili durante toto tempore seu quolibet instanti ejus competentes; **Protractio media** mobilis, seu extensio velocitatis mediae, inter omnes velocitatum mobilis extensiones seu inter omnes protractiones toto tempore seu quolibet instanti ejus mobili competentes; **Intensio motus** seu vigor mobilis seu velocitas exaltata, inter omnes velocitates materiae elementares seu per quantitatem materiae seu molem distributas; **Longitudo transla-**

tionis inter omnes longitudines percursas per quantitatem materiae seu molem distributas; **Vigor medius** temporis, inter omnes vigores durante tempore seu quolibet instanti ejus mobili competentes; **Impetus medius**, inter omnes impetus durante tempore seu quolibet instanti mobili competentes: posito semper elementa ejus, ad quod applicantur elementaria, seu ea, inter quae medium quaeritur, esse aequalia.

Haec ad eum modum demonstrari possunt, quo demonstrata est propositio 11 de velocitate, adhibita nimirum quantitatis resultantis et medii arithmetici def. 5 et 6 cap. de ductibus, et inde prop. 18 cap. ejusd. et accedentibus definitionibus singulorum aut inde ductis propositionibus; ut pro densitate, cum densitas ducta in volumen faciat molem (per prop. 3 de quantitate materiae) et moles seu quantitas materiae etiam fiat ex densitatibus singulorum mobilis constituentium, utique densitas est medium arithmeticum (per dict. prop. 18 de ductibus). Similia intelliguntur de velocitate ex prop. 4 juncta prop. 9 cap. de velocitate in universum; de longitudine percursa ex def. 2 cap. de spatio, juncta ejusd. def. 1; de velocitate media et protractione media ex prop. 11 cap. de velocitate in universum; de vigore seu intensione motus seu promptitudine agendi seu velocitate exaltata per prop. 3 cap. de impetu, juncta defin. 1 ejusdem; de vigore medio temporis et impetu medio temporis per def. 3 hic.

Cum elementa aequalia dicimus, concipimus volumen, vel molem, vel tempus (quae hoc loco recipientia sunt) dividi in partes aequales vel assignabiles, vel quando revera ubique varietas est, in partes inassignabiles indefinitae parvitatis inter se aequales, et hoc intelligimus, quando volumen dividimus in puncta, tempus in instantia, molem in quasi puncta seu signa, concipiendo in uno puncto indefinita signa seu concipiendo quantitates punctorum pro gradu densitatis variantes instar linearum. Et ita absolute dicimus, densitatem mobilis esse mediam arithmeticam inter densitatem omnium mobilis punctorum, et intensionem motus in mobili esse velocitatem mediam arithmeticam inter velocitates omnium signorum seu quasi punctorum quantitatem materiae constituentium, quae in punctis

voluminis densioribus plura finguntur pro ratione densitatis, et velocitatem mediam temporis esse mediam arithmeticam inter omnium instantium velocitates; instantia enim signa et puncta concipiuntur ut elementa aequalia temporis, materiae vel voluminis. Porro velocitas ista mobilis, item longitudo percursa ejusdem quae est media arithmetica inter omnium punctorum velocitates vel longitudines percursas, est velocitas itemque longitudo percursa centri gravitatis figurae mobilis seu voluminis. Et similiter vigor mobilis, item longitudo translationis ejusdem, quae est media arithmetica inter omnium signorum materiae velocitates et longitudines percursas, est velocitas itemque longitudo percursa centri gravitatis totius mobilis seu ponderis considerata non tantum figura, sed et diversa in ipsa gravitate specifica seu densitate, quatenus intelligitur omnia mobilis puncta tendere ad easdem partes in parallelis.

Propositio 8.

Cessante densitatis consideratione respective coincidunt (1) volumen, (2) velocitas mobilis, (3) impetus restrictus seu protractio, (4) velocitas temporis media, (5) impetus restrictus temporis medius, (6) longitudo a medio percursa, (7) spatium a mobili percursum, cum (1) mole, (2) velocitate mobilis exaltata (seu intensione motus sive vigore), (3) impetu mobilis seu quantitate motus, (4) vigore temporis medio (seu velocitate exaltata media), (5) impetu temporis medio, (6) longitudine exaltata percursa seu longitudine translationis, (7) quantitate translationis seu effectus formalis a motu.

Neque enim haec aliter differunt, quam quod in posterioribus densitas in considerationem venit, cujus in prioribus ratio non habebatur, ut jam attigimus ad prop. 5 hic.

Placet haec omnia brevissime sub conspectum in figuris exhibere (fig. 130). Recta MNP sit volumen mobilis, cujus punctis quibuscunque N(N) applicentur ad angulos rectos densitates elementares respondentes MQ, NR, (N)(R), PS, et figura orthogonia MQRSP repraesentabit pondus mobilis seu molem. Cui figurae si aequale fiat rectangulum PMβ, erit Mβ densitas mobilis (inter punctorum densitates media arithmetica), quae ducta in vo-

lumen MP dat molem PMβ seu MQRSP. Ejusdem voluminis MP punctis quibuscunque N applicentur ad angulos rectos velocitates singulorum punctorum seu velocitates elementares respondentes MT, NV, PX, et figura orthogonia plana MTVXP (figurae orthogoniae planae MQRSP normaliter insistens) repraesentabit impetum restrictam seu summam velocitatum elementarium voluminis seu protractionem. Cui figurae si aequale fiat rectangulum λMP, erit Mλ velocitas mobilis (inter punctorum velocitates media arithmetica), quae ducta in volumen MP dat impetum restrictum seu protractionem λMP seu MTVXP. At solidum MQRSPXVTYZΩ factum ductu ordinato figurae MTVXP in figuram MQRSP seu factum ex punctorum velocitatibus in punctorum gravitates specificas seu densitates elementares ordinatim ductis vel factum ex velocitatibus elementaribus in molem ordinatim ductis, est impetus verus seu absolutus seu ipsa quantitas motus. Huic solido MQRSPXVTYZΩ impetum repraesentanti fiat aequale solidum contentum sub recta normali constante Mπ ducta in figuram MQRSP (molem) vel solidum rectangulum βMP$\xi\pi$234 factum ex ductu (absoluto) rectae normalis constantis Mπ in rectangulum PMβ, et altitudo ejus seu recta normalis constans Mπ erit intensio motus seu velocitas exaltata vel vigor, et impetus seu quantitas motus fiet ex ductu vigoris Mπ in molem MRSP vel PMβ vel ex ductu in se invicem voluminis MP, densitatis ipsius mobilis Mβ et velocitatis exaltatae ejusdem mobilis seu vigoris Mπ. Quodsi manente mole MQRSP velimus ipsas MT, NV, PX significare non velocitates seu longitudines momentaneas, sed ipsas longitudines assignabiles a punctis voluminis MNP percursas, adeoque figuram MTVXP non significare protractionem seu elementum tractus sive impetum restrictum sive impetum voluminis, seu spatium elementare sive momentaneo temporis intervallo percursum, quae omnia synonyma sunt, sed ipsum spatium percursum certo tempore assignabili, tunc Mλ non erit velocitas mobilis ut prius, seu longitudo momentanea ab eo percursa, sed ipsa longitudo assignabilis percursa a mobili; et solidum MQRSPXVTYZΩ factum ex ductu ordinato figurae MTVXP in molem MQRSP non erit impetus seu quantitas ut ante, sed erit quantitas effectus formalis a motu, seu quantitas translationis determinans, quantum molis sit translatum; et recta Mπ, quae ducta in MQRSP vel in rectangulum βMP sub volumine

et densitate contentum, solidum solido dicto MQRSPXVTYZΩ aequale, nempe solidum rectangulum $\beta MP\xi\pi 234$ exhibet, ea, inquam, recta $M\pi$ repraesentat longitudinem translationis seu longitudinem percursam exaltatam, quae ducta in molem seu in factum ex volumine et densitate producit quantitatem translationis seu effectus formalis a motu.

Jam ut applicatio horum omnium ad tempus intelligatur, transferatur huc figura propositionis 10 capitis de velocitate in universum (fig. 131), quam et ad def. 3 hic repeti jussimus, ubi AEEB est tempus, EF(1) moles, et EG(2) intensio motus sive vigor seu velocitas exaltata mobilis, et rectangulum EFGH est (3) impetus mobilis seu quantitas motus seu factum ex velocitate ejus exaltata in molem, et solidum ipsum $_1E_1F_1H_1G_2G_2H_2E$ ex omnibus istis rectangulis inter se parallelis tempori normaliter applicatis conflatum est (7) quantitas translationis seu quantitas effectus formalis a motu, quod solidum etiam producitur ducendo molem EF in figuram $_1E_1G_2G_2E$, quae repraesentat factum ex velocitatibus EG tempori EE ordinatim applicatis, hoc est (6) longitudinem translationis seu longitudinem percursam exaltatam. Et cum eadem longitudo translationis etiam exhibeatur per rectangulum ABCD factum ex ductu temporis AEB in BC (4) velocitatem exaltatam mediam temporis seu intensionem motus mediam, hinc etiam solidum translationis seu quantitas effectus producitur ductu molis EF in ABCD factum ex ductu temporis AEB in velocitatem exaltatam mediam BC, unde nascitur solidum rectangulum $ABCDL_1F_2F$, imo idem solidum rectangulum seu eadem quantitas effectus fit ductu temporis AB in rectangulum $_1EDL_1F$ (5) impetum medium temporis exprimens, qui fit ex mole EF in velocitatem exaltatam mediam $_1ED$ ducta.

Si vero in eadem figura omnibus retentis lineis ductis tantummodo EF significet (1) volumen, remota scilicet consideratione densitatis, sive quod nulla sit in natura (si rem ad rigorem philosophicum revocemus) sive quod ubique in materiis occurrat eadem densitas, ita ut molis et voluminis notio coincidat, tunc EG non significabit velocitatem mobilis exaltatam, seu inter omnium materiae signorum sive quasi punctorum pro variis densitatibus in eodem puncto multiplicium velocitates mediam, sed velocitatem mobilis ipsam, nempe simplicem seu absolute sic dictam

inter punctorum mobilis velocitates mediam; et cessante densitate coincidet velocitas mobilis cum intensione motus seu vigore, et rectangulum EFGH non significabit factum ex velocitate exaltata EG in EF molem, sed (3) protractionem mobilis factam ex velocitate simplici EG in volumen EF, coincidetque in casu cessantis densitatis protractio seu impetus restrictus cum impetu mobilis absoluto; et AD vel BC non significabit amplius velocitatem exaltatam mediam, sed (4) velocitatem (simpliciter) temporis mediam, quae ducta non in mobile, hoc est in molem vel volumen EF dabit (5) impetum restrictum temporis medium seu protractionem temporis mediam ${}_1EDLF$ in casu cessantis densitatis coincidentem cum impetu temporis medio; et figura ${}_1E_1G_2G_2E$ vel aequale ei rectangulum ABCD non exhibebit longitudinem percursam exaltatam, sed (simpliciter) (6) longitudinem a mobili percursam, factam ex mobilis velocitatibus EG tempori AEB ordinatim applicatis vel etiam factam ex velocitate mobilis media BC in tempus AB ducta, coincidentem jam cum longitudine translationis, si cesset densitas. Et postremo solidum ${}_1E_1F_1H_1G_2F_2H_2E$ seu aequale ei solidum rectangulum $ABCDL_1F_2F$ repraesentabit (7) spatium percursum seu tractum, factum ex EFGH protractionibus seu tractus elementis tempori ordinatim applicatis seu ex ductu protractionis mediae ${}_1EDL_1F$ in tempus AB, vel ex ductu longitudinis percursae ABCD in volumen mobilis EF; et ita et ipsum spatium percursum in casu cessantis densitatis seu molis cum volumine coincidentis, coincidet cum translatione seu quantitate effectus per motum toto tempore producti.

Propositio 9. Definitio 4.

Idem est factum ex velocitatibus singulorum mobilis punctorum in volumen ordinatim ductis, et factum ex velocitate mobilis in volumen; et hoc factum dicatur protractio seu elementum tractus seu extensio velocitatis seu impetus restrictus.

Nam (ex def. 2. de spatio juncta def. 1) idem est factum ex longitudinibus simul percursis singulorum mobilis punctorum in volumen ordinatim ductis, et factum ex longitudine a mobili simul percursa in volumen (absolute) ducta. Sed velocitates sunt ut longitudines percursae dato tempore in casu motus aequivelocis (per def. 1 hic); ergo etiam idem est factum ex velocitatibus singulo-

rum mobilis punctorum in volumen ordinatim ductis, et velocitate mobilis in volumen (absolute) ducta.

Voco autem protractionem etiam elementum tractus, quia mox ostendetur, ex protractionibus tempori applicatis in unum additis fieri spatium percursum seu tractum. Quid autem sit protractio, ita intelligetur in exemplo. Ponatur (fig. 132) mobilem rectam AB in plano moveri circa extremum immotum A, et punctorum B velocitates esse ut $_1B_2B$, seu ut rectas $_2BD$ ipsi A_2B ad angulos rectos applicatas, seu in A_2B ordinatim ductas, et triangulum AD_2B repraesentabit factum ex velocitatibus in volumen, seu protractionem voluminis, sive promotionem elementarem ejus, quam et repraesentabit rectangulum AGF_2B aequale huic figurae AD_2B, factum ex $_2CE$ velocitate mobilis (quae inter omnes punctorum velocitates semper arithmetice media est) ducta in volumen AB. Protractio autem coincidit cum impetu, quando moles mobilis coincidit cum volumine, seu cum nulla habetur ratio densitatis. Itaque protractionem voco et extensionem velocitatis, scilicet per volumen, item impetum restrictum ademta impetui absoluto consideratione densitatis. Posset etiam dici impetus voluminis, ut impetus absolutus posset dici impetus molis; sed sufficit impetum voluminis dici restrictum, impetum molis vero dici impetum absolute.

Propositio 10.

Ex impetibus restrictis seu elementis tractus sive spatii ad tempus ordinatim applicatis fit tractus seu spatium eo tempore a mobili percursum.

Sit (fig. 131) tempus ut recta EE, volumen mobilis EF vel GH, velocitas mobilis EG vel FH, protractio seu elementum tractus seu factum ex mobili in volumen rectangulum EFHG; erit spatium tempore EE a mobili EF percursum, ut solidum $_1E_1F_1H_1G_2G_2H_2E$ factum ex rectangulis seu protractionibus ad EE ordinatim (ad angulos rectos) applicatis. Nam (per prop. 8 hic) longitudo toto tempore a mobili percursa est ut hujus solidi hedra seu figura $_1E_1G_2G_2E$ facta ex velocitatibus EG tempori EE ordinatim applicatis, et crassities solidi hujus ubique constans EF respondet volumini; ergo solidum ipsum respondebit facto ex longitudine in volumen, id est spatio percurso.

Definitio 8. Velocitas media (temporis) est quae ducta in tempus impensum dat longitudinem a mobili percursam, seu velocitas, qua constanti motum mobile tantundem quantum nunc longitudinis percurrisset; et impetus restrictus medius est qui fit ex velocitate media in volumen ducta, seu quae in tempus ducta dat spatium.

Nempe (in fig. praeced.) velocitas inter omnes mobilis EF velocitates EG, quas durante tempore EE habuit, media est BC, talis nempe, quae ducta in tempus $_1E_3E$ seu AB facit rectangulum ABCD aequale ipsi figurae $_1E_1G_3G_3E$; adeoque longitudo, quam percurreret mobile EF constanti velocitate AD vel BC, quae est ut rectangulum ABCD, erit aequalis longitudini quam percurreret EF variatis velocitatibus EG; et rectangulum $_3FBC$ sub velocitate media BC et volumine mobilis EF contentum erit ut impetus restrictus medius seu medium ex omnibus tractus seu spatii elementis, et hoc rectangulum protractionem mediam repraesentans ductum in tempus $_1E_3E$ seu AB dabit rectangulum solidum ABCDLF aequale ipsi solido $_1E_1F_1H_1G_3G_3H_3E$ spatium repraesentanti. Sic in motu uniformiter accelerato velocitas media, qua constanter motum mobile eandem longitudinem percurreret, est ultimae acquisitae dimidia. Nam (fig. 133) tempore existente AEB, velocitatibus EG, longitudines percursae sunt ut triangula AEG; et tota longitudo percursa ut triangulum ABP, cui aequale est rectangulum ABCD repraesentans longitudinem tempore AB constante velocitate media MN percursam.

Propositio 11.

Velocitas media, item impetus restrictus medius est medium arithmeticum inter omnes mobili intra tempus propositum competentes velocitates aut impetus restrictos tempore uniformiter crescente ordine assumtos.

Nam velocitas (protractio) media ducta in tempus (absolute) idem producit, quod omnes durante tempore existentes mobilis velocitates in tempus ordinatim ductae (per def. 8 hic). Ergo est velocitas absoluta in tempore resultans ex velocitatibus elementorum temporis (per def. 5 cap. de ductibus), et proinde per prop. 18 de ductibus) est media arithmetica inter omnes elemen

torum, temporis aequalium, velocitates, seu inter omnes velocitates tempore uniformiter crescente assumtas.

Propositio 12.

Longitudines percursae sunt in ratione composita velocitatum mediarum (temporis) et temporum; et spatia percursa sunt in ratione composita velocitatum mediarum (temporis), temporum et voluminum mobilibus competentium, seu impetuum restrictorum mediorum et temporum.

Nam si mobile, cujus volumen seu magnitudo pedum 2, tempus impensum minutorum 3, velocitas toto hoc tempore media graduum 5, percurrerit longitudinem quandam et spatium, erit impetus restrictus medius mobilis ut 2 in 5 seu ut 10 (per def. 2 hic), longitudo percursa (silicet ab ejus centro gravitatis, si omnia puncta tendunt in easdem partes) ut 3 in 5 seu ut 15 (per def. 3 hic), et spatium percursum ut 10 in 3 (per dict. def. 3 hic) adeoque (per def. 2 hic) ut 2 in 3 in 5, seu ut 30.

Caput IIII.

Conspectus phorometricus.

Definitio 1. Moles seu quantitas materiae est factum ex ductu voluminis seu extensionis materiae in densitatem seu materiae intensionem.

Ut si mobile extensione seu volumine sit alterius triplum, intensione autem materiae seu densitate vel gravitate specifica sit ejusdem duplum, tunc mole seu quantitate materiae (in gravibus, pondere) erit ejus sextuplum. Quantitatem autem materiae intelligo ad rem facientem, etsi non repugnem, imo arbitrer potius, leviora seu rariora esse spongiosiora et in eodem volumine aequalem semper esse materiae quantitatem computata materia quadam insensibili poris interfluente, sed quae nunc a nobis non consideratur, quia motus ejus motu mobilis propositi non continetur.

Definitio 2. Densitas mobilis est media arithmetica inter omnes punctorum ejus densitates. Pro punctis etiam sumi possunt elementa voluminis aequalia inter se.

Definitio 3. Medium arithmeticum inter plura

est quod multiplicatum per eorum numerum producit quantitatem aequalem eorum summae.

Ut si virga sit tricubitalis, cujus unus cubitus habeat gravitatem specificam ut 3, alter ut 4, tertius ut 8, erit gravitas specifica media arithmetica seu totius compositi $3+4+8$ divisi per 3, seu $\frac{15}{3}$ seu ut 5. Ita si corpus ex variis metallis compositum ubique variet specifica gravitate ob varias eorum in variis partibus misturas, tunc ipsi toti attribuetur gravitas specifica, quae sit media arithmetica inter omnes punctorum (seu partium aequalium inassignabilium magnitudine quantum satis exiguarum, ut gravitas eorum specifica pro uniformi ubique in ipsis sine errore notabili in toto haberi possit) specificas gravitates, estque ea ipsa gravitas specifica, quae prodiret massa ipsa in corpus (ad sensum) homogeneum igne refusa. Nam ut prius pondus resultabat ex singulis gravitatibus specificis aequalium elementorum seu punctorum in unum additis, ita nunc idem pondus prodit ex media illa gravitate specifica iisdem elementis applicata, seu per illorum numerum multiplicata.

Definitio 4. Longitudo percursa a mobili est medium arithmeticum inter omnes longitudines seu lineas a quovis mobilis puncto percursas. Dicitur et longitudo tractus.

Fit saepissime, ut diversa puncta mobilis inaequales simul lineas describant, ut fit cum mobile est fluidum vel discretum, imo et cum solidum et continuum est, veluti cum agitur circa aliquod centrum, et tunc attribuenda est mobili longitudo percursa media; estque (ut suo loco a nobis ostenditur) longitudo viae centri gravitatis figurae ipsius mobilis, quando omnia mobilis puncta tendunt in easdem partes.

Definitio 5. Spatium a mobili percursum seu tractus est factum ex ductu voluminis, quod occupat mobile, in longitudinem percursam.

Hoc spatium coincidit figurae a nobis descriptae, quando durante motu unum punctum mobilis non succedit in locum alterius, et linea a quovis puncto mobilis descripta eundem semper angulum facit ad mobile. Unde etiam eo casu via mobilis seu figura descripta a mobili mensurari potest per viam centri gravitatis in magnitudinem mobilis ductam; sed in aliis casibus non coincidit via cum tractu seu spatio percurso a nobis hic definito.

Definitio 6. Velocitas est (formalis) affectio mobilis, quae est proportionalis longitudini quam percurreret mobile intra datae magnitudinis tempus eadem ipsa affectione retenta, et proinde manere intelligitur haec affectio, quamdiu aequalibus temporibus aequales sunt longitudines percursae.

Formalem affectionem mobilis hic intelligimus, quae ipsi inest quatenus mobile est. Si jam duo sint mobilia M et N, et mobile M tempore T ea quam habet formali affectione retenta percursurum esset longitudinem L, at mobile N tempore aequali ipsi T sua itidem tali affectione simili retenta percursurum esset longitudinum λ, sitque longitudo L dupla, tripla, vel utcunque multipla longitudinis λ, sitque etiam exinde dicta affectio mobilis M similiter dupla, tripla, vel generaliter aequimultipla talis affectionis ipsius mobilis N, tunc tales affectiones dicentur velocitates. Itaque ut longitudo percursa a mobili est media arithmetica inter longitudines percursas a punctis mobilis, ita et velocitas mobilis est media arithmetica inter velocitates a punctis percursas, et quando tendunt omnia puncta in easdem partes, est velocitas centri gravitatis figurae.

Definitio 7. Longitudo translationis est medium arithmeticum inter omnes longitudines percursas aequalium materiae in mobili contentae elementorum.

Differt a longitudine percursa seu a longitudine tractus, quod in ea determinanda medium tantummodo quaeritur inter longitudines omnium elementorum aequalium voluminis sive figurae mobilis, vel (quod eodem redit) omnium figurae punctorum, sed quoniam in una figurae parte plus materiae est quam in alia, ita ut unum punctum alio densius concipi possit, ideo possunt fingi elementa materiae minima, seu quasi puncta sive **signa**, quorum plura pauciorave in voluminis punctis continentur prout est densius; et inter longitudines ab omnibus istis signis percursas media arithmetica est ipsa longitudo translationis, toti massae seu materiae adscribenda. Et quatenus omnia puncta mobilis tendunt in parallelis ad easdem partes, longitudo translationis est ipsa **longitudo percursa a centro gravitatis totius massae.**

Definitio 8. Intensio motus seu vigor refertur

ad longitudinem translationis, ut velocitas ad longitudinem percursam.

Itaque est affectio proportionalis longitudini translationis intra datae magnitudinis tempus ipsamet affectione retenta absolutae; et est velocitas media inter omnium materiae signorum seu elementorum minimorum (vel aequalium saltem) velocitates; itemque est velocitas centri gravitatis totius massae in modo jam explicato.

Definitio 9. Impetus est factum ex ductu vigoris in molem.

Ut si mobilis centrum gravitatis sit duplo velocius, quam alterius, et mobile ipsum altero triplo gravius, erit impetus mobilis sextuplo major.

Definitio 10. Translatio seu effectus formalis a motu est factum ex longitudine translationis ducta in molem.

Nempe si pondus sex librarum transferatur per longitudinem quinque pedum, effectus formalis a motu seu quantitas translationis erit trigicupla ejus, quae foret, si pondus unius librae esset translatum per longitudinem unius pedis. Voco autem effectum motus formalem, quia nihil aliud hic consideratur praecise quam motus mobilis, non vero aliud extrinsecum obstaculum occurrens, neque gravitas aliave peculiaris mobilis qualitas motum juvans vel impediens.

Definitio 11. Si ratio habeatur densitatis in mobili, magnitudo mobilis dicitur moles; longitudo translationis dicitur longitudo exaltata; vigor mobilis seu intensio motus dicitur velocitas exaltata; et ut factum ex ductu vigoris in molem dicitur impetus, ita factum ex ductu velocitatis in volumen dicitur impetus restrictus, item protractio seu elementum tractus. Si vero cesset densitatis consideratio (ut si mobilia sint aeque densa vel nulla omnino sit exacte loquendo in natura densitas), tunc coincidunt volumen et moles, longitudo percursa et longitudo translationis, velocitas mobilis et intensio motus seu vigor, protractio mobilis et quantitas motus seu impetus, denique spatium a mobili percursum seu tractus coincidit cum translatione seu quantitate effectus.

Definitio 12. **Media temporis velocitas, protractio, intensio motus (seu vigor), quantitas motus (seu impetus), est media arithmetica inter omnes mobilis velocitates, protractiones, intensiones motus (vel vigores), quantitates motus (vel impetus), quae mobili singulis temporis instantibus competunt, ac proinde idem producunt mediae illae quantitates in totum tempus absolute ductae, quod singulae temporis elementis aequalibus ordinatim applicatae.**

Haec ad compendium aestimandi utilia sunt, ut semper variantia ad constantia ipsis aequivalentia reducantur.

Conclusio prima.

Factum ex (1) velocitatibus, (2) intensionibus motus seu velocitatibus exaltatis sive vigoribus, (3) protractionibus seu impetibus restrictis, (4) quantitatibus motus seu impetibus, tempori in quovis instanti quo mobili competunt ordinatim applicatis, seu quod idem est, factum ex media temporis (1) velocitate, (2) intensione motus, (3) protractione, (4) quantitate motus in totum tempus ducta, aequatur respective quantitati (1) longitudinis percursae, (2) longitudinis translationis, (3) spatio percurso seu tractui, (4) translationi integrae seu quantitati effectus.

Itaque tempore in elementa aequalia cogitatione diviso seu uniformiter crescente, velocitates sunt ut elementa momentanea longitudinum percursarum, et ut ita dicam, velut longitudinis percurrendae inchoamenta; et pari jure intensiones motus seu vigores sunt elementa longitudinis translationum; accedentibusque voluminibus et motibus (constantibus), protractiones seu impetus restricti (facti ex velocitate in volumen) sunt ut elementa tractus seu spatii (quippe facti ex longitudine percursa in volumen); unde et protractiones a me subinde **elementa tractus** appellantur. Et pari denique jure impetus ipsi (absolute dicti) seu quantitates motus (factae ex longitudine translationis in molem) sunt elementa effectus formalis seu translationis (quippe quae fit ex longitudine translationis ducta in molem).

Definitio 13. **Velocitas, intensio motus seu vigor, impetus** etc. sunt vel **communia** vel **potestativa**.

Communia, quae paulo ante definivimus, sumenda media arithmetica diversarum velocitatum in materiae aut temporis elementis assignabilium; Potestativa vero, quae ad potentiam aestimandam serviunt, ita scilicet ut quadratum velocitatis mediae potestativae mobili assignatae ductum in molem det mobilis potentiam absolutam secundum prop. 5 cap. de potentia motrice absol. et quadratum velocitatis mediae (potestativae) quam habet mobile durante tempore ductum in tempus et molem exhibeat actionem mobilis formalem per totum illud tempus, secundum prop. 17 cap. de actione motus formali.

Conclusio secunda.

Si diversorum mobilis punctorum seu molis elementorum inaequales sint velocitates, et ex quadratis velocitatum in sua cujusque molis elementa ordinatim ductis fiat ductus, et sit velocitas alia, cujus quadratum si absolute ducatur in eandem molem, prodeat ductus novus, priori aequalis; tunc haec velocitas erit ipsa velocitas media postestativa mobili attribuenda, cujus quadratum ductum in molem dat mobilis potentiam. Idem est, si pro mole adhibeas temporis elementa, et velocitatum (potestativarum) mobilis quocunque temporis elemento existentium quadrata ducas ordinatim in respondentia temporis elementa, ut inde fiant ductus. Quod si jam sumatur velocitas alia, cujus quadratum si absolute ducatur in idem tempus, proveniat ductus novus priori aequalis, tunc haec velocitas erit ipsa velocitas temporis media potestativa, cujus quadratum ductum in tempus ac praeterea in molem mobilis dat mobilis actionem formalem, hoc tempore durante exercitam, seu tantundem revera egit mobile, ac si per totum tempus non nisi hanc velocitatem uniformem exercuisset.

Haec patent ex def. 18. Nam velocitas assignata media potestativa, quadrato suo seu potestate in totam molem seu in totum tempus ducta, ducitur in omnia molis vel temporis elementa, id est, si ipsa (quod in arbitrio est) aequalia assumantur, in eorum numerum seu in numerum velocitatum singulis elementis respondentium. Ducta autem hoc modo velocitatis hujus

mediae potestas seu quadratum aequat (ex constructione) velocitatum singularum potestates seu quadrata simul sumta, adeoque ejus potestas seu quadratum est arithmetice medium inter omnes singularum velocitatum potestates seu quadrata, seu velocitas assignata est inter omnes media potestativa, et eadem, cum singulorum elementorum potestatibus aequetur, utique omnes simul poterit seu aequabitur potestati totius. Manifestum enim est, totius potentiam ex partium potentiis conflari.

Caput IV.

Specimen calculi analytici pro phoronometria dynamica.

Pars prior: De calculo quantitatum ordinariarum.

1) Tempus, t.

2) Velocitas, v.

3) Volumen seu extensio, e.

4) Densitas seu gravitas specifica, g.

5) Pondus seu moles, m.

6) Fit autem m ut ge, seu pondera sive moles sunt ut producta ex g in e, seu in ratione composita voluminum et gravitatum specificarum. Est quoque $m = ge$, quia omnis gravitas specifica ducta in suam extensionem dat molem.

7) Tractus seu spatium, quod mobile percurrit sive metitur, sit r.

8) Si voluminis e velocitas v duret per tempus t, erit r ut evt.

9) Longitudo tractus vel longitudo translationis l est ut vt;

10) et fit le ut r.

11) Impetus y ut ve, si nulla habeatur ratio densitatis; vel y ut vm seu veg, si habeatur ejus ratio, modo motus mobilis sit aequidistributus seu aequalis in quolibet puncto velocitatis. Ceterum impetu y existente vm, quantitatem ve distinctionis gratia voco protractionem π; unde $\pi d = y$, est enim quasi elementum tractus.

12) Effectus formalis seu quantitas translationis f est ut le, seu coincidit cum tractu r, si nulla habeatur ratio densitatis. Sed si haec quoque in rationes veniat, erit f ut lm, modo omnium punctorum velocitas sit aequalis.

13) Actio formalis a est ut fv, seu in ratione composita effectus et velocitatis.

14) Hinc a ut lmv, item ut ly.

15) Et quia l ut vt per 9 hic, fit a ut $mtvv$, seu actiones sunt in ratione composita temporum, mobilium et quadratorum velocitatum, si scilicet sit motus aequidistributus et uniformis.

16) Hinc varia theoremata concludi possunt, quorum aliqua suis locis exposuimus; exempli causa: Si mobilia aequalia aequalibus temporibus moveantur motibus uniformibus et aequidistributis, erunt actiones eorum ut quadrata longitudinum percursarum, seu a ut ll. Nam generaliter (per 15 hic) a sunt ut $mtvv$, et quia hoc loco m et t utrobique aequalia seu constantia, seu ut unitates, fient a ut vv; jam l ut vt (per 9); ergo hoc loco ob tempora aequalia (seu ut unitates) sunt l ut v. Ergo a ut ll.

17) Si p sit potentia motrix absoluta, fit a ut pt, seu potentiae sunt ut actiones uniformes aequalibus temporibus exercitae; et si tempora sint inaequalia, actiones sunt in ratione composita temporum et potentiarum.

18) Ergo p ut mvv, seu potentiae sunt in ratione composita ex simplice mobilium (seu molium) et duplicata velocitatum. Nam a ut pt (per 17), rursus a ut $mtvv$ (per 15); ergo pt ut $mtvv$, seu p ut mvv.

Pars posterior: De calculo per quantitates inassignabiles, seu de Analysi infinitorum nova ad Phorometriam adhibita.

19) Quamdiu partes mobilis sunt aequalis ubique densitatis (mobili scilicet existente similari) et aequalis omnes velocitatis (motu scilicet existente aequidistributo), et velocitates mobilis eaedem per quasvis temporis partes (motu existente uniformi), sufficit calculus praecedens per quantitates vulgo receptas. Sed si variet ubique densitas aut velocitas in loco aut tempore, ad quantitates numero infinitas et magnitudine infinite parvas veniendum est seu ad incrementa aut decrementa vel differentias duarum quantitatum ordinariarum proximarum inter se. Exempli gratia: Dum grave motum accelerat, duae proximae sibi velocitates v et (v) a me dicentur habere differentiam infinite parvam dv, quae est incrementum velocitatis momentaneum, quo transit mobile a velocitate v ad (v). Itaque in Geometriam introduxi novum circa analysin infinitorum calculi genus, suo quodam Algorithmo alibi a me explicato in-

structum, ubi notis differentiae et summae eodem fere modo utor, quo notis radicis et potestatis in Algebra uti solemus.

20) Generaliter igitur, si sit quantitas aliqua ut velocitas v, incrementum ejus momentaneum seu proximarum velocitatum differentiam voco dv. Eodem modo si tempus sit t, temporis elementum sive momentum voco dt, et extensionis e elementum de; atque ita in caeteris.

21) Si ex pluribus finitis vel infinitis alicujus quantitatis elementis unumquodque peculiare habeat attributum ejusdem nominis, sed diversae magnitudinis, verbi gr. peculiarem gravitatem specificam; potest toti attribui medius quidam gradus, qui ductus in totum tantundem producat, quantum summa conflata ex simul additis ductibus particularibus, per cujusque elementi ductionem in attributi sui magnitudinem natis.

22) Itaque si totius alicujus virgae metallicae cylindricae gravitatem specificam a summo ad imum continue crescentem habentis extensio seu longitudo sit e, ejusque elementum quodvis vocetur de, et respondens cuique elemento gravitas specifica seu densitas sit g, et gravitas specifica totius (quae oriretur tota massa metallica in unam massam similarem igne fusa) vocetur G (adhibita majuscula); fiet $\mathrm{G\,e} \overset{(1)}{=} \int \overline{\mathrm{de\;g}}$, adeoque $\mathrm{G} \overset{(2)}{=} \int \overline{\mathrm{de\;g}} : \mathrm{e}$, et $\overline{\mathrm{de\;g}} \overset{(3)}{=} \overline{\mathrm{dm}}$, posito per artic. 6 hic, esse $\mathrm{m} \overset{(4)}{=} \mathrm{ge}$. Nam quia omnis gravitas ducta in suam extensionem dat molem, ergo etiam g (gravitas h. l. extensionis elementaris seu ipsius de) dat $\overline{\mathrm{dm}}$ molem elementarem.

23) Si elementa sint aequalia, seu $\overline{\mathrm{de}}$ constans, erit G media arithmetica inter omnes g. Nam si omnes $\overline{\mathrm{de}}$ sint aequales, tunc e seu $\int \overline{\mathrm{de}}$ nihil aliud erit quam $\overline{\mathrm{de}}$ multiplicata per numerum ipsarum $\overline{\mathrm{de}}$. Sit numerus ille n, et fiet $\mathrm{e} \overset{(5)}{=} \mathrm{n}\overline{\mathrm{de}}$. Jam $\int \overline{\mathrm{de\;g}} \overset{(6)}{=} \overline{\mathrm{de}} \int \mathrm{g}$, posito $\overline{\mathrm{de}}$ esse constantem, ex nostri calculi differentialis legibus. Itaque hos valores ex aequat. 5 et 6 substituendo in aequ. 1 fit $\mathrm{n\,G} \overset{(7)}{=} \int \mathrm{g}$, et proinde G est media arithmetica inter omnes g; ducta enim in ipsarum numerum n producit nG, ductum, qui aequatur ipsarum summae $\int \mathrm{g}$. Quae omnia collatis exemplis figurisque in cap. de ductibus ac de tractu propositis melius intelligentur. Ad exemplum autem gravitatis speci-

ficie et extensionis etiam in aliis (veluti velocitate ac tempore) procedemus.

24) Nimirum si elementa voluminis $\overline{de}$ peculiares habeant velocitates, protractio mobilis π erit $= \int \overline{de}\, v$, id est $= ve$, per artic. 11 hic.

25) Media autem velocitas $V = \int \overline{de\, v} : e$, quae proinde velocitas V ipsi mobili attribui poterit; nam si omnes ejus partes moverentur velocitate aequidistributa V, tantundem protractionis efficerent, quantum nunc motu non aequaliter distributo efficiunt.

26) At tractus ipse $r = Vet$ (per artic. 8 hic) seu $\int \overline{de\, vt}$ posito motum mobilis per tempus t uniformiter durare.

27) Sin vero mutatur motus mobilis, et diversis temporis elementis sive momentis $\overline{dt}$ diversa sit velocitas,

28) tunc fiet tractus $r = e \int \overline{vdt}$, singulis V mobili competentibus in sua respondentia temporis elementa ordinatim applicatis.

29) Ubi si rursus velimus novam mediam temporis inter omnes V velocitatem comminisci, qua si mobile uniformiter ferretur, tantundem tractus per propositum tempus efficeret, quantum nunc velocitate variata, eam novam velocitatem mediam poterimus vocare (V),

30) et fiet $r = e(V)t = e \int \overline{dt\, V} = \int \overline{dt \int \overline{de\, v}}$, ubi v significat quamlibet velocitatem, quam quaevis mobilis particula habet in quovis temporis elemento, adeoque velocitates numero infinities infinitas; at (V) significat velocitatem inter infinitas mediam, omnibus particularum mobilis velocitatibus coexistentibus aequivalentem, et proinde continet velocitates totius mobilis infinitas pro infinitis temporis momentis; denique (V) continet velocitatem unicam, inter varietate infinitas V, adeoque inter infinities infinitas varietates v mediam, mobili attributam, aequivalentem reliquis omnibus et in qualibet mobilis parte et in quovis temporis momento variantibus.

31) Exemplo melius res intelligitur. Sit (fig. 134) recta AB movenda in eodem plano circa centrum A; itaque velocitates punctorum seu elementorum ipsius rectae AB coexistentes sunt majores in proportione distantiarum a centro. Ponamus jam praeterea

vertiginis hujus velocitatem crescere uniformiter a quiete, seu aequalibus per aequalia tempora incrementis; unde mobili repraesentato per AB, velocitate puncti alicujus B per BC, velocitates omnes simul existentes mobilis elementis respective applicatae exhibebuntur (fig. 135) per triangulum rectangulum ABC; fiat parallelogrammum rectangulum EAB huic triangulo aequale, eritque AE velocitas mobilis media. Rursus sit tempus BD angulo in B recto, et pyramis rectangula DABC repraesentabit omnes velocitates infinities infinitas cujusque puncti in unoquoque instanti, et ut triangulum ABC repraesentarat omnes velocitates mobilis existentes eodem temporis instanti, ita triangulum DBC repraesentat omnes velocitates temporis competentes eidem mobilis puncto B; sumatur jam DF talis, ut sit rectangulum solidum FDBA aequale pyramidi DABC, et erit FD media mobilis velocitas, qua si mobile AB ferretur per tempus DB motu aequidistributo et uniformi, idem foret tractus idemque (si mobile similare ponatur) effectus formalis seu quantitas translationis, qui in motu per temporis momenta et mobilis puncta variat.

32) His jam ad calculum translatis, AB, e; DB, t; BC, v; AE, V; DF, (V); triang. ABC, π; pyramis DABC, r; habebit locum calculus paulo ante dictus. Fit enim $\pi = Ve$; $r = (V)te = le$. Sed $V = \int \overline{de\, v} : e$, et $(V) = \int \overline{dt\, v} : t$, adeoque $l = \int \overline{dt\, v}$. Unde patet esse $\pi = \int \overline{de\, v}$, et $r = \int \overline{dt \int \overline{de\, v}}$. Et hoc quidem generatim.

33) Sed quia in hoc casu v coexistentes sunt ut e, fiet π ut $\int \overline{dv\, v}$ vel ut $\int \overline{de}\, e$, id est (per leges calculi differentialis) ut ee vel ut vv: protractiones π, vel (si mobile sit similare) impetus y, simul existentes in linea AB, sunt ut quadrata partium AB vel A(B), et totius mobilis AB protractiones vel impetus successive existentes sunt ut quadrata velocitatum puncti B.

34) Hinc jam in nostro casu r ut $\int \overline{dt\, vv}$. Sed t rursus sunt ut v, in casu praesenti, cum v velocitates puncti A crescant proportione temporis seu durationis. Ergo fit r ut $\int \overline{dv}\, vv$ vel ut $\int \overline{dt}\, tt$, adeoque tractus (vel in casu mobilis similaris, etiam effectus) diversarum mobilis partium AB et A(B) in casu praesenti sunt in triplicata ratione velocitatum v, ultimis punctis B, (B) competentium, id est ipsarum linearum AB, A(B); totius autem mobilis

vel datae in mobili partis AB tractus vel effectus diversi per diversa tempora inde ab initio sumta, sunt in triplicata ratione temporum impensorum.

36) Ceterum quia $\int \overline{dv\,v} = vv : 2$, fit $AE = BC : 2$; et quia $\int \overline{dv\,vv} = v^3 : 3$, fit $DF = BC : 6$. Nam $\int \overline{dv \int \overline{dv\,v}} = \int \overline{dv\ vv : 2}$ $= v^3 : 6$.

37) Atque haec prolixius exponenda fuerunt, ut in novum Notationis genus, quo infinitum ipsum sub leges Analyseos cogitur et innumerabiles graduum varietates eidem calculo subjicientur, lectorem magno, siquando intelliget, fructu suo, nec minore voluptate introduceremus. Calculum autem in exemplo aliunde ex communi Geometria manifesto exposuimus, ut ratio calculandi in aliis multo subtilioribus, nec ad receptas vulgo Geometrarum methodos facile cessuris appareret.

38) Quod si jam ad varietatem temporum et velocitatum accedat varietas densitatum in mobili, quam in praecedenti exemplo ablegaveramus, complicatior adhuc oritur calculus differentialis. Fit ergo $m = \int \overline{de\,g} = Ge$, et velocitate cujusque $\overline{dm}$ seu cujusque elementi materiae sive molis (hoc est cujusque $\overline{de}\,g$) existente v, fit impetus mobilis $y = \int \overline{\overline{de}\,gv}$ vel $\int \overline{\overline{dm}\,v}$.

39) Hinc ut velocitatem inveniamus mediam non voluminis seu extensionis (quam velocitatem mobilis simpliciter appello), sed potius molis, quam voco vigorem seu motus intensionem, et designabo nunc nota ȣ, fit $ȣ = \int \overline{\overline{dm}\ v} : m$ seu $\int \overline{\overline{de}\ gv} : \int \overline{\overline{de}\,g}$, quia $y = ȣm$.

40) Effectus autem mobilis $f = \int \overline{\overline{dt} \int \overline{\overline{dm}\,v}} = mt\,(ȣ)$, eritque $(ȣ)$ vigor totius temporis medius, et posito λ esse longitudinem translationis, seu $\lambda m = f$, fit $\lambda = t(ȣ) = \int \overline{\overline{dt} \int \overline{\overline{dm}\,v}} : m$.

41) Sed quoniam ostensum est, potentiam oriri ex quadratis velocitatum in molis elementa ductis, fit $p = \int \overline{\overline{dm}\,vv}$.

42) Et si φ sit velocitas potestatum, seu cujus quadratum in molem ductum dat mobilis potentiam, fit $m\varphi\varphi = p$, adeoque $\varphi\varphi = \int \overline{\overline{dm}\,vv} : m$.

43) Actio autem $a = \int \overline{p\, dt} = \int \overline{dt \int \overline{dm\ vv}} = \int \overline{dt\ \varphi\varphi m}$ $= mt(\varphi)(\varphi) = t(p)$. Eritque φ velocitas potestativa media mobilis in certo momento $d\bar{t}$, et (φ) velocitas potestativa media mobilis pro toto tempore, et p potentia mobilis in certo momento $d\bar{t}$, et (p) potentia mobilis media per totum tempus t, quae ducta in tempus absolute, dat quantitatem actionis.

44) Et sane si mobile diversas in diversis punctis habeat densitates et velocitates, differunt in eo velocitas ipsi attribuenda communis V [quae ducta in volumen e dat protractionem π, in tempus t dat longitudinem tractus l, in volumen e et tempus t dat tractum r], velocitas exaltata (seu intensio motus vel vigor) ȣ [quae ducta in molem m (id est volumen simul et gravitatem specificam) dat impetum y, in tempus t dat longitudinem translationis λ, in molem m simul et tempus t dat effectum formalem f], et denique velocitas potestativa φ [cujus potestas seu quadratum in molem m dat potentiam p, in molem m et tempus t dat actionem formalem a]. Et quidem $V = \int \overline{de\ v} : e$ et ȣ $= \int \overline{dm\ v} : m$, et $\varphi\varphi = \int \overline{dm\ vv} : m$.

45) Et has quidem quantitates medias gravitatum, velocitatum, potentiarum introduximus, ut infinitae varietates punctorum et instantium ad quantitates constantes aequivalentes reduci, et theoremata nostra circa motum aequidistributum et uniformem demonstrata ad omnia alia motuum genera transferri possint.

46) Quisquis autem hujus praesentis calculi simulque Geometriae intelligens fuerit, non minus facile moles, velocitates, tractus, impetus, motuum effectus, potentias, actionesque hactenus explicatas, quam numeros aut figuras aestimabit.

DYNAMICA

DE POTENTIA ET LEGIBUS NATURAE CORPOREAE.

PARS II.



SECTIO PRIMA.

DE CAUSA ET EFFECTU ACTIVIS.

Definitio 1. Activum vel Potentia praeditum est Thema (vel rerum status), ex quo sequetur mutatio certis quibusdam praeterea positis inèrtibus, seu quae talia sunt, ut ex ipsis solis positis utcunque nulla mutatio sequatur. Sequente autem mutatione Thema ipsum dicetur agere.

Ita grave sustentatum, vel elasticum tensum corpora sunt, quae habent agendi potentiam, quoniam revera agent seu mutationem producent, si certam hypothesin faciamus, per se nihil producere valentem, veluti circa retinaculorum figuram aut firmitatem. Exempli causa, simplice conversione claviculae seu epistomii aqua gravis e vase effluit, vel aër compressus erumpit, etsi inter hypothesin clausi aut aperti epistomii nulla sit per se differentia quoad vim agendi seu mutationes producendi; et certe si inclusum grave vel Elastrum abesset, nihil hic referret, vacuo vase clausum an apertum epistomium poneretur. Nempe activa sunt, seu per se agunt, quae non nisi sublatione impedimenti opus habent. Impedimentum autem hoc loco intelligo per se iners, aut certe cujus operatio ad rem de qua agitur non pertinet, quod speciatim Retinaculum vocari posset.

Definitio 2. Si duo sint Themata potentiam habentia, et ex unius actione sola sequatur alterum vel saltem sine requisita suppositione potentiae alterius priori jam coexistentis, tum prius est Causa, posterius Effectus activus vel effectus absolutus. Quodsi ex causa non possit alius praeterea effectus simul existens sequi, causa plena erit et effectus integer.

Causa et Effectus varie admodum accipiuntur, neque ill ambiguitates evolvere hujus loci est; sufficit nostros significat certa definitione constitui. Interim considerare operae pretium es nos paulo ante (cap. 1 sect. 3) per Effectum formalem mot intellexisse quantitatem materiae per longitudinem viae esse tran latam, seu quantitatem mutationis quae ex solo alicujus corporis berrimo motu nascitur; hic vero per Effectum Activum v Absolutum intelligimus Thema quoddam in materia productu quod vim quandam agendi habet, ut corpus grave esse supra h rizontem elevatum ad aliquot pedes, sublato enim impedimen inde rursus decidens, aget; idem est de arcu tenso. Quin sufficit impetum alicui corpori impressum esse, ut Effectum al quem Activum productum dicamus, quamquam iste retinacu destruatur, quod in gravitate vel Elastro non fit, quia scilicet n tura semper novas impressiones, licet sensibus nostris occult substituit. Et productione talis Effectus potentiam habentis, abs luta causae potentia optime aestimari potest, quam aliae mutati nes productae non aeque indicant. Ut autem intelligamus qu sit Effectus integer, cogitemus pilam A (fig. 136) currente in plano horizontali obstantia aliud post aliud Elastra tende B, C, E, circumactis eorum claviculis, ita factis ut sponte libera se rursus Elastra regredique non possint. Caeterum primi a secundi Elastri tensio non erit effectus integer, sed ultimi demu si nimirum ponamus eo tenso pilam nil amplius posse, sed om sua potentia consumta conquiescere. Itaque Themata duo hic su potentiam habentia, nempe Causa plena, scilicet pila certo mo praedita, quem totum possidebat antequam in ullum ex Elastr incideret, et Effectus integer, scilicet aggregatum ex Elastr a pila tensis. Intelligendum est autem, pilam in sola haec Elast aliquid suae potentiae impendisse mediumque fuisse liberrimum, planum horizontale fuisse perfecte politum, vel certe obstacula in nata fuisse tam exigua ut considerationem non mereantur. Na alioqui si pilam ponamus in tapete decurrere, ipsa fila vel pili t petis pro totidem Elastris flectendis haberi adeoque vis ea impen computari deberet; idemque est in aliis obstaculis exiguis quibu cunque. Quamvis autem haec Elastra B, C, D rursus suo tempo agere, et novos effectus producere possint, qui etiam pro effe tibus (licet mediatis) pilae haberi possunt, illi tamen effect novi non possunt coexistere prioribus, nempe omnibus Elastr

tensis, uti nec Elastra tensa, quorum actio ad novum effectum producendum intercedit, causae primae nempe motui pilae initio dato coexistere.

Axioma et Definitio 3. Effectus integer aequivalet causae plenae, adeoque non datur Motus perpetuus Mechanicus, sive Causa non potest producere Effectum Activum, qui plus possit, quam ipsa causa, sed nec Effectum integrum, qui minus possit, quam ipsa causa. Etsi enim pars potentiae ab impedimentis absorbeatur, non destructa tamen, sed in impedimenta translata est, quae in effectum integrum computantur. Et potentiae quantitas in themate est, cujus mensura est quantitas alterius thematis activi determinati, quae ipsi inest themati priori potentiam habenti ejusve causae plenae aut effectui integro.

Effectum integrum aequivalere Causae plenae, propositio est Metaphysicae sublimioris, quae non nudis vocabulis impenditur, sed rerum universalia tractat. Hanc legem constantissime observat Natura, et veritas ejus vel hinc intelligi potest, quod ea sublata nullus superest modus potentias aestimandi aut de Effectuum magnitudine statuendi ex causis.

Propositio 1.

Si quoddam Thema Activum constituatur ex pluribus Thematibus repetitis unicuidam Activo gemellis, erit potentia prioris Activi multipla potentiae posterioris Activi in ratione numeri repetitionum.

Nam Activum (repetitum) sumi potest pro mensura potentiae (per def. 3). Quantitas autem mensurati est ad mensuram, ut numerus (repetitionum) ad unitatem.

Exempli causa, tres pulveris pyrii aeque conferti et per omnia similes modioli triplam habent potentiam unius. Tres arcus tensi gemelli inter se triplam unius arcus gemelli singulis vim habent.

Propositio 2.

Si duo sint Themata Activa, quorum quodque ex repetitis uni activo gemellis constituatur, erunt potentiae inter se, ut numeri repetitionum.

Activum A contineat gemella ipsi B vicibus tribus, et activum C contineat gemella ipsi B vicibus duabus; ajo esse potentiam A ad potentiam C ut 3 ad 2. Nam potentia A est ad potentiam B ut 3 ad 1 (per prop. 1 hic) et potentia B est ad potentiam C ut 1 ad 2 (per prop. dict. 1). Ergo (ex Elem.) potentia A est ad potentiam C ut 3 ad 2.

Exempli causa omnibus paribus similibusque potentia ponderis trium librarum est ad potentiam ponderis duarum librarum sesquialtera, seu ut 3 ad 2 sive tripla subdupla.

Propositio 3.

Fieri non potest, ut ex causa oriatur effectus, qui causae gemellum contineat et aliquid praeterea Activum.

Sit Causa A, ex qua oriatur Effectus aliquis B plus C, sitque thema B per omnia gemellum ipsi A, et C sit Activum. Hoc ajo fieri non posse. Cum enim B sit gemellum ipsi A activo (ex hyp.), erit et B activum; ergo totus effectus B plus C est activus et major causa A, quia praeter B gemellum ipsi A continet C activum seu potentia praeditum. Sed hoc fieri non potest, quia (per axioma praeced.) Effectus activus non potest esse potentior causa.

Ita fieri non potest, ut pondus librae unius descendens ex altitudine certa velut pedis efficiat aliquid, ex quo oriatur non tantum libram rursus ascendere ad altitudinem pedis, sed etiam aliquid praeterea produci activum, v. g. aliquid quantulumcunque praeter libram attolli. Id ipsum enim est Motus perpetuus Mechanicus, qui in excessu potentiae effectus super potentiam causae consistit. Et semel obtento excessu, repetita actione prima habebitur excessus novus priori aequalis, et ita tandem excessus quantuscunque, et data libra aquae cadente semel ex altitudine montis, poterit per hoc solum, tantum aquae ex subjecto planitiei lacu in montem et super eo excavatum receptaculum attolli, ut postremo loco unius librae aquae quae in monte fuerat habeatur lacus in monte, qui perpetuum flumen praebere possit, perpetuum inquam, quia non tantum delabentem aquae quantitatem sed et plus aliquid (ad resarcienda detrimenta a fundo bibente, aëre exsiccante, aliisque causis orta) semper elevare rursus valebit. Quae sane absurda esse satis constat, et perpetuis naturae experimentis refu-

tantur, alioqui quidlibet ex quolibet effici posset, neque ulla certa esset ratio potentiarum aestimandarum.

Propositio 4.

Si Effectus integer sit Causae similis, erit eidem gemellus.

Sit Causa A, Effectus integer B, causae similis; ajo esse B gemellum ipsi A. Cum enim sit B similis ipsi A (ex hyp.) et aequalis potentia eidem (ex axiomate praeced.), erit omnino aequalis. Alioqui eo ipso dissimilis foret, si in minore plus potentiae reperiretur quam proportione magnitudinis. Jam aequalia et similia nihil aliud sunt quam gemella.

Itaque si grave ex altitudine aliqua descenderit sursumque vertens iter rursus ascendat, nec aliud quicquam activum produxerit quam elevationem suam, seu si totam potentiam suam descensu quaesitam in reascensum impendat, dicendum est praecise ascendere ad tantam altitudinem, quanta est ea ex qua descenderat. Cum enim effectus productus sit ejusdem gravis elevatio (similis causae quae etiam erat elevatio ejusdem gravis ante descensum), non potest esse aequalis causae, quin sit aequalis elevatio, et fiet status postremus per omnia gemellus primo.

Propositio 5.

Effectus integer causam plenam vel ejus gemellum reproducere potest.

Cum enim aequalis sit ejus potentia cum potentia causae (per axioma praec.), tantum opus est circumstantias ita disponi, ut aliquid simile prodeat causae, quod semper fieri potest, quia (per def. 1 hic) circumstantias nulla actione, aut non nisi per causae actionem producta, defin. 2 concurrentes pro arbitrio assumere licet, unde (exemplo demonstrationis praeced.) prodibit gemellum.

Sic funependulum oscillans, si ponatur nihil prorsus virium in flexionem funis aut resistentiam aëris similiaque exigua detrimenta impendere, utique rursus assurget ad priorem altitudinem, et globulus ex durissimo lapide tornatus in subjectum ferrum politum incidens reflectendo rursus tam alte assurget, ut prope manum feriat.

Propositio 6.

Nihil refert quoad magnitudinem potentiae, utrum Effectus aliquis integer sit mediatus an immediatus.

Sit causa A, effectusque in B immediatus, rursusque mediante B effectus mediatus C, ita ut B sit effectus ipsius A et causa ipsius C. Quia A est potentia aequalis ipsi B et B ipsi C (per axioma), erit et A aequivalens ipsi C.

Effectus integer **immediatus** est, qui est ab ipsa causa productus seu qui nulla alterius quam causae actione in aliquid ex causa oritur, et siquidem totus simul existit, utique eo ipso momento existit, quo causa potentiam suam consumsit seu agere posse desiit. Sufficit igitur immediatum Effectum integrum causae aequalem esse, ut quemvis alium causae inaequalem esse concludamus. Et vero vel ideo effectum causae aequalem esse necesse est, quia alioqui diversis mediantibus ex eodem inaequalia oriri possent nec certa esset mensura potentiarum. Interim in praxi quo plura intercedunt, eo majus est detrimentum accidentale.

Propositio 7.

Eadem est semper potentia in quovis Systemate corporum cum aliis non communicantium.

Cum enim corpora cum aliis non communicent (ex hyp.), status quilibet corporum posterior erit effectus integer status eorum prioris (per def. 2), et proinde (per axioma et prop. 6) potentia aequalis. Itaque eadem est semper potentiae quantitas.

Hinc sive corpus unum sit, semper eandem retinebit potentiam, sive plura inter se concurrentia, semper eadem erit potentia in omnium summa.

Propositio 8.

Eadem semper potentia est in Universo.

Neque enim corpora universi cum corporibus aliis communicare possunt, quae Universo non continentur. Itaque Universum est systema corporum cum aliis non communicantium, ac proinde (per praeced.) eandem semper potentiam habet.

Ex propositione hac male intellecta natus est eorum error, qui crediderunt eandem semper conservari motus quantitatem in Universo, quam ipsi cum potentia confundunt. Quantum autem

intersit, ostendimus suo loco. Ostendi etiam potest facile, aequalibus temporibus eandem esse quantitatem Actionis in Universo, cum potentia semper agat, quantum potest, adeoque aequaliter aequalibus temporibus. Longe autem aliud est quantitas actionis, ut nos peculiari capite eam explicuimus, quam quantitas motus, ut ab illis definitur, qui eandem motus summam conservari volunt, eamque non in tempore, sed in momento quovis intelligunt, magnitudinem corporis in velocitatem eo momento ipsi competentem ducentes, ut quantitas motus ab ipsis sic appellata nascatur. Sed eam semper eandem in corporibus conservari falsum est, ut infra ostendemus.

Propositio 9.

Quae eundem integrum effectum (vel gemellos) producere possunt, habent potentias aequales.

Sit causa F producens effectum G, et causa L producens effectum M, sintque effectus (integri scilicet) G et M gemelli; aio causas F et L esse aequipotentes. Nam causa F aequipotens est effectui G, et effectus G effectui M (eidem scilicet vel gemello), et effectus M causae L; itaque causa F causae L.

Ut si (fig. 137) chorda tensa ex situ recto AB inflectatur in situm ACB, tam lapsu ponderis D ex altitudine DC, quam lapsu ponderis minoris E ex altitudine tanto majore EC, ita scilicet ut chorda non ultra ab ipsis inflecti possit, utique gravium D et E elevationes super horizontem HCR potentias aequales habebunt, cum idem ad summum efficere possint.

Propositio 10.

Quae a gemellis causis produci possunt, aequipotentia sunt.

Sit causa F producens effectum G, et causa L producens effectum M, et causa F et L (quas plenas intelligo) sint eaedem vel gemellae. Quia effectus G aequalis causae suae F, et causa F causae gemellae L, et causa L effectui suo M, utique effectus G aequalis seu aequipotens est effectui M.

Ut si corpus unius librae celeritate unius gradus praeditum vim suam omnem in arcu aliquo tendendo consumat, et aliud corpus priori aequale et aequivelox consumat suam in tendendo alio arcu; arcus tensi, etsi inaequales aut dissimiles, erunt tamen

aequipotentes, et is qui in aequali tensione foret debilior, erit tanto magis tensus.

Propositio 11.

Causae plenae sunt Effectibus integris proportionales.

Sit causae plenae potentia L, effectus integri potentia M; rursus alterius causae plenae potentia P, effectusque ejus integri potentia M. Quia igitur L est aequalis M et P ipsi Q, utique erit L ad P ut M ad Q.

Ponamus (fig. 138) pondera D et E cadendo ex altitudinibus perpendicularibus DH, ER elasmata quaedam inter se gemella in transitu eodem gradu tendere posse, D quidem tria A, B, C, at E duo F et G, et ambo cadendo neque egisse aliquid amplius nec agere posse, sed D post ultimum elasma C tensum omnem suam vim amisisse, ut si eo momento horizontem in H attingere ponatur, nulla prorsus vi eum feriat; similiterque E post tensum elasma ultimum G eo ipso omnem impetum descendendo acceptum consumpserit, nulloque ictu horizontem feriat in R. His positis, erit potentia ipsius D elevati altitudine DH ad potentiam ipsius E elevati altitudine ER ut numerus Elasmatum, quae tendi possunt a potentia priore, ad numerum Elasmatum, quae tendi possunt a posteriore. Nam cum effectus integri sint Elasmatum tensorum gemellorum aggregata, utique (per prop. 2) potentias eorum manifestum est esse ut numeros Elasmatum gemellorum, seu ut numeros repetitionum mensurae, quae hoc loco est potentia unius elasmatis tensi.

Propositio 12.

Duorum ponderum aequalium ad eandem altitudinem elevatorum eadem potentia est, quamcunque habeant figuram aut volumen.

Sint (fig. 139) pondera A et B aequalia, ad eandem altitudinem elevata, quae differant figura, eandem vero habeant gravitatem specificam, adeoque et volumen aequale. Inscribantur cuique cubuli aequales utrobique et aequaliter positi, aequali numero, qui vel exhaurient, vel differentiam relinquent data minorem, si satis magnus sit numerus et sufficiens parvitas. Horum cubulorum, quorum quilibet aequalis et similiter positus ipsi C, sit eadem elevatio quae ipsius C (ponendo corpus A vel B si tantum descen-

derit quantum elevatum est C, amplius nunc descendere non posse adeoque nec partem ejus), erit potentia ipsius C elevati ad altitudinem CR mensura potentiae (per def. 3 hic) quae cum aequaliter repetatur tam in A quam in B, erunt eorum potentiae aequales (per prop. 2 hic). Quodsi gravitate specifica differant pondera, sumendi sunt cubi unius similiter positi quidem cubis alterius, sed inaequales volumine in reciproca ratione specificarum gravitatum, quos aequivalere ex natura gravitatis specificae supponitur.

Propositio 13.

Ponderum ad eandem altitudinem perpendicularem elevatorum potentiae sunt ut pondera.

Sint (fig. 140) pondera A, B, C et L, M ad eandem altitudinem elevata supra horizontem, ajo potentiam ponderis B esse ad potentiam ponderis LM, ut pondus ABC ad pondus LM. Jam sit mensura communis ponderum pondus N ad eandem altitudinem elevatum, quod in ABC reperitur ter, in LM bis (vel alio). Itaque et elevatio ipsius N vel gemelli in isto reperitur ter, in hoc bis; potentiae autem sunt, ut repetitiones ejusdem suae mensurae (per prop. 2 hic) et repetitiones hic ut pondera; ergo et potentiae ut pondera erunt. Si pondera in mensuram communem resolvi non possint, sufficit assumi alia quae in communem mensuram resolvi possint tam parum ab his differentia, ut error sit minor dato, adeoque nullus.

Familiarius enuntiando: Potentia librarum duarum elevatarum super horizontem ad altitudinem perpendicularem unius pedis dupla est potentiae librae unius elevatae tantundem.

Propositio 14.

Ponderum aequalium potentiae sunt ut altitudines eorum perpendiculares supra horizontem.

Sint (fig. 141) pondera aequalia A et B, unum elevatum super horizontem HR pedibus tribus $_1$AH, alterum pedibus duobus $_1$BR; ajo esse potentiam ipsius A ad potentiam jpsius B ut 3 ad 2. Nam si A descenderit ex $_1$A altitudine unius pedis atque in $_2$A quieverit, amisit potentiam, quanta est elevatum esse altitudine unius pedis super horizontem. Sed retinet adhuc potentiam descendendi per $_2$AH. Et descendendo porro deinde per alterum pedem per $_2$A $_3$A amisit tantun-

dem adhuc semel, et descendendo denique per ${}_{3}AH$ tertium, tunc autem amisit omnem. Itaque ter habet potentiam elevationis ad unum pedem. Eandem B habet bis. Sunt ergo eorum potentiae ut 3 ad 2 (per prop. 2 hic), seu ut elevationes. Idem est in numeris quibuscunque, imo et in proportionibus incommensurabilibus, quia assumi possunt commensurabiles tam parum ab ipsis quam volumus differentes, ita ut error sit minor dato.

Familiarius enuntiando: **Potentia librae ad duos pedes supra horizontem elevatae dupla est librae elevatae ad unum pedem supra horizontem.**

Propositio 15.

Potentiae ponderum elevatorum supra horizontem sunt in ratione composita ponderum et altitudinum perpendicularium.

Sint (fig. 142) pondera A (2) et B (5) elevata ad altitudines ${}_{1}A_{2}A$ (3) et ${}_{1}B_{2}B_{3}B$ (4); ajo esse potentiam (6) ipsius A ad potentiam (20) ipsius B in ratione composita ex ratione ponderum A (2) et B (5), et altitudinum ${}_{1}A_{2}A$ (3) et ${}_{1}B_{3}B$ (4). Et quidem si altitudines ${}_{1}A_{2}A$ et ${}_{1}B_{2}B$ essent aequales, forent potentiae ut pondera (per prop. 13 hic); itaque in ratione composita ponderum et altitudinum, quia aequalitatis ratio in compositione nil mutat. Si sint inaequales, sumatur majoris altitudinis ${}_{1}B_{2}B_{3}B$ (4) pars ${}_{1}B_{2}B$ (3) aequalis minori ${}_{1}A_{2}A$ (3). Jam potentia (6) ipsius A (2) elevati in altitudinem ${}_{1}A_{2}A$ (3) est ad potentiam (15) ipsius B (5) elevati ad altitudinem ${}_{1}B_{2}B$ (3), ut A (2) ad B (5) (per prop. 1 hic), et potentia (15) elevati B (5) per ${}_{1}B_{2}B$ (3) est ad potentiam (20) B (5) elevati per ${}_{1}B_{2}B_{3}B$ (4), ut ${}_{1}B_{2}B$ (3) vel ${}_{1}A_{2}A$ (3) ad ${}_{1}B_{2}B_{3}B$ (4). Ergo jungendo prima postremis, potentia (6) est ad potentiam (20) in ratione composita A (2) ad B (5), et ${}_{1}A_{2}A$ (3) ad ${}_{1}B_{2}B_{3}B$ (4), seu in ratione composita ponderum et altitudinum.

Familiarius: **Potentia duarum librarum elevatarum ad pedes tres est sextupla potentiae unius librae elevatae ad pedem unum.** Reperietur enim in priore sexies repeti posteriorem.

Propositio 16.

Si pondera elevata sint reciproce ut altitudines, erunt potentiae aequales; et vicissim, si potentiae sint aequales, pondera sunt reciproce ut altitudines.

Sit pondus trium librarum elevatum ad pedes quatuor, et pondus duarum librarum elevatum ad pedes sex, ita ut sit pondus majus 3 ad minus 2, uti est altitudo ponderis minoris 6 ad altitudinem ponderis majoris 4; ajo potentias A elevatarum librarum 3 per pedes quatuor, et B elevatarum librarum 2 per pedes sex esse aequales. Est autem 3 ad 2 ut 6 ad 4 (ex hyp.); ergo (ex Elementis) factum ex 3 in 4 aequale est facto ex 2 in 6. Sed potentia A est ad potentiam B in ratione composita 3 ad 2 et 4 ad 6 (per praec.) seu (ex Elem.) ut factum ex 3 in 4 ad factum ex 2 in 6, et facta haec nunc aequalia esse ostendimus. Ergo potentiae A et B sunt aequalas.

Familiarius: Aequalis potentia est unius librae elevatae ad tres pedes et trium librarum ad unum pedem elevatarum; utrobique enim reperietur unam libram elevatam esse ad unum pedem, quod potentiae mensura est.

Propositio 17.

Aequalis potentiae est elevare unam libram ad duos pedes vel duas libras ad unum pedem, id est generaliter si altitudines elevationum sint reciproce proportionales ponderibus, potentiae elevandi sunt aequales.

Nam causae plenae sunt effectibus integris proportionales (per prop. 11 hic); cum ergo pondera ad altitudines ipsis reciproce proportionales elevata aequalem potentiam habeant (per prop. 15), erunt et potentiae elevandi in causis elevare valentibus aequales.

Dubitari scilicet poterat, an non elevandi idem pondus ad eandem altitudinem diversa sit potentia pro diversis elevandi modis, ita ut diversa ratione elevandi eadem potentia possit idem pondus elevare plus vel minus. Sed constituto semel axiomate, quod causa plena effectui integro aequivalet, eadem semper potentia ad eundem effectum determinatum potentia praeditum quomodocunque producendum requiretur.

Propositio 18.

In libra rectilinea si distantiae ponderum a centro librationis sint ponderibus proportionales reciproce, tunc fiet aequilibrium.

Sint (fig. 143) pondera A et B, quae librae rectilineae ACB

extrema puncta $_1A$, $_1B$ tota sua vi trahere conentur versus horizon tem HR; sitque C_1A ad C_1B, ut pondus B ad pondus A, verl gr. si A pondus sit duplum ponderis B, sit distantia a C centro l brationis, nempe BC, dupla distantiae AC; dico pondera esse i aequilibrio. Ponatur enim elevari alterutrum ut A ex $_1A$ in $_2$ translato $_1B$ in $_2B$, et libra $_1AC_1B$ translata in $_2AC_2B$, situm ve ticalem; ducantur perpendiculares ad verticalem $_1AD$ et $_1BE$; c triangula CD_1A et CE_1B similia erit CD ad C_1A seu ad C_2A, t CE ad C_1B seu ad C_2B; ergo et D_2A ad E_2B, ut C_2A ad C_2I seu erit D_2A ad E_2B ut B ad A, seu reciproce ut pondera. Ita que cum eadem potentia sit A duarum librarum (si placet) ess elevatum super horizontem $_1AD$ ad altitudinem D_2A unius (verl gratia) pedis, et B unius librae esse elevatum supra horizonter ad altitudinem duorum pedum (per prop. praec.); non est rati cur unum potius quam aliud obtineat. Nulla igitur est ratio cu A ascendat, B descendat. Idemque est argumentum, si contr ascenderet B, descenderet A.

Poterit etiam ostendi, dari motum perpetuum mechanicur alterutro ascensu admisso. Et Pseudomechanemata huic errori in nituntur. Placet tamen eam methodum varietatis causa sequent propositioni applicare.

Propositio 19.

Si duorum vasorum inter se inferius communi cantium liquores graves sint similes, et habean suas supremas superficies in eodem horizonte erunt in aequilibrio.

Sint (fig. 144) tubi AB et CD inter se communicantes in E pleni aqua vel alio liquore utrobique eodem, sintque superficie aquae AF, CG in eodem horizonte; ajo aquam in aequilibrio esse Ponatur enim alterutram praevalere, et aquam CD expelli ab aqu AB; quicquid expelletur utique elevabitur super horizontem CG se AFGC ad altitudinem aliquam ut H, si tubus DC paulo minu quam ad H productus intelligatur. Ergo ex H expulsa aqua effue in vas AB, et ita motus perpetuo durabit, isque mechanicu seu cum excessu; poterit enim aqua delapsu suo ex H, antequam perveniat ad AF, aliquam machinam circumagere et aliquid operari salvo defluxu, et proinde salva perpetuitate, quod est absurdum (per axioma superius). Itaque aqua in aequilibrio est seu quiescit, si aliunde in motum non concitetur.

Propositio 20.

Si pondus in plano inclinato sit ad pondus liberum ut hypotenusa ad cathetum trianguli rectanguli, horizonte, plano inclinato et perpendiculari contenti, pondus inclinatum et liberum sunt in aequilibrio.

Sit (fig. 145) pondus liberum D, in plano inclinato positum E, ipsum planum inclinatum AC, triangulum ABC, uti hypotenusa AC, cathetus AB, horizon seu basis BC, sitque D ad E ut AB ad AC; ajo esse in aequilibrio. Ponatur alterutrum descendere, v. gr. D in H, ascendereque adeo E in F; erunt DH et EF aequales. Compleatur triangulum FGC simile et similiter positum ipsi ABC, erit FG elevatio ipsius E, quae est ad FE id est ad DH, ut AB ad AC, seu ut D ad E. Ergo elevationes vel depressiones (perpendiculares scilicet) sunt reciproce ut pondera. Itaque nihil agitur (ut in demonstratione propositionis 18) seu aequilibrium est inter pondera.

Jam varias hujus propositionis a Jordano olim inventae demonstrationes habemus. Unam nunc annotare placet, quia praesenti methodo nostrae consentit, et ostendit, negato aequilibrio dari motum perpetuum mechanicum, seu (ut ego loquor) effectum potiorem causa. Sit enim (fig. 146) chorda sive catena LMN circa triangulum LMP. Patet si in alterutram partem fiat motus, eum semper duraturum, omnibus ad priorem statum semper redeuntibus. Itaque omnia sunt in aequilibrio. Jam parte MNP dictae catenae, quae in aequilibrio est et libere dependet, per cogitationem sublata, residuum MLP adhuc in aequilibrio erit, id est pondus LM cum pondere LP, quae pondera sunt inter se, ut ipsae rectae.

Propositio 21.

Si solidum grave natet in liquido gravi, pars liquidi volumine aequalis parti immersae solidi est aequalis pondere toti solido.

Sit (fig. 147) solidum AB (ut lignum) cujus pars EB immersa fluido (ut aquae), et sit vasis magnitudo talis, ut circulus EM sit aequalis respondenti annullo CEMD; erit aqua CELBMD volumine aequalis parti immersae EB. Haec autem aqua suspensa sustinetur a solido AB, ne descendere possit in locum EB; ergo est solidi ponderi aequalis. Tantundem autem immergitur solidum

aquae, quaecunque sit figura vasis, et omnino semper manifestum est partem aquae expulsam sustineri. Generaliter igitur verum est tantum immergi de solido, ut pars aquae; cujus locum pars solidi immersa occupat, sit solido toti pondere aequalis.

Propositio 22.

Duo Elastica homogenea licet magnitudine inaequalia ad eundem gradum tensa eandem vim coërcentem sustinent.

Sit (fig. 148) aër tubi AB per argentum vivum incumbens CD, quod ex altitudine AC descenderat, compressus in spatium DB, ita ut jam aequilibrium sit inter pondus coërcens CD et Elastrum aëris DB, a quo pondus sustinetur. Sit vas quantumcunque E tubo communicans in B, sed ita ut communicatio sit intercepta per epistomium clausum. Ajo, si poneretur E plenum aëre ad eundem gradum compressus quem recepit compressus aër DB, et postea communicatio detur aperto epistomio B, novam virium aëris E accessionem nihil posse in pondus CD neque illud attollere, sed omnia permanere ut ante. Ponamus enim initio epistomium fuisse apertum et hydrargyrum ex altitudine majore FC descendisse, atque ita eodem modo compressisse aërem DBE, ut nunc, claudatur deinde epistomium, manifestum est ideo magis posse comprimi aërem DB a pondere CD quam ante, (cum substans aër BE ponderis CD) actionem in aërem DB non impediat. Ergo potuisset aër DB comprimi amplius, manente communicatione; ergo totus aër DBE magis comprimi potuisset, contra hypothesin. Nihil ergo refert, clausum an apertum sit epistomium, majorque adeo an minor aër eodem modo tensus a pondere coërceatur.

Hinc discimus, ut liquores graves in aequilibrio sunt secundum gravitates specificas seu densitates et altitudines, nulla ratione habita amplitudinum (prop. 19), ita liquores elasticos in aequilibrio esse secundum elastri vel densationis gradum, nulla ratione habita voluminis seu magnitudinis. Et, si ponamus aërem nostrum quem respiramus esse compressum pondere superioris, uti revera est, manifestum est in exigua ejus particula esse vim resistendi elastro totius reliqui aëris ipsum comprimere tentantis, quemadmodum et ponderi; unde mirum non est, in vase clauso elastrum aëris inclusi, licet parvi, vim totius incumbentis atmosphaerae, nunc exclusae, supplere.

Ex his intelligimus etiam in unoquoque corpore vim quandam esse resistendi potentiae totius Universi ipsum immutare tentantis, quamdiu scilicet ratio non est, cur unum prae alio cedat, quam vim etiam alternativam aliquando vocare soleo, estque (ut ita dicam) tota in toto, et tota in qualibet parte, ut Philosophi loqui solent de anima, quae formula non alia aptius similitudine illustrari potest. Interim considerandum probe est, multum interesse inter vim coërcendi aërem DB vel DBE intra spatium in quo est compressus, et inter vim redigendi ipsum intra hoc spatium; illa est aequalis pro magno aut parvo aëre aequitenso, haec non item. Nam ut aër ex statu ordinario AB redigeretur intra DB, opus fuit descensu hydrargyri ex altitudine AC; sed ut aër FBE redigeretur intra spatium DBE eodem, quo ante gradu compressionis, oportuit hydrargyrum descendere ex majori altitudine FD. Caeterum si primo fuisset altitudo hydrargyri CD, seu (adhibito embolo pro hydrargyro) minus pondus embolo impositum, non potuisset hic aër coërceri intra hoc spatium, neque adeo haec obtineri compressio, licet descendisset pondus ex altitudine quantacunque. Sane ex vi impressi impetus pervenisset aër ad compressionem adhuc majorem, sed restituens sese in minore tandem compressione quievisset.

Propositio 23.

Posito calorem habere eandem vim dilatandi corporis quam habet Elastrum condensationis, pondera materias aequalium condensationum coërcentia erunt ut calores.

Nam si duae sint portiones aëris (ut hujus exemplo utamur) eaeque aequaliter densae, una calidior altera, perinde esset (ex hyp.) ac si una prius aeque densa, mox fieret altera densior in ea ratione in qua est revera calidior; in qua ratione autem esset densior, in ea ratione augeri debet pondus coërcens (per praec.), pondera ergo coërcentia sunt ut calores.

Propositio 24.

Eodem posito pondera coërcentia sunt in ratione composita densitatum et calorum.

Demonstratur ex prop. 22 et 23 eodem prorsus modo, ut prop. 15 demonstrata est ex prop. 13 et 14.

Frigidum concipio tanquam id, in quo vis dilatandi aërem est minor ordinaria. Nam quod aqua gelascente dilatationem fieri videmus et vasa etiam rumpi, aliam causam habet, et fieri videtur ideo quod magna copia aëris in exiguas admodum partes motu intestino liquidorum divisi et valde compressi jam tum (magis multo quam frigus ipsum efficere in ordinario aëre potest) in aqua latet, qui dilatare se a motu aquae intestino, dum fluida est, prohibetur, fere ut motus aëris guttas aquae minores decidere prohibet, quod in exiguis superficies (atque adeo et resistentia quam inveniunt) pro pondere aut vi contenta nimis magna est; remittente autem motu in congelatione se aperiens partesque majores minorum conjunctione componens aër ille compressus magnam vim exercet, illam scilicet, quae ipsi primo a motu fluidi intestino aliisve causis erat data, comprimendo. Similisque vis videtur et in Nitro esse.

Propositio 25.

In eadem hypothesi calores sunt in ratione composita spatiorum et ponderum aequalem materiae quantitatem intra illa spatia coërcentium.

Nam calores sunt in directa ratione ponderum et reciproca densitatum compositis. At spatia in casu molium aequalium seu aequalium quantitatum materiae sunt reciproce ut densitates. Ergo ratio reciproca densitatum est directa spatiorum, et proinde calores sunt in ratione composita ponderum coërcentium et spatiorum.

Ex hac propositione deducitur vera ratio thermometrum seu indicem caloris et frigoris construendi, ut aequales caloris et frigoris gradus divisione designentur.

Propositio 26.

Quicquid movetur in linea curva, progredi conatur in tangente curvae.

Ponatur (fig. 149) regula rectilinea mobilis AB procedere per rectam immotam AA, angulo eodem servato (si placet) recto; et interea in regula moveatur punctum C; poterit ea esse proportio velocitatum, ut punctum C describat curvam quamcunque CC. Patet autem punctum C pergere ex ${}_1C$ velocitate et directione composita ex ipsis ${}_1CD$ et D_2C, adeoque directione ${}_1C_2C$, quae mi-

nus errore quovis assignabili differt a curvae tangente, si intervallum $_1A_2A$ assumatur quantum satis est parvum; itaque directio est in curvae tangente, id est, in ea moveri conatur; et revera movebitur, si a regula aut alio coërcente liberetur.

Propositio 27. Definitio 4.

Quicquid movetur in linea circulari, recedere conatur a centro circuli, et vis recedendi conatus centrifugus appellatur.

Sit (fig. 150) mobile A motum in arcu circuli $_1A_2A$ descripto circa centrum C. Cum conetur ex $_2A$ pergere in tangente $_2AT$ (per praeced.), tangens autem $_2AT$ recedat a centro C, utique et mobile A a centro C recedere conabitur. Idem est, si motus sit compositus ex circulari et alio.

Propositio 28. Definitio 5.

Continuato per aliquod tempus conatu centrifugo corporis, oritur in eo celeritas recedendi a centro, et conatus centrifugus est ad celeritatem continuato recedendi conatu conceptam, ut finitum ad infinitum. Vim autem quae est hoc modo ad celeritatem seu quae est infinities minor celeritate, eam voco mortuam; at vim celeritatem habentis aut cum hac comparabilem appello vivam.

Rotari incipiat (fig. 151) in plano horizontali B axis tubi vacui CB, in quo sit globulus vel aliud mobile $_1M$, quod recedet a centro (per praeced.) et delatum aliquousque, ut in $_2M$, acquiret aliquem celeritatis gradum; manifestum est continuum esse incrementum, seu impressionem novam conatus centrifugi; itaque infinitis impressionibus novis conatus centrifugi inter loca $_1M$ et $_2M$ nascitur celeritas acquisita in $_2M$, ac proinde ratio vis cujuslibet impressionis novae seu conatus centrifugi ipsius ad celeritatem acquisitam, ut in $_2M$, est infinite parvi ad finitum, seu finiti ad infinitum.

Nimirum impetus omnis continuis conatibus acquisitis infinituplus est conatuum singulorum, ut etiam ex descensu gravium constat. Atque hoc erat, quod merito pro miraculo fuit Galilaeo, vim percussionis infiniti rationem habere ad vim gravitatis. Malui tamen uti conatu centrifugo ad demonstrandam hanc infiniti ratio-

nem. Est enim considerationis apertae et intellectae, cum gravitatis natura non sit certa demonstratione cognita. Unde etiam viri docti dubitarunt, an per omnes intermedios gradus transeatur in gravitate; de quo non possunt dubitare in motu centrifugo, si modo tubus rigidus et motus continuus esse ponatur. Vis etiam in Elastro sustinendi aliquod pondus est Mortua, et similiter Vis in pondere coërcendi Elastrum (de qua diximus prop. 22). Sed Vis ponderis quam habet ad Elastrum comprimendum v. gr. aërem ex statu ordinario redigendum intra aliquod spatium arctius, Viva est; opus enim est descensu ex aliqua altitudine, seu impetu concepto, nec solum mortuum pondus sufficit.

Propositio 29.

Gravitas et conatus centrifugus sunt comparabiles inter se, et datur conatus centrifugus gravitati aequalis, imo et superior, qui non sustinere tantum, sed et attollere gravia potest ad altitudinem quantamcunque.

Nempe (fig. 152) circa axem AB rotetur tubus inclinatus CD supra infraque apertus, et infra in aquam immersus. Ponatur autem inferior aliqua pars tubi CE horizontalis, utique in ea vim concipere potest aqua tantam (si modo satis magna sit longitudo CE, et velocitas rotationis), ut exiliat per D, modo ED pars inclinata non nimis alta sit. Vicissim potest tanta esse altitudo ipsius ED, ut aqua assurgens vi impetus concepti perveniat quidem aliquousque in tubo EFD, non tamen usque in D, sed tantum ad F; itaque suspensa manebit aqua FEC, vi conatus centrifugi; et ita erit conatus centrifugus a tali circulationis celeritate ortus, gravitati in tali inclinatione tubi aequalis. Ex his etiam manifestum est (etiamsi pars tubi inferior recta abesset), si conatus centrifugus gravitatem semel vincat, semper vincere eadem manente tubi inclinatione, et proinde continuata aequaliter circulatione aquam in eodem tubo elevatum iri ad altitudinem quantamcunque, cum quaevis pars aquae majorem habeat ascendendi quam descendendi conatum. Unde non refert, quanta ejus sit altitudo in tubo.

Propositio 30.

Gravitatis vel Elastri vis mortua est, sive est ad potentiam celeritatis, ut finitum ad infinitum.

Sequitur ex praecedenti prop. 29, quia comparabilis est co-

motui centrifugo (per prop. 29), cujus vim mortuam esse ostendimus (prop. 28) nisi continuata scilicet sollicitatione excitetur. Idem et sic ostenditur, quod pondus quantulumcunque cadens ex altitudine quantulacunque AB (fig. 153) attollere potest corpus quantumcunque et cujuscunque ponderis C (ope librae BDE brachiorum aequalium), sed ad altitudinem proportione minorem (per prop. 16 hic). Itaque quantulumcunque grave A celeritate quantulacunque perveniens ad B vincit pondus C utcunque magnum, adeoque celeritatis potentia est infinitupla potentiae gravitatis. Idem est de vi elastica, quae etiam mortua est, cum ponderi ex prop. 22 aequivaleat.

Haec interim supponunt gravitatem continue agere secundum Mathematicas rationes. Neque etiam ad sensibilia respiciunt, ubi tam exigua esse potest vis, ut elevatio ponderis magni non sit notabilis aut impressus impetus a mediantibus, libra, filo et similibus absorbeatur. Interim vires mortuae continuatione excitantur et impetum seu celeritatem concipiunt.

Propositio 31.

Si duo pondera per easdem lineas descendant, eandem acquirunt celeritatem sine discrimine magnitudinis ponderum.

Descendant (fig. 154) per easdem lineas (vel gemellas) duo, grave AB et grave C; ajo celeritatem ab AB majore quaesitam per descensum in $_2A_2B$ esse aequalem celeritati quaesitae a minore in $_2C$. Sumatur A pars ipsius AB aequalis ipsi C. Manifestum est nihil referre, utrum pars A sola descendat an comitata alia parte B; sola autem A acquiret eam celeritatem quam C, cum sint gemella, ergo et in AB; sed in AB eadem est celeritas totius AB, ergo et quae minoris C.

Propositio 32.

Altitudines perpendiculares, ex quibus labendo acquisitae sunt gravium celeritates, sunt in duplicata ratione celeritatum.

Hoc demonstravit Galilaeus certa assumta lege accelerationis uniformis, ut scilicet incrementa velocitatum sint aequalibus temporibus aequalia. Nos rem independenter ab ea hypothesi demonstramus ex inventa potentiae motricis absolutae mensura capite

peculiari exposita (Sect. 3 cap. 2). Nam potentiae mobilium seu ponderum aequalium in motu positorum sunt ut quadrata celeritatum (per prop. 4 cap. 2 Sect. 3). Vicissim potentiae eaedem sunt ut potentiae effectuum integrorum (per prop. 11 hic). Effectus autem integer ponderis, vi velocitatis suae ascendentis est ut altitudo perpendicularis (per prop. 14 hic). Et proinde potentiae corporum pondere aequalium et celeritatibus praeditorum sunt ut altitudines, ad quas vi earum celeritatum aequalia pondera attolli possunt; ergo et altitudines sunt ut quadrata celeritatum, per quas effici possunt. Sed eaedem sunt celeritates, per quas in horizonte existentes effici possunt elevationes supra horizontem, et quae corporibus inde in horizontem descendentibus rursus acquiruntur. Sic (fig. 155) cum pondus A in plano horizontali certa celeritate $_1A_2A$ datum ejusque vi, impetu sursum converso, ascendens ad $_3A$ indeque rursus descendens ad $_2A$ priorem celeritatem, quam in $_2A$ habuerat, recuperet (alioqui status in $_2A$ prior et posterior essent inaequales, causa plena et effectus integer, quod est absurdum; integer inquam effectus, subintelligitur enim a medio aut plano inclinato, in quo grave ascendit descenditque, nihil prorsus de impetu absorberi). Itaque celeritates descensu quaesitae a gravibus aequalibus sunt ut quadrata altitudinum. Manifestum autem est eandem celeritatem acquiri ex eadem altitudine, quaecunque sit corporis magnitudo (per prop. 31 hic). Itaque generaliter celeritates descendendo quaesitae sunt ut altitudinum quadrata.

Hinc vicissim demonstratio Galilaei valet ad nostras demonstrationes de aestimatione potentiae confirmandas argumento a posteriori; ex nostra autem demonstratione tota sequitur Galilaei hypothesis. Postquam enim hoc loco ostendimus altitudines esse ut quadrata celeritatum, sequitur incrementa altitudinum esse in ratione composita ex ratione celeritatum et ratione incrementorum celeritatis; sed incrementa longitudinum in omni motu sunt in ratione composita celeritatum et incrementorum temporis (per prop. 7 cap. 4 Sect. 2); ergo incrementa temporis sunt ut incrementa celeritatum, adeoque tempora ut celeritates, seu aequalibus temporibus aequales celeritates a gravibus acquiruntur. Calculus noster talis est: Sit altitudo A, celeritas C, tempus T. A est ut CC (ut hic demonstravimus); ergo $\overline{dA}$ ut $C\,d\overline{C}$ (ex nostra analysi infinitorum alibi publicata). Sed $d\overline{A}$ ut $C\,d\overline{T}$, (per nostras de velocitate in genere demonstrationes); ergo $\overline{dC}$ ut $d\overline{T}$, ac proinde (per

eandem analysin infinitorum) etiam C ut T, quod speciminis loco annotasse non abs re fuit. Atque ita tandem scientia motus gravium ab hypothesi liberata est. Illud vero praesupponatur, gravia plus vel minus a centro terrae distantia eandem vim descendendi habere, vel saltem errorem in casibus, de quibus agitur, non esse consideratione dignum; id enim supponit propositio 14.

Propositio 33.

Gravia easdem acquirunt celeritates, si ex eadem altitudine perpendiculari descendant quacunque licet via perpendiculari vel inclinata.

Ejusdem enim causae, gravis scilicet ad determinatam altitudinem super horizontem elevati, aequales inter se sunt effectus integri, cum ambo sint aequales ipsi causae communi. Effectus autem integer gravis supra horizontem elevati est status velocitatis, quam habet ubi labendo horizontem attingit. Tunc enim omnem cadendi ulterius facultatem consumsisse, et vim elevationis seu status pristini in vim acquisiti status novi, nempe impetus concepti, convertisse manifestum est, cum nihil aliud egisse supponatur. Idem ex praecedenti patet; cum enim altitudines generaliter sint ut quadrata celeritatum, ideo aequalibus altitudinibus aequales erunt celeritates.

Hujus propositionis demonstrationem Galilaeus in Scientia nova de motu non dederat, supplementum tamen affectum inter posthuma repertum est. Ex nostris principiis res primo obtutu constat.

Propositio 34.

Celeritates, quibus aqua erumpit in jactibus, sunt in subduplicata ratione altitudinum aquae incumbentis seu ut celeritates quas ex iis altitudinibus cadendo acquivissent.

Ponatur (fig. 156) lumen C tubi AB ita versum esse, ut aqua jactu sursum tendat quasi intra tubum recasura. Itaque cum ferentibus ita circumstantiis effectus causam reproducere possit (per prop. 5 hic), sequitur praecise tantum esse aquae erumpentis celeritatem, ut si ea pergeret, perveniret usque ad altitudinem tubi A, atque ita semper motum continuaret, alioqui enim effectus causae aequalis non esset. Celeritates autem sunt in subduplicata ratione altitudinum, ad quas attolli aequalia pondera possunt per prop. 32.

Sed hoc intelligitur, si nihil obstaculis deteratur. Itaque reapse id assequi non licet, alioqui haberetur motus perpetuus non Physicus tantum, qualis iste est, sed et Mechanicus, in quo effectus excederet causam, quia non tantum causam reproduceret, sed et aliquid praeterea, id scilicet, quod obstacula sunt passa, contra propositionem 8.

Propositio 35.

Nullum est Elastrum tam intensum, quin possit adhuc amplius intendi quantulacunque potentia viva.

Sit (fig. 157) Elastrum tensum AB utcunque; ajo corporis C quantulicunque velocitate quantulacunque in CB incurrentis impetu adhuc amplius tendi posse. Aequale est enim hoc Elastrum ponderi alicui, si quod esset coërcens (per prop. 22); sed pondus quantumcunque vinci potest ab impetu quantulocunque (per prop. 30).

Propositio 36.

Nulla chorda vel catena gravis in alio situ quam verticali perfecte in rectam extendi potest vi mortua; potest viva.

Sit (fig. 158) chorda AB tensa utcunque a pondere appenso quantocunque; appendatur jam chordae mediae pondus quantumvis exiguum D; ajo id nonnihil chordam inflectere. Nam cum triangulum rectangulum EDB possit esse tale, ut cathetus DE habeat rationem datam quamcunque ad differentiam inter basin BD et hypotenusam BE, manifestum est posse esse talem, ut ratio ipsius DE ad hanc differentiam duplam sit major quam ratio ponderis C ad ponduseulum D. Est autem differentia dupla aequalis ipsi CG ascensui ponderis C in casu chordae inflexae, et DE aequalis est descensui ponduseuli; potest ergo effici, ut descensus DE ponduseuli D majorem habeat rationem ad CG ascensum ponderis C, quam pondus C ad pondus D; sed tunc descendet ponduseulum D (per prop. 15 hic), donec scilicet una ratio alteri (reciprocae) fiat aequalis (per prop. 16). Quod autem efficit ponduseulum D in chorda etiam ponderis carente et perfecte antea tensa, id in chorda efficit ipsum chordae pondus, unde chorda gravis a pondere quantocunque perfecte tendi nequit, atque adeo nec ab ulla alia etiam vi mortua quae scilicet ponderi est comparabilis.

Impetus autem seu vis viva id potest, cum infinitam habeat rationem ad pondus. Unde pondus C, sublatum ad G, et inde rursus decidens tanta vi chordam AEB tendere potest, ut non tantum ad lineam rectam ADB perveniat, sed etiam concepto impetu excurrat altius, tremore quodam qualis in chordis tensis notatur, etsi status perfectae in rectam extensionis non nisi momentaneus esse possit et in transitu contingat.

Definitio 6. Impetus vel quantitas motus est ut factum ex mole seu pondere in celeritatem.

Ut si grave A trium librarum habeat celeritatem duorum graduum, et vicissim grave B duarum habeat celeritatem trium graduum, dicentur habere eundem impetum seu eandem quantitatem motus, licet eandem quantitatem actionis formalis durante eodem vel aequali tempore, adeoque eandem potentiam temporis initio non habeant, ut jam ostendam.

Proposito 37.

Duae inaequales materiae quantitates, si eandem habeant potentiam absolutam, non habent eandem quantitatem motus; et contra.

Sit corpus A 3 librarum, et corpus B duarum librarum, et habeat A celeritatem ut 2; erit quantitas motus in A, ut 6 seu 3 in 2 (per praeced.), quantitas vero potentiae absolutae in A erit 12 seu 3 in 4 quadratum de 2 (per prop. 4 cap. 2 sect. 3 adde et prop. 32 hic). Si jam B 2 eundem impetum habere debet seu eandem quantitatem motus quam A 3, hoc est quantitatem motus ut 6, utique B 2 accipiet celeritatem 3, sed ita habebit potentiam 2 in 9 seu 18. Quodsi B 2 eandem debet accipere potentiam quam A 3 nempe 12, accipere debebit B 2 velocitatem quae sit ut radix quadrata de 6. Sed tunc non habebit quantitatem motus quam A 3, nempe 6, cum quantitas motus ipsius B 2 futura tunc sit radix quadrata de 24. Et idem est in numeris aliis quibuscunque inaequalibus, ubi quadrata non possunt esse in ea ratione, in qua sunt latera.

Propositio 38.

Effici potest, ut corpus quodlibet datum datae velocitatis transferat in aliud prius quiescens totam suam potentiam vel partem ejus imperatam quantamvis.

Sit (fig. 159) datum corpus A datae velocitatis, et aliud quiescens datum B; ajo effici posse, ut tota potentia ipsius A vel etiam pars ejus imperata transferatur in B. Sit libra rectilinea rigida, carens mole (saltem consideratu digna), PCL, quam tangit quiescens B; ejus librae centrum sit C, et ex A ad eam normalis AL, qua A incurrit in libram. Patet utique libram sic assumi posse, ut CL sit ad CP in ratione data; vel etiam, si data sit positione libra, posse B atque A sic collocata supponi, ut ea ratio sit quaecunque desiderata, utroque corpore A et B existente ante libram, sed ad brachia contraria. Jam manente CL, si B tam prope accedere ponatur ad centrum C, ut in ipsum plane incidat, seu libram non nisi in centro tangat, seu si brachium CL sit infinite majus quam brachium CP, tunc nullo modo B impediet progressum ipsius A in momento incursus in L non magis quam si ipsum B tunc prorsus abesset; et ita corpus A incidens in L *perget* trans L continuata seu *retenta sua qua* advenerat *celeritate*. Contra, si infinita sit ratio brachii CP ad brachium CL sive scilicet brachio CL existente finito brachium CP sit infinitum, et corpus B infinite distare fingatur, sive (eadem propositione) si brachio CP existente finito brachium CL sit infinite parvum, hoc est, si A incurrat in ipsum centrum immobile rigidum; tunc perfecte resistetur ipsi A, ita ut *tota vi qua venit repercutiatur*. Cum enim nec progredi possit, nec ratio sit, cur in partem alterutram flectatur, nec vim possit in aliud transferre, ideo totam retinebit, et ea qua venit linea resiliet. Quodsi rationes sint finitae, et radio CL manente dato finito, corpus B a centro C tantillum recedat ad N, tunc progressus ipsius A in L incurrentis non prorsus quidem integer manebit, sed tamen nec prorsus sistetur, verum intermedium aliquid eveniet, ipsi casui B in centro existentis seu perfecti progressus ipsius A quantum volemus vicinum, ut scilicet A incidente in L, dum B quiescit in N, *pergat* quidem A trans L, sed *tardatum nonnihil* parte aliqua virium translata in B. Et nisi hoc fieret, ab uno extremo ad aliud transiretur non mutatione continua per variationes momentaneas inassignabiles, sed per saltum. Vicissim manente B in N vel ubicunque distantia BN existente finita, tunc uti A incidens in centrum C perfectam patiebatur repercussionem, ita si A incidisset in distantia tantilla a centro C, v. gr. in M, fuisset quidem repercussio, sed tantillo minor. Idemque erit si sit CP ad CL datam, uti CN ad CM, ut scilicet A

incidens in L repercutiatur a B existente in P, etsi non perfecta rejectione seu ea vi qua venit, sed ita ut pars virium translata sit in corpus B. Habemus ergo duos status, unum ut corpore A incidente in punctum datum L, corpore autem B quiescente in puncto N satis vicinio ad centrum, pergat A trans L, parte tamen virium amissa; Alterum ut corpore A itidem incidente in idem punctum datum L, B vero quiescente in puncto P satis remoto a centro C, repercutiatur A parte iterum virium amissa. Ergo transeundo ab N versus P, manente L, necesse est dari punctum intermediae distantiae velut Q, ubi posito B desinat pergere A incidens in L, et post quod incipiat reflectere, id est debet dari punctum Q tale, ut quiescente ibi B, ipsum A incidens in L nec pergat, nec reflectatur, sed praecise sistatur sive ad quietem redigatur, atque ideo totam suam potentiam transferat in corpus antea quiescens B, quod desiderabatur.

Manifestum est autem eadem methodo ostendi, nullum medium assignari posse inter perfectum progressum et perfectam repercussionem, quod non assignato certo loco ipsius B obtineri debeat, manente licet semper incursu eodem ipsius A in idem punctum L. Et proinde effici potest, ut A pergat vel reflectatur, parte virium quacunque retenta, atque adeo parte imperata virium in B antea quiescens translata, quod itidem desiderabatur. Quod autem pars virium ab A amissa transferatur in B, ex eo constat, quod effectus alioqui seu status sequens foret minor causa seu statu praecedente, quoniam subintelligimus libram esse perfecte rigidam et mole carentem instar lineae indivisibilis, vel saltem molem ejus tantam non esse, ut veniat in considerationem, adeoque nullam vim (consideratione dignam saltem) in se recipere vel absorbere, atque adeo omnem ipsius A actionem, quae effectum aliquem potentia praeditum producat, pervenire in B. Itaque cum effectus integer sit causae aequalis, et pars proinde virium ab A amissa utique alicubi esse debeat, erit ea in B translata.

Caeterum ut situs ipsius B determinetur praecise, in quo datam virium portionem accipiat, aliis praedemonstratis opus est, quae non sunt hujus tractationis; sequentem tamen propositionem subjicere placet, quippe iis non indigentem.

Propositio 39.

Si corpus in librae rigidae rectilineae mole (considerabili) carentis brachium incurrat, et ante brachium oppositum reperiatur quiescens aliud corpus, priori proinde non obstans, sitque distantia a centro quiescentis aequalis distantiae incurrentis, incurrens autem pergat post incursum; tunc velocitas, quam accipit quiescens, non potest esse minor velocitate quam retinet incurrens. Quodsi distantia quiescentis sit major, etiam velocitas, quam accipit quiescens, necessario major est illa qua pergit incurrens.

Nam (eadem retenta figura 159) A incidente in L et trans L pergente atque adeo brachium CQ pellente in contrariam partem, patet corpus B non posse tardius incipere moveri quam punctum Q immediate tangens et insequens. Jam si aequalia sunt brachia CQ et CL, utique aequalis est velocitas punctorum Q et L, puncti autem L velocitas eadem est quae incurrentis corporis A; itaque B non potest tardius moveri quam pergit A, sed movetur celeritate majore aut saltem aequali. Quodsi corpus B sit in loco P, ita ut radius CP sit major quam CL, multo magis verum erit, imo velocius B movebitur quam pergit A. Nam B non movetur tardius quam P, sed P velocius quam Q, id est L vel A; ergo et B velocius movetur quam pergit A.

Propositio 40.

Non eadem in corporibus se invicem agentibus conservanda est quantitas motus, sed eadem quantitas potentiae absolutae, alioqui daretur motus perpetuus Mechanicus.

Nempe ostensum est supra (prop. 7 et 8), eandem conservari quantitatem potentiae, sed haec differt a quantitate motus (per prop. 37) nec semper utraque simul conservari potest. Sed idem sic apparebit distinctius.

Sit (fig. 160) corpus A quatuor librarum descendens ex altitudine unius pedis et acquirens celeritatem unius gradus, ubi pervenit in horizontem. Ponatur jam totam ejus potentiam absolutam transferri debere in corpus B unius librae, ita ut quiescat corpus A, solius autem corporis B motus supersit (quod fieri posse osten-

sum est prop. 38 hic); quaeritur quantam velocitatem accipere debeat corpus B. Ajo si B 1 accipit eandem quantitatem motus quam habuit A 4, haberi motum perpetuum seu excessum effectus supra causam; sin vero accipiat eandem quam A habuit potentiam absolutam, ut a nobis aestimatur, effectum fore causae aequalem. Nam si corporis A librarum 4 celeritatem habentis gradus unius quantitas motus 4 (per def. 6) transferri debet in corpus B librae unius, ita ut B 1 accipiat eandem quantitatem motus 4, debet accipere celeritatem graduum 4 (per dictam defin. 6); sed si descendendo ex altitudine ${}_1A_2A$ seu unius pedis quaesita ipsius A 4 celeritas est gradus unius, utique B 1 habens celeritatem quatuor graduum ascendere poterit ad altitudinem pedum 16 (si scilicet ope penduli vel plani inclinati vim suam ad ascendendum convertat) per demonstrata a Galilaeo vel per nostram prop. 32 hic. Sed sola potentia A 4 librarum ex uno pede descendentium attollere unam libram B ad 16 pedes vel 4 libras ad 4 pedes (quod eodem redit) est effectum efficere quadruplum causae, cum ejusdem potentiae sit attollere 4 libras ad unum pedem et attollere unam libram ad 4 pedes. Itaque habetur motus perpetuus. Qui quomodo inde machinamento facili deduci possit, ostendimus in specimine demonstrationum de Lege naturae circa corporum potentiam initio totius hujus tractationis posito, quanquam intelligentibus rerum mechanicarum id per se sit manifestum. Itaque si potentia corporis A 4 librarum descendentis ex altitudine pedis unius transferri debet in corpus B unius librae, hoc debet accipere celeritatem ut 2; ita enim attollere poterit unam libram, corpus scilicet proprium ad altitudinem 4 pedum, et effectus erit aequalis causae. Cum enim causa fuerit Thema seu status 4 librarum elevatarum ad altitudinem unius pedis, Effectus integer primus seu immediatus fuerit celeritas unius gradus in 4 libris, Effectus integer secundus seu mediatus celeritas 2 graduum in una libra, Effectus integer tertius sit Thema seu status unius librae elevatae ad altitudinem 4 pedum; ita Thema primum et ultimum aequivalebunt: nam eadem potentia est 4 librarum elevatarum ad unum pedem, et unius elevatae ad 4 pedes (ex concessis et per prop. 16 hic), dando scilicet ipsi B 1 celeritatem 2, potentia ejus absoluta erit 4 (per prop. 4 cap. 2 sect. 3), eadem quae ipsius A 4 habentis celeritatem 1. Itaque cum eadem potentia conservanda est, non quantitas motus (ne excessus virium seu motus perpetuus

oriatur), sed talis quantitas potentiae absolutae qualem explicuimus conservari debet.

Ostendemus autem suo loco, etsi in natura non maneat eadem quantitas motus, manere tamen eandem in summa quantitatem nisus, seu conatus ad certam directionem sive vim directricem.

Definitio 7. Vis respectiva est, qua duo corpora in se invicem agunt; et cum duo mobilia concurrentia se mutuo sistunt, aequalem vim respectivam habere dicentur. Poterit etiam dici vis ictus sive percussionis.

Suo autem loco ostendetur, eandem esse vim ictus, sive A incurrat in corpus quiescens B, sive idem B eadem celeritate incurrat in A quiescens, imo quaecunque fiat hypothesis distribuendi motus, modo eadem maneat celeritas appropinquationum seu respectiva.

Propositio 41.

Si duo mobilia aequali quantitate motus directe seu perfecte concurrant, eandem habebunt vim respectivam, seu mutuo sistent progressum.

Sit (fig. 161) mobile DE duarum (si placet) librarum incurrens in A velocitate AH unius gradus, et mobile aliud FG unius librae incurrens in B velocitate FL duorum graduum. Ponantur autem A et B esse extremitates librae rectilineae ACB aequalium brachiorum AC et BC, et intelligantur mobilia ascendere impetu concepto graduum dictorum, seu ex inferiore loco venientia in libram ut diximus impingere; ajo se mutuo sistere debere, posito libram rigidam sive inflexibilem esse, nec ipsius molem considerari. Nam in uno DE 2 est potentia intra tempus elementare seu indefinite parvum attollendi suum pondus 2 ad altitudinem AH etiam indefinite parvam quae sit ut 1; erit in altero FG 1 potentia intra idem tempus elementare seu indefinite parvum attolli suum pondus 1 ad altitudinem BL prioris duplam, ob duplam celeritatem. Ejusdem autem est potentiae attollere pondus DE 2 ad altitudinem AH ut 1, et attollere pondus FG 1 ad altitudinem BL ut 2, et in casu concursus actio momentanea aestimanda est, intra tempus scilicet indefinite parvum. Itaque respective aequivalent corpora DE et FG suis in se mutuo agendi viribus, et proinde se mutuo sistunt. Nihil autem interest, utrum corpora duo sibi mutuo

occurrant interventu librae brachiorum aequalium, an vero immediate, cum utrobique aequaliter in se invicem totis viribus agant; itaque si (fig. 162) corpus DE librarum 2 celeritate $_1E_2E$ ut 1, et corpus FG librae unius celeritate $_1F_2F$ ut 2, directe seu perfecte concurrant, alterum alterius progressum mutuo sistet.

Habeo alias hujus propositionis demonstrationes, sed quaedam praedemonstranda requirentes, quae commodius in separatam tractationem differemus. Interim hoc loco discimus ex ipsa aestimatione potentiae absolutae, quomodo etiam aestimanda sit potentia respectiva, etsi hae duae potentiae a se invicem differant, ut patet ex sequenti. Atque ita uni eidemque principio aestimandi potentias per comparationem causae et effectus omnia nostra innituntur. Caeterum hanc propositionem quidam sine demonstratione assumunt, alii ex falso principio demonstrare voluere quasi ejusdem esset potentiae, corpus 2 habere velocitatem 1, et corpus 1 habere velocitatem 2, quod falsum esse ostendimus. Sed in casu aequilibrii, itemque et potentiae respectivae, ratiocinatio eorum per accidens succedit, quia tunc coincidit consideratio altitudinis (quippe momentaneae) seu tempore elementari obtinendae, et celeritatis, idque ipsum decepit plerosque, ut pro indubitato haberent idem esse quantitatem potentiae, absolutae scilicet (quae nempe in corporibus semper in summa conservari debet), et quantitatem motus. Unde illa celebris apud quosdam Lex naturae, quod eadem in Universo servetur quantitas motus sive impetus, quam falsam evicimus, meliorem et nunquam decepturam substituentes, quod eadem quantitas potentiae absolutae seu summa factorum ex ponderibus in altitudines, ad quas vi suarum potentiarum attolli possunt, atque adeo quantitas effectus integri causae aequalis in natura conservetur.

Propositio 42.

Si duo corpora inaequalia eandem habeant vim respectivam, seu perfecto concursu se mutuo sistant, non poterunt eandem habere potentiam absotam, seu idem pondus ad eandem altitudinem attollere; et vice versa.

Nam si sese mutuo sistant, eandem habent quantitatem motus (per prop. praeced.). Sed inaequalia corpora eandem haben-

tia quantitatem motus non habent eandem quantitatem potentiae absolutae (per prop. 34). Eadem argumentatio est pro conversa.

Si exempli gr. sint duo corpora, A librarum trium, velocitatis 1, et B librae unius, velocitatis 3, possunt sese sistere mutuo (per 41 praeced.). Sed cum A possit vi suae celeritatis tantum attollere libras tres ad altitudinem unius pedis, poterit B vi suae velocitatis attollere libram 1 ad pedes 9, vel libras novem ad pedem unum. Itaque different A et B potentia absoluta, seu quantitate effectus integri potentia praediti, quem producere vi suarum celeritatum possunt, etsi eadem in se mutuo potentia respectiva agant. Quarum rerum naturae et discrimina huc usque minus distincte cognoscebantur. Atque ita fontes Scientiae Dynamicae de Natura potentiae et actionis hactenus non satis exploratos aperuisse mihi videor, sublatis ambiguitatibus simplicissimo generalissimoque principio aequalitatis inter Causam et Effectum constituto, unde alia porro naturae admiranda peculiari tractatione deducemus.

SECTIO SECUNDA.

DE CENTRO GRAVITATIS ET DIRECTIONE MOTUS.

Caput I.

De Centro gravitatis et quod omni mobili tale centrum attribui possit.

Definitio 1. Centrum gravitatis est punctum, quo sustentato grave quomodocunque situm vi gravitatis non movetur. Intelligitur autem, lineas directionum seu in quibus punctum corporis gravis moveri tendit, esse parallelas inter se, et eodem modo gravitatem agere in quocunque horizonte seu plano ad lineas directionum normali.

Sit (fig. 163) grave A, et punctum C; suspendatur grave ex puncto suo D vel F ope funis (si placet) BD, sic ut recta perpendicularis ad horizontem DE vel FG transeat per C; tunc si

grave quiescit quantum ad gravitatem, nec in unam potius quam alteram partem fertur, idque succedat quodcunque sit punctum suspensionis D vel F, manente C, ipsum C dicetur centrum gravitatis. Quod proinde invenitur per diversarum perpendicularium, ut DE et FG, quas directionum lineas vocamus, intersectionem. Dubitari autem potest, utrum tale centrum detur. Nam etsi duae rectae alicubi se secent, non inde tamen sequitur quod intersectio omnium debeat esse communis, seu quod LM linea directionis in casu suspensionis ex L debeat DE secare in eodem puncto C, ubi secatur DE ab FG. Et videtur esse audax hoc postulatum, etsi successu comprobatum sit. Eoque major est ratio dubitandi, quod in plerisque figuris non datur centrum magnitudinis, seu punctum per quod recta vel planum transiens semper magnitudinem figurae in duas partes aequales secat, ut mox ostendemus. Multo minus ergo videtur figura semper per idem punctum in momenta aequalia secari, cum momentum magis sit compositum quam magnitudo, quippe ex magnitudine et gravitatione simul dependens. Et tamen quasi miraculo evenit, ut res semper succedat non tantum in centro gravitatis, sed et agitationis. Itaque demonstrationem tantae veritatis quaerere operae pretium est. Interim subintelligendae sunt conditiones definitioni ascriptae; nam si directiones gravium ponantur convergere in centro terrae, et major esse vel minor gravitas in majore elevatione, non exacte succedit. Etsi autem talis gravitas non sit in natura, qualem assumsimus, non ideo tamen minus datur centrum, quale definivimus, futurum scilicet si eae gravitatis conditiones ponerentur, imo serviens ad generales directionum aestimationes, ut suo loco apparebit.

Definitio 2. Centrum magnitudinis est, per quod planum quodcunque transiens figuram secat in duas partes aequales. Quodsi praeterea partes sint similes adeoque congruae, dicetur Centrum figurae; et Figurae quae habet centrum figurae, dici poterunt amphidextrae.

Tales sunt parallelogrammum, polygonum regulare, circulus, ellipsis, compositum ex duabus hyperbolis oppositis; et ex solidis cubus, aliaeque figurae regulares, sphaera, figura sphaeroides, aliaeve innumerae; et harum figurarum ambitus.

Propositio 1.

Punctum quod est centrum figurae, est etiam centrum gravitatis figurae (si scilicet materia figurata sit similaris).

Manifestum enim est in figura amphidextra, qualis est ad defin. 1 sustentato centro C, omnia semper utrinque eodem se modo habere seu congrua esse (per def. 2), nec proinde rationem esse, cur magis ad partes FL quam FD motus inclinet. Itaque quiescet grave, et centrum C (per def. 1) est centrum gravitatis.

Propositio 2.

Dantur figurae quae nullum habent centrum magnitudinis, seu punctum per quod a recta ducta quavis bisecentur.

Tales quidem sunt pleraeque, sed sufficit unam exhibere ex simplicioribus. Sit (fig. 164) Triangulum aequicrurum BAC, cujus angulus rectus A; basis BC bisecetur in D, et latera BA, CA in punctis E et F. Patet AD, BF, CE unamquamque triangulum hoc bisecare. Secabunt autem se istae in puncto M. Quodsi ergo datur hic centrum magnitudinis, utique (per def. 2) id erit punctum M. Quo posito (per eandem def. 2) ducta GMH recta basi parallela etiam bisecabit triangulum BAC; sed hoc est falsum. Nam ex E agatur in AD normalis EN. Cum AE sit dimidia ipsius AB, erit AN vel ND vel EN dimidia ipsius AD vel BD vel DC. Cum ergo triangula ENM et CDM sint similia, erit NM dimidia ipsius DM; ergo tertia pars ipsius ND, et proinde sexta pars ipsius AD. Ergo AM (id est AN + NM, dimidia pars cum sexta) constabit duabus tertiis ipsius AD. Est autem AM aequalis ipsi GM; ergo quadratum ipsius AM, hoc est quatuor nonae quadrati sub AD, aequatur triangulo GAH. Minime ergo verum est, triangulum GAH esse dimidium trianguli BAC, quod quadrato sub AD aequatur. Itaque punctum M non est centrum magnitudinis. Et proinde centrum magnitudinis in triangulo proposito non datur.

Propositio 3.

Sustentans eodem modo premitur ut prius, si tota gravitas in centrum gravitatis redigi ponatur, seu si grave ex manente centro libere suspendatur.

In figura definitionis 1 redigatur grave ADE in aliud minus

quidem, sed simile et similiter positum respectu centri gravitatis C manentis, quod grave novum sit gravitatis specificae in eadem proportione majoris, in qua est voluminis minoris; patet eandem esse vim quae funem trahit in directione BDC. Idemque est, si grave in spatium minus dato quovis contrahatur, donec tandem in punctum ejusdem cum gravi initio dato gravitatis evanescere fingatur. Idem et sic concluditur, quod posito corpus suspendi ex centro gravitatis C, tota utique vis gravitatis in puncto C funem BC trahit; nec refert cujus magnitudinis aut figurae sit, quod puncto C adhaeret, modo eadem maneat gravitas, quam totam agere manente gravitatis centro ex definitione hujus centri manifestum est, quia ipso sustentato tota impeditur, atque adeo in impedimentum agit.

Propositio 4.

Gravia quotcunque positione data, quorum quodlibet habet centrum gravitatis, habent centrum commune gravitatis.

Sint primum duo, et centra eorum (fig. 165) A et B ipsis corporibus inde suspensis aequivalentia (per praeced.) Sufficit ergo ut ostendamus, duo puncta licet gravitate inaequalia habere centrum gravitatis commune compositi ex ipsis A et B per lineam rigidam mole carentem connexis. Secetur recta AB in C sic ut AC sit ad BC in ratione quam postulat aequilibrium, seu ut sustentato puncto C nullus fiat motus vi gravitatis. Ergo punctum C (per def. 1) est centrum gravitatis compositi ex A et B. Invento jam centro corporum duorum, eodem modo habetur centrum trium et plurium, duo simul concipiendo ut unum corpus centrum habens, cujus porro ut diximus habetur centrum commune cum tertio, et ita porro. Dari autem aliquam rationem aequilibrii inter duo puncta A et B gravitate inaequalia, assumi potest ut postulatum; sed idem tamen si quis desideret, sic probatur. Manente linea rigida connectente A et B, sustentetur A; patet B totam suam gravitatem exercere, seu nullo modo sustineri vel ab A impediri. Jam recedat sustentans tantillum ab A versus B, patet A sustineri aliquomodo et aliquam habere descendendi libertatem; et sustentante porro magis magisque promoto versus B, patet libertatem seu vim agendi in A crescere, manente quidem sed decrescente sustentatione, donec sustentans perveniat ad B, ubi ip-

sum A nullo modo impedietur a B in totum sustentato, adeoque prorsus liberum erit. Idemque est de B vicissim. Cum igitur transeatur per omnes sustentationis et libertatis, seu momentorum gradus, qui ex contrarii actione majore minoreve oriuntur, adeoque in ratione quavis possibili, necesse est alicubi esse rationem aequalitatis, seu aliquod esse punctum aequilibrii C. Sustentato scilicet A, vis ejus ad vim ipsius B erat ut nihil ad aliquid, crevitque decrescente vi ipsius B, donec ista contra fiat ad vim A, ut nihil ad aliquid; et cum mutatio sit continua, utique per omnes rationes intermedias transiri oportet, adeoque et per rationem aequalitatis.

Caeterum qualis sit ratio aequilibrii nempe ut bracchia sint in reciproca ponderum ratione, ad hanc demonstrationem nihil refert, quanquam id potuissemus assumere velut demonstratum independenter ab hypothesi centri gravitatis.

Propositio 5.

Omne extensum grave habet centrum gravitatis et quidem unicum.

Sit (fig. 166) figura plana vel solida, gravitate praedita RST; haec resolvi potest in rectangula vel alias figuras amphidextras sive centrum figurae habentes, inscribendo v. gr. ipsi RST maximum rectangulum 1, et residuis portionibus maxima inscribendo rectangula 2, 2, et iterum residuis maxima inscribendo 3, 3, 3, 3, et ita porro, ita ut quod superest, minus fieri possit data quavis quantitate. Jam quodlibet horum rectangulorum habet centrum gravitatis (per prop. 1), et plura positione data quotcunque, quorum singula habent centrum gravitatis, habent centrum gravitatis commune (per prop. 4). Itaque aggregatum rectangulorum, hoc est figura data habet centrum gravitatis. Quodsi extensum esset linea curva vel superficies gibba, potest pro ea adhiberi ambitus polygoni vel polyedri inscripti minus differens quantitate data; is ambitus autem polygoni constet ex rectis, polyedri ex planis, quae cum centrum gravitatis habere ostensum sit, ipse ambitus tale centrum habebit. Quodsi extensum non sit similare, sed variae in variis partibus gravitatis, cujuslibet partis similaris praeinvestigetur centrum. Quodsi nulla pars similaris detur, error tamen dato minor erit, si partes quantum satis parvae tanquam similares mediae gravitatis inter eas, quas quaeque habet, gravitates assumantur. Caeterum

sicubi sit centrum gravitatis, simul unicum esse manifestum est, cum ab ipso prius aequidividente in quamcunque partem recedendo plus ponderis a tergo relinquatur.

Hinc manifestum est, quae de centro gravitatis unius corporis vel mobilis dicuntur, pertinere etiam ad centrum gravitatis mobilis ex pluribus mobilibus discretis.

Propositio 6.

Si in gravibus sola agat gravitas, descendet gravium centrum gravitatis commune.

Ponamus (fig. 167) gravitatem egisse, et ideo aliquid descendisse. ut B ex $_1B$ in $_2B$; dico et centrum commune (verbi gr. ipsorum A et B) descendisse ex $_1C$ in $_2C$. Ponamus enim non descendisse, sed mansisse in $_1C$. Ergo jungantur lineis rigidis A_1C, $_2B_1C$, et sustentetur centrum C. Patet totam vim gravitatis ipsorum A et B sustentari (per def. 1 seu per prop. 3 hic), et proinde eandem potentiam esse in $_1C$, quanta erat ante descensum ipsius B. Sed adest praeterea potentia nova quae descensu ipsius B produci potuit, verbi gr. elastrum aliquod descensu illo tensum, vel impetus impressus. Effectus ergo seu status posterior A_1C_2B cum elastro tenso sumtus major est causa seu statu priori A_1C_1B, quod est absurdum per axioma capitis de causa et effectu Sect. 4 (adde dictae Sect. prop. 3). Necesse est igitur descendisse et centrum C.

Caput II.

De Motus directione et figura.

Definitio. Directio est linea recta, in qua movetur punctum mobile ab initiali rectae puncto versus aliud ejusdem rectae punctum, nisi a causa superveniente impediatur.

Si (fig. 168) gravis puncti A directio versus centrum terrae est recta BC ducta a B loco ipsius A ad centrum terrae C, quia a B incipiens moveri A, movetur in recta BC, ita ut propius fiat ipsi C, scilicet nisi aliqua causa nova superveniat, qualis esse posset impulsus lateralis versus E seu directione AE, unde fieri posset, ut grave moveretur in linea aliqua AF motu composito, ut mox patebit. Addatur definitio Motus aequidirecti supra prop. 5 et 8 cap. 5 Sect. 2 et propositio 26 Sect. 4, ubi de directione motus curvilinei, quae est in tangente.

Propositio 1.

Quotcunque motus et qualescunque componi possunt inter se, ita ut punctum mobile motu ex omnibus composito feratur.

Superficies quaecunque rigida moveatur qualicunque motu aequidistributo et aequidirecto, quod fit, si puncta ejus aliquot numero finita sufficientia (qualia sunt in plano tria in eandem rectam non cadentia) in lineis inter se congruis (seu similibus et aequalibus) moveantur, unde et reliqua puncta omnia per lineas prioribus gemellas seu congruas eodem modo seu congrue movebuntur. Ut si (fig. 169) rigida superficies ABCDE moveatur, ita ut puncta A, B, C, D lineas congruas ut ${}_1A_2A$, ${}_1B_2B$, ${}_1C_2C$ etc. describant, unde et reliqua quaecunque tales describent, omniumque punctorum eadem erit celeritas et directio. In hac superficie sit crena excavata secundum lineam quamcunque DE, in qua interim dum movetur superficies ABC, moveatur mobile M celeritate quacunque data in crena tanquam quiescente. Manifestum est, hos duos motus, unum nempe superficiei, omnibus ejus punctis adeoque et crenae ac proinde et mobili in ipsa crena communem, alterum mobilis proprium in crena, componi inter se in mobili M, quod proinde describet lineam ${}_1M_2M$, cujus puncta quaevis pro tempore quovis ex situ crenae ob motum superficiei communem dato, et situ mobilis in crena ob datum in ea mobilis motum proprium, determinari possunt. Quodsi ipsa interim superficies ABC rursus eodem modo moveatur in alia superficie mota tanquam fundo, punctis aliquot A, B, C per hujus fundi crenas ${}_1A_2A$, ${}_1B_2B$, ${}_1C_2C$ incedentibus, dum interim ipsa haec nova superficies seu fundus movetur, habemus tres motus inter se compositos, et ita porro, si libet, plures.

Propositio 2 et Definitio.

Si duo motus rectilinei uniformes vel velocitate proportionales componantur inter se, ita ut mobile in angulo positum eodem tempore percurrat unum latus anguli secundum unum motum et alterum secundum alium, motus compositus erit in recta diagonali completi secundum haec latera parallelogrammi, eamque eodem tempore absolvet, eritque similiter niformis aut proportionaliter cum prioribus crea-

cens vel decrescens. Et proinde si celeritas et directio motuum componentium repraesentetur per latera parallelogrammi, celeritas et directio motus compositi repraesentabitur per diagonalem. Directionem autem cum velocitate ducta in quantitatem materiae Nisum, sed cum flexum simul designabimus, generaliori voce vocabimus Conatum. Unde nisus omnes sunt rectilinei, conatus vero tam rectilinei quam etiam circulares aliterve curvilinei.

Per regulam (fig. 170) immotam ${}_1B_2B$ incedat regula mobilis BC eodem semper angulo servato regulae ad regulam. Atque interim in regula motu proprio incedat mobile M, sitque velocitas regulae ad velocitatem mobilis in regula, ut ${}_1B_2B$ ad BC in eadem semper ratione constante, quod fit, sive velocitas utriusque semper maneat eadem, sive eadem proportione crescat utrobique; compleatur parallelogrammum ${}_1C_1B_2B_2C$, et ducatur diagonalis ${}_1B_2C$, (aio eam repraesentare velocitatem et directionem motus compositi ipsius M, seu quo tempore regula percurrit ${}_1B_2B$, mobile M percurrere ${}_1B_2C$. Manifestum enim est, quo tempore BC ex ${}_1B_1C$ pervenit in ${}_2B_2C$, mobile M pervenire ex B in C, adeoque cum initio fuerit in ${}_1B$, in fine esse in ${}_2C$; idque cum eadem proportione locum habeat in puncto intermedio quocunque (ipsum enim ${}_2B$ pro arbitrio assumsimus), patet semper mobile M versari in recta ${}_1B_2C$ et partes ejus absolvere proportionales partibus regularum. Etsi autem motus non sint uniformes nec proportionales, ut tales tamen seu motuum elementa, quae semper ut motus uniformes assignabilibus minores concipi possunt, conatum rectilineum component.

Propositio 3.

Quotcunque motus uniformes vel proportionaliter velocitatem variantes rectilinei inter se compositi componunt motum mobilis puncti rectilineum etiam uniformem vel proportione eadem cum reliquis variatum, et proinde quotcunque conatus rectilinei componunt conatum rectilineum.

Cum enim duo talem componant (per praeced.), compositus cum tertio iterum (per eand.) componet talem novum, et ita porro.

Propositio 4.

Mobile quod fertur in linea curva, conatur ab ea recedere per tangentem.

Hujus demonstrationem anticipavimus prop. 26 Sect. 4, quae huc repetatur.

Propositio 5.

Omnis motus curvilineus in plano intelligi potest compositus ex duobus rectilineis, quorum unus sit uniformis vel velocitatis quacunque lege data crescentis aut decrescentis. Pro motu in solido adhiberi possunt rectilinei tres.

Descripta scilicet (fig. 171) in plano linea motus MM, atque inde in angulum rectilineum CMB vel CAB ductis coordinatis MB, MC, intelligi potest mobile M ferri motu composito ex motu regulae mobilis CC incedentis per immotam regulam BB, et motu proprio in regula, motibus ita temperatis, ut dum regula CC absolvit AB (aequalem ipsi MC), mobile M in ea absolvat AC (aequalem ipsi MB).

Si motus CC sit uniformis, et BB gravitatis uniformiter secundum tempora acceleratus, ostendit Galilaeus describi parabolam. Si motus BB uniformiter secundum loca retardetur, ut fit in fictione, velut cum globus movetur super tapete, et interim tabula cum tapete et globo in eo currente uniformiter transferatur, demonstravi ego lineam logarithmicam a globo describi. Sed talia nunc prosequi non est praesentis instituti.

Propositio 6.

Si mobile feratur motu composito ex rectilineis uniformi et alterius legis, describet lineam, in qua ex data progressione abscissarum habetur progressio ordinatarum, ut in dicta lege ex data progressione temporum habetur progressio spatiorum.

Ut si (fig. 171) spatia AB a puncto B percursa crescant Geometrica progressione, dum tempora per rectas AC repraesentata crescant progressione Arithmetica; manifestum est in motu composito lineam MM logarithmicam describente abscissas AC esse ut tempora, ordinatas CM (seu AB) ut spatia a puncto mobili M percursa.

Propositio 7.

Quaevis linea curva motu composito ex duobus vel tribus, circularibus, vel rectis et circularibus describi potest.

Sit (fig. 172) immobile punctum C, circa quod in eodem (si placet) plano moveatur recta rigida CA, describens arcum circuli ${}_1A{}_2A$, et interim circa A moveatur recta indefinita AB. Sit linea curva terminata quaecunque ${}_1M({}_2M)$ data, et datum punctum M in recta AB, cujus ab A distantia data AM, modo ea sufficientis sit magnitudinis, ut a quovis puncto circuli AA ad curvam ${}_1M({}_2M)$ pertingere possit. His positis manifestum est, dato quocunque curvae MM puncto ut $({}_2M)$ datoque situ rectae CA ut $C{}_2A$, posse dari situm ipsius AB, nempe ${}_2A({}_2B)$ talem, ut punctum M cadat in locum assignatum $({}_2M)$. Et ita data circulatione ipsius CA circa C, investigari potest, qualis debeat esse circulatio ipsius AB circa A, ut punctum M salva distantia sua ab A describat curvam datam ${}_1M({}_2M)$. Quodsi linea ${}_1M{}_2M$ ad infinitam distantiam continuetur, res obtineri non potest, nisi M in recta infinita AB progredi possit. Si curva non sit in plano, tres motus inter se componi possunt, ut si manente motu ipsius AC circa axem CA in plano ad paginam verticali, ut scilicet perveniatur ad punctum in sublimi curvae alicujus datae.

Propositio 8 et Definitio.

Velocitates circulantium sunt in ratione composita vertiginum et radiorum circularium. Vertigo autem est velocitas angulos absolvendi.

Sit (fig. 173) linea infinita ABC ita mota circa punctum immotum A, ut quodvis ejus punctum, ut B vel C, circuli arcum describat, idemque intelligatur in alia recta infinita LMN; erit Vertigo in tota linea infinita, Velocitas scilicet angulum absolvendi. Et posito motu uniformi, erunt vertigines reciproce ut *tempora periodica*; posito autem aequali tempore, quo verbi gr. recta ABC absolvit angulum ${}_1BA{}_2B$, et recta LMN angulum ${}_1ML{}_2M$, in motu uniformi erunt anguli ut vertigines, seu vertigo rectae ABC ad vertiginem rectae LMN, ut angulus ${}_1BA{}_2B$ ad angulum ${}_1ML{}_2M$. Hinc cum velocitates aestimentur motu uniformiter continuato per tempora aequalia, vertigines per angulos uniformiter percurrendos aestimabuntur, etsi motus uniformis non sit, eruntque ut anguli

elementares aequalibus temporum elementis percursi. Porro in punctis C et N aeque distantibus a suis centris (si AC sit aequalis ipsi LN) patet, ipsas circulandi velocitates esse ut vertigines; nam arcus aequalium circulorum sunt ut anguli. Jam circulationes punctorum ejusdem rectae sunt ut radii, seu distantiae a centro, verbi gr. velocitas ipsius B est ad velocitatem ipsius C, ut AB ad AC. Hinc jam sequitur, circulationes seu circulandi velocitates esse in ratione composita vertiginum et radiorum. Nam velocitas ipsius B est ad velocitatem ipsius C, ut AB ad AC, et velocitas ipsius C ad volocitatem ipsius N (posito AC et LN esse aequales) est ut vertigo rectae ABC ad vertiginem rectae LMN, et velocitas ipsius N est ad velocitatem ipsius M, ut LN (id est AC) ad LM. Ergo velocitas ipsius B est ad velocitatem ipsius M in ratione composita ex ratione AB ad LM, radiorum et ratione vertiginum.

Propositio 9.

Si eadem recta rigida mobilis simul habeat plures vertigines circa plura centra in ipsamet sumta, assignari in ea potest unum centrum, circa quod revera recta circulatur circulatione una aequivalente pluribus illis compositis.

Ponamus (fig. 174) rectam aliquam rigidam LGABHM eodem tempore impelli normaliter aequalibus nisibus contrariis in eodem plano ab oppositis partibus, ut nisibus ab FG et CH, utique eatenus vertiginem haec recta concipiet circa punctum A medium inter G et H. Si jam eadem praeterea recta impellatur duobus nisibus aequalibus oppositis DE et TV, eatenus vertiginem concipiet circa punctum B medium inter E et V; ajo ex duabus istis circulationibus compositis oriri novam circa punctum aliquod S, et tam gradum vertiginis quam centrum S ex datis assignari posse. Sumatur punctum L in recta; id quatenus conatur circulari, conatur in tangente circuli, id est perpendiculari ad rectam in L. Conatus ergo ambo componentur inter se, ita ut sit conatus compositus ut LP composita ex LN et NP, quae repraesentet conatus componentes, LN conatum circa A, NP conatum circa B, posito (si placet) ambos conatus circulandi tendere ad easdem partes. Idemque sit ab altera parte in puncto M, ut MQR repraesentet conatum compositum ex MQ circa A, et QR circa B. Videamus an inveniri

possit constans punctum L, circa quod circulandi prodeant conatus LP et MR.

Vertigines circa puncta A, B, S designemus per has ipsas literas (A), (B), (S), totidem rectarum vertiginibus proportionalium significatrices. Velocitates autem circulandi circa puncta A, B, S designantur in L per rectas LN, NP, LP; et in M per rectas MQ, QR, MR. Sunt autem per praecedentem velocitates circulandi in ratione composita vertiginum et radiorum, et erit (verbi gr.) LN ad NP, ut LA . (A) ad LB . (B). Itaque sunt rectae LN, NP, LP, ut rectangula, ut LA . (A), LB . (B), LS . (S). Et similiter MQ, QR, MR, ut MA. (A), MB. (B), MS. (S). Jam LP aequal. LN+NP; et MR aequal. MO+QR. Ergo LS. (S) aequal. LA.(A)+LB. (B); et MS . (S) aequal. MA . (A)+MB . (B). Ergo LS+SM (seu LM) in (S) aequal. LA+AM (seu LM) in (A)+LB+BM (seu LM) in (B), id est, fit (S) aequal. (A)+(B), seu vertigo circa S aequatur summae (aut si contrariae sint vertigines componentes, differentiae) vertiginum circa A et B.

Jam si L et A coincidant, itemque M et B, evanescent LA et MB, fietque LB aequal. MA, hoc est AB; itaque cum esset LS.(S) aequal. LA.(A)+LB.(B), et MS.(S) aequal. MA.(A)+MB.(B), fiet inde AS.(S) aequal. AB.(B) et BS.(S) aequal. AB.(A), id est, fiet AS ad BS, ut (B) ad (A), seu ad inveniendum centrum novum S debet esse AS ad BS, ut vertigo circa B ad vertiginem circa A, seu distantiae centrorum A et B a centro novo S reciproce ut vertigines circa praedicta centra.

Cumque tam vertiginem quam centrum independenter a puncto quovis ut L vel M tandem determinaverimus, patet idem centrum constans S eandemque vertiginem esse pro puncto rectae quovis, adeoque revera rectam circulari circa S vertigine inventa. Hinc patet, etsi recta LM quotcunque habeat simul circulandi conatus circa centra quotcunque, non nisi una circulatione simplice circa unum centrum moveri, cum duae componant novam, et haec cum tertia rursus novam, et ita porro.

Idem longius provehi potest, ut si (fig. 175) in plano duo centra A et B vertiginum componentium non cadant in eandem rectam cum puncto L, quod vertigine composita moveri debet, manifestum est, duos esse nisus puncti mobilis L, unum in recta LK perpendiculari ad AL, alterum in recta LN perpendiculari ad BL, quae sunt inter se ut circulationes; et nisus compositus ex-

hibebitur recta LP aequali ipsam NK bisecante diagonali parallelogrammi completi (per prop. 2), et tunc angulo PLS recto ducta LS secans AB (si opus productam) in S dabit centrum S. Quod et sic determinari poterit, ut S sit unum ex punctis L, sed tale, ut ipsi nisus compositi producant quietem; debet enim S vi circulationum compositarum quiescere, ut fiat centrum reliquorum. Hoc autem fieri non potest, nisi puncta K, L, N cadant in directum, et LN, LK sint aequales atque in contrarias partes. Igitur eadem recta LN vel LK debet esse normalis tam ad AL, quam ad BL, quod fieri non potest, nisi hoc L quod quiescere debet, id est S, cadat in eandem rectam cum ipsis A et B. Rursus ut SN et SK sint aequales, ideo cum sint ut circulationes, id est in ratione composita vertiginum et radiorum, erunt radii seu distantiae ipsorum priorum centrorum A et B a novo centro S reciproce ut vertigines, ut supra. Et quia debent nisus esse contrarii, hinc sequitur, si vertigines datae sint ad partes easdem, cadere S inter A et B; sin ad partes sint contrarias, cadere extra.

Hoc novum componendarum circulationum genus, ita ut centra plura sint in ipso mobili, longe diversum ab eo quod prop. 7 exposuimus, et potius nisuum quam motuum, vel ideo memorabile est, quod ita innumerae circulationes compositae producunt novam, secus ac regulariter fit in prop. 7, et respondet haec compositio conatuum circularium compositioni conatuum rectilineorum, qui quotcunque sint novum conatum rectilineum componunt.

Propositio 10.

Rigidi motus magneticus (id est ubi recta quaevis manet suis vestigiis parallela) est aequidistributus et aequidirectus, et quodlibet punctum describit lineam lineae ab alio quovis puncto eodem tempore descriptae congruentem.

Ut si (fig. 176) terrella Magnetica ABCD moveatur utcunque, veluti (si placet) sic ut centrum ejus E describat lineam circularem circa centrum aliquod F. et interea (ex natura magnetismi) ejus axis BD semper sibi maneat parallelus, adeoque polis suis B et D respiciat easdem plagas, necesse utique est, ut et quaelibet alia recta in terrella ducta maneat suis vestigiis parallela, quoniam rectae eae quae axi BD in rigido ABCD parallelae sunt, semper manent parallelae, ergo et sibi, et quae rectae ad has angulos

quoscunque faciunt, eosdem in rigide retinent, ideoque itidem sibi parallelae manent. Hinc jam necesse est, et lineas a punctis ut E et D simul descriptas, per omnia esse similes et aequales, seu congruas, unde motum quoque in mobili tam aequidirectum quam aequidistributum esse sequitur. Ac preinde posito (exempli causa) centrum terrellae describere lineam circularem, quodlibet punctum terrellae lineam circularem describet.

Hoc ut appareat, sufficit ostendere, si recta aliqua ED suis vestigiis parallela feratur et uno puncto E per aliquam lineam EE incedat, eam quovis alio D lineam DD priori congruam describere. Unde idem de quovis mobilis rigidi puncto sequitur, quod cum alio quovis per rectam connectitur, quae utique, suis vestigiis parallela manet. Sit aliquod lineae EE punctum G, et respondens alterius lineae DD punctum H, ita scilicet ut recta ED translata in GD puncto E incidat in G, et puncto D in H. Sunt ergo rectae ${}_1$ED et GH aequales et parallelae, adeoque in parallelogrammo ${}_1$EDHG etiam ${}_1$EG est aequalis ipsi ${}_1$DH; et eodem modo ${}_2$EG est aequalis ipsi ${}_2$DH. Itaque quodvis punctum lineae DD eodem modo a duobus punctis ${}_1$D, ${}_2$D in ea sumtis distat, ut quodvis punctum respondens lineae EE a duobus punctis ${}_1$E, ${}_2$E, quae tantundem inter se distant, quantum ${}_1$D et ${}_2$D, quoniam ob aequales ${}_1$EG ipsi ${}_1$DH, et ${}_2$EG ipsi ${}_2$DH aequalemque angulum ${}_1$EG${}_2$E angulo ${}_1$DH${}_2$D, erit et recta ${}_1$E${}_2$E rectae ${}_1$D${}_2$D aequalis, itaque congruere possunt puncta ${}_1$E, ${}_2$E ipsis ${}_1$D, ${}_2$D, et punctum quoque aliud quodcunque ut H puncto respondenti G simul congruere poterit, adeoque linea lineae.

Propositio II.

Si puncta quotcunque moveantur in rectis parallelis etiam centrum gravitatis eorum (nisi quiescat) movebitur in recta ipsius parallela, et si motus punctorum sit praeterea uniformis vel in omnibus proportionaliter acceleratus aut retardatus, tunc etiam motus centri gravitatis erit talis.

Punctum A (fig. 177) feratur in recta AA, et punctum B in recta BB priori parallela; ajo et centrum gravitatis eorum C ferri in recta CC, eaque prioribus perallela.

Ut si eodem tempore respective sint A in ${}_1$A, ${}_2$A, ${}_3$A, et B in ${}_1$B, ${}_2$B, ${}_3$B, et C in ${}_1$C, ${}_2$C, ${}_3$C, sitque AAA et BBB recta, erit et

CCC recta. Patet ex eo, quod recta CC parallela duabus AA et BB secat quascunque rectas AB inter has duas interceptas, ut ${}_1A_1B$, ${}_2A_2B$, ${}_3A_3B$, in eadem ratione data. Ducantur enim per B parallelae inter se BE, hae utique secantur a recta CF in eadem ratione data in F; jam per eandem rectam CF secatur AB in C, ut BE in F; ergo ut omnes BE secantur in eadem ratione in F, ita et omnes AB secantur in eadem ratione in C. Jam centrum gravitatis C secat AB in eadem ratione, cadit ergo in rectam CC parallelam ipsis AA et BB.

Quodsi (fig. 178 et 179) puncta A et B moveantur motu uniformi vel saltem proportionaliter crescente, seu sit ${}_1A_2A$ ad ${}_2A_3A$, ut ${}_1B_2B$ ad ${}_2B_3B$, tunc ductae rectae AB (ut ${}_1A_1B$, ${}_2A_2B$, ${}_3A_3B$) concurrent in puncto G; est igitur et ${}_1C_2C$ ad ${}_2C_3C$, ut ${}_1A_2A$ ad ${}_2A_3A$, vel ut ${}_1B_2B$ ad ${}_2B_3B$, ob triangula similia G_1B_2B, G_1C_2C, G_1A_2A; itemque similia G_2B_3B, G_2C_3C, G_2A_3A. Porro quod de punctis duobus A, B verum est, id verum est de punctis quotcunque ut A, B, D, eodem argumento, si pro duobus A, B centrum eorum commune C substituatur, quod cum moveatur in linea recta ipsis lineis AA, BB parallela (ex demonstratis) et moveatur praeterea punctum novum D in linea recta ipsis parallela utique, centrum gravitatis commune punctorum C et D movebitur in linea recta ipsis parallela, id est centrum commune gravitatis punctorum A, B, C. Et ita porro argumentum producetur ad puncta quotcunque rectas parallelas describentia. Etiamsi quiescat centrum gravitatis, quod fit cum utrinque contrarii punctorum motus compensantur, tamen intelligi potest centrum gravitatis moveri secundum leges propositionis, motu licet inassignabili seu summe tardo, qui quacunque proportione variatus manet inassignabilis. Unde generaliter verum est, punctis motis in rectis parallelis velocitatibus punctorum proportionalibus, etiam centrum gravitatis sic moveri.

Propositio 12.

Si puncta gravitatis quotcunque cujuscunque gravitatis moveantur in rectis parallelis, describetur a centro gravitatis communi recta, quae ducta in pondus aggregatum omnium punctorum aequatur summae ex viis rectis singulorum punctorum in suorum punctorum pondera ductis, si quidem omnia puncta tendant in easdem partes; quodsi aliquod ten-

dat in partes contrarias, ejus via in pondus puncti ducta non addenda, sed detrahenda est. Et si viam puncti in pondus ductam vocemus Progressum, tunc progressus ponderis integri secundum centrum gravitatis generaliter erit summa progressuum punctorum singulorum vel differentia.

Si (fig. 180) duo sint puncta aequalis ponderis A et B, quorum viae rectae ${}_1A\,{}_2A$, ${}_1B\,{}_2B$ sint parallelae et in easdem partes, patet viam centri seu puncti medii seu rectam ${}_1C\,{}_2C$ duplicatam aequari summae ipsarum ${}_1A\,{}_2A$ et ${}_1B\,{}_2B$. Nam ducatur ${}_2AD$ parallela ipsi ${}_1A\,{}_1B$ secans ${}_1C\,{}_2C$ in E, et ${}_1B\,{}_2B$ in D, patet ${}_1CE$ (aequalem ipsi ${}_1A\,{}_2A$ vel ${}_1BD$) duplicatam summae earum aequari et E_2C duplicatam aequari residuo ipsius ${}_1B\,{}_2B$, nempe ipsi D_2B. Quodsi puncta sint inaequalia, verbi gr. A duplum ponderis ipsius B, idem locum habebit, nam B (C) erit dupla ipsius A (C). Ergo E_2C est tertia pars ipsius D_2B seu ipsius D_2B sumtae semel, et $({}_1C)$ (E) est tertia pars ipsius ${}_1A\,{}_2A$ sumtae bis (pro ratione ponderis) et ipsius ${}_1B\,{}_2B$ sumtae semel. Ergo $({}_1C)$ $({}_2C)$ via centri est tertia pars viae ipsius A sumtae bis, et viae ipsius B sumtae semel. Atque idem succedit, quaecunque sit proportio ponderum duorum punctorum. Sed si (fig. 181) motus sit in contrariam partem, ut si motus ipsius A sit ${}_1A\,{}_2A$, et motus ipsius B contrarius ${}_1B\,{}_2B$, et ducatur per ${}_2A$ ipsa ${}_2AD$ parallela ipsi ${}_1A\,{}_1B$, et centri via sit ${}_1C\,{}_2C$, quae si opus producta occurrat ipsi ${}_2AD$ in E; patet ${}_1CE$ esse tertiam partem duplae ${}_1A\,{}_2A$ et simplae ${}_1BD$ (cum hae tres rectae sint aequales) et E_2C esse tertiam partem ipsius D_2B simplae; ergo ${}_1C\,{}_2C$, id est ${}_1CE$ minus E_2C, id est tertia pars compositi ex bis ${}_1A\,{}_2A$ et semel ${}_1BD$ minus tertia parte ipsius D_2B seu compositi ex ${}_1BD$ et ${}_1B\,{}_2B$ est tertia pars ipsius ${}_1A\,{}_2A$ minus semel ${}_1B\,{}_2B$. Itaque via contraria tantum subtrahenda est, caeteris ut ante factis. Idem est in aliis proportionibus punctorum A et B quibuscunque, et quod de duobus punctis dictum est, producitur ad puncta quotcunque, si pro duobus centrum substituatur, quod pondere amborum oneratum suo tractu duorum progressibus aequivalet, ut hic ostendimus; unde jam cum tertio prodit via centri novi omnium trium, et ita porro.

Propositio 13.

Si puncta quotcunque moventur motibus aequidirectis, centrum gravitatis commune itidem movebitur motu aequidirecto; et summa progressuum vel (ubi in partes contrarias itur) differentia erit aequalis progressui ponderis totius secundum viam centri gravitatis. Et si praeterea motus punctorum sint uniformes vel saltem inter se proportionales, etiam motus centri gravitatis erit uniformis vel prioribus motibus proportionalis.

Si punctum A (fig. 182) describat lineam quamcunque AA, et B quamcunque BB, ita tamen ut eodem tempore directiones seu linearum tangentes sint parallelae, ut in $_1A$ et $_1B$, in $_2A$ et $_2B$, in $_3A$ et in $_3B$, et ita in caeteris; etiam centrum eorum C lineam describet CC motu aequidirecto, seu ut directiones in $_1C$, $_2C$, $_3C$ sint prioribus respondentibus parallelae. Hoc patet ex praecedenti, si pro lineis curvis polygona adhibeantur minus errore assignato a curvis differentia, ita ut et respondentia latera polygoni sint parallela, et eodem tempore absolvantur.

Propositio 14.

Si mobile quodcunque (rigidum vel fluidum, continuum vel discretum) moveatur motu aequidirecto (hoc est ut omnia puncta eodem tempore directionibus parallelis ferantur), Centrum quoque gravitatis ejus (etiamsi caderet extra mobile) movebitur motu aequidirecto ad priores motus, et factum ex ductu ponderis integri in viam centri erit progressus totius mobilis seu aequabitur summae (vel ubi contraria directio est, differentiae) progressuum punctorum vel partium. Idem est si puncta quaedam vel partes durante tempore nunc quiescant nunc moveantur.

Quoniam scilicet progressum totius intelligimus nihil aliud esse quam summam viarum cujusque puncti in puncta, vel si ea inaequalia sunt, horum pondera ductarum, eodem modo ac explicatum est (in capite de Ductibus) pondus integrum gravis oriri ex punctorum gravitatibus specificis in puncta ordinatim ductis. Huic autem summae productorum ex unaquaque via in sui puncti pon-

dus ducta factorum aequatur factum ex aggregato ponderum in viam centri (per prop. 2). Unde idem de summa omnium punctorum, hoc est extenso quocunque, quod ex punctis, id est partibus quantaevis parvitatis, ut error dato minor fiat, componitur, locum habet.

Idem prodibit, si pro punctis mobilia in globos vel circulos resolvamus continue inscriptos donec residuum sit minus dato, modo progressum globi vel circuli, ita moti ut puncta ejus omnia simul describant rectas aequales et parallelas in easdem partes, aestimemus via unius puncti, velut centri, in molem seu pondus ipsius circuli vel globi ducta, tanquam totum pondus reductum esset in centrum; et ita quod de centris, idem de partibus verum est, et progressum compositi aestimemus summa progressuum quos habent partes. Caeterum quod de motibus rectilineis, idem de aequidirectis etiam curvilineis ostenditur, motus aequidirectos in rectilineos parallelos assignatis minores resolvendo. Quod autem diximus, idem succedere si puncta quaedam vel partes durante tempore nunc quiescant nunc moveantur, ex eo manifestum est, quod pro quiete substitui potest motus, cuivis motui parallelus et proportionalis, sed tantae tarditatis, ut error fiat dato minor. Itaque quiescentia etiam sub ipsis motis comprehendi possunt salva conclusione.

Propositio 15.

Si mobile moveatur motu aequidirecto in easdem partes, et unum punctum non succedat in alterius locum, viae autem punctorum eosdem semper et ubique ad mobile angulos faciant, erit via ipsius mobilis seu figura motu ejus generata aequalis figurae factae ex motu mobilis in viam centri gravitatis eodem angulo ducti. Nihil autem refert, utrum mobile sit rigidum, an flexile aut fluidum, continuum vel discretum. Et idem succedit, si aliqua puncta aut aliquae partes quiescant, aut modo quiescant modo moveantur, dummodo motus sit dictus.

Tale mobile non potest esse solidum. Neque enim hoc moveri potest, quin punctum ejus quodlibet in superficie ipsa non positum, alteri succedat. Erit igitur superficies, vel linea. Et si linea sit, potest resoluta intelligi in latera rectilinea, et superficies

in plana, inscribendo scilicet aut circumscribendo polygona, donec differentia fiat minor assignata. Sufficit autem considerari, quamlibet (fig. 183) rectam AB (vel quodlibet planum ABC), si ita moveatur, ut unum punctum non succedat in locum alterius, et recta a quovis puncto descripta, ut ${}_1A_2A$, eundem semper angulum faciat ad rectam mobilem AB (vel ad planum ABC) describere parallelogrammum ${}_1A_2B$ (vel parallelepipedum ${}_1A_1C_2A$), quod est in ratione composita mobilis rectae (plani) et lineae ab uno puncto verbi gr. centro gravitatis descriptae, seu factum ex mobilis extensione in viam centri. Et ideo si plures sint rectae mobiles vel plura plana, idem semper angulus viae rectilineae cujusque puncti ad suam rectam vel suum planum, tota via vel figura generata erit aggregatum ex his parallelogrammis vel parallelepipedis, id est aggregatum (ut ostendimus) ex ductibus rectarum vel planorum in centrorum vias. Jam si omnes motus sint aequidirecti seu paralleli, aggregatum ex progressibus partium seu factis ex ductu partis in viam centri sui aequatur progressui totius, seu toti eodem modo in viam sui centri ducto. Itaque via generata a mobili ex rectis vel planis composito per motum non in se succedentem, eundem angulum ad mobile servantem, quamdiu quodlibet punctum non nisi rectam eamque parallelam lineae alterius puncti describit, aequatur facto ex mobili in eandem rectam secundum eundem angulum ducto, seu facto ex mobili in rectam planumve extenso, in quod recta eodem angulo servato ducatur; sed idem est, si puncta mobilis polygonas lineas vel curvas aequidirecte et eodem semper ad mobile angulo describant. Tantum enim repetitur quod in rectis ostendimus. Et idem est, si mobile ex rectis planisve compositum in lineam curvam vel superficiem gibbam degeneret quamcunque. Generaliter igitur si mobile feratur motu aequidirecto non in se succedente, et aequiangulo ad mobile et in easdem partes tendente, via generata aequatur facto ex ductu extensionis ipsius mobilis in viam centri gravitatis eodem ducendi angulo servato, idque licet puncta aut aliquae partes subinde quiescant ob rationem adductam in fine demonstrationis praecedentis.

Hujus theorematis casus est regula Pappi vel Guldini. Ut si (fig. 184 et 185) circa axem immotum AB agatur trilineum ABC describens solidum $BA_1C_2C_2CAB$, ejusque centrum gravitatis describat arcum circularem ${}_1G_2G_2G$; patet solidum generatum factum esse motu trilinei in se non succedente, nullum enim punctum alteri

succedit (ut fieret si trilineum hoc planum per unum idemque planum duceretur), et cujuslibet puncti motum esse aequidirectum, tangentes enim circulorum in locis, ubi puncta sunt eodem tempore, sunt parallelae. Patet et motum esse aequiangulum ad mobile, quilibet enim arcus circuli a quocunque descriptus, id est ejus tangens semper facit ad mobile angulum rectum. Itaque solidum dictum rotatione genitum aequatur facto ex trilineo ABC in viam centri gravitatis, seu in ${}_1G_2G_3G$ normaliter ducto, id est solido cylindriformi, cujus basis est planum trilineum (A)(B)(C) priori aequale, altitudo vero est recta (A)H aequalis arcui ${}_1G_2G_3G$, normaliter ducta in hanc figuram (A)(B)(C) jacentem. Si C fuisset centrum gravitatis non trilinei, sed lineae AC, tunc eodem argumento superficies solidi dicti rotatione hujus lineae genita aequaretur superficiei cylindriformi (A)HK(C) factae ex recta (A)H (id est ${}_1G_2G_3G$ in rectam extensa) normaliter ducta in lineam (A)(C) ipsi AC aequalem. Sed ex nostris demonstrationibus ampliari potest haec doctrina. Exempli causa in plano paginae (fig. 186) evolvatur linea ABE (secundum inventa Hugeniana) seu filum lineae huic rigidae circumplicatum, ita ut pars quaevis AB extendatur in filum BC curvam ABE tangens, pars vero residua BE restet in linea curva; et extremo fili C describatur linea ACF; quaeratur via centri gravitatis Q_2GL. Nempe primum ejus punctum Q est centrum gravitatis fili in primo situ Q, nempe centrum gravitatis curvae ABE; ultimum punctum L est centrum gravitatis fili in ultimo situ, seu cum totum extensum est in rectam EF, cujus in medium punctum cadit, seu L rectam EL bisecat. Sed intermedium aliquod punctum ${}_2G$ sic habebitur in situ fili pro parte extensi ut ${}_2C_2BE$. Sumatur H quod est centrum gravitatis partis non extensae ${}_2BE$, et M quod est centrum seu punctum medium partis extensae seu rectae ${}_2B_2C$; jungatur HM, et secetur in ${}_2G$ sic ut fiat M_2G ad H_2G, ut fili pars seu arcus EB ad fili partem extensam seu rectam ${}_2C_2B$. Hinc data extensione et centris gravitatis arcuum curvae ABE, et data extensione lineae QGL datur area spatii ABEFCA. Et haec ideo succedunt, quia ostendimus regulam de via centri gravitatis succedere, etsi pars mobilis nunc quiescat nunc moveatur, ut hoc loco pars fili nondum evoluta adhuc quiescit. Itaque regulam Guldini a rotationibus ad alia motuum genera produximus.

Propositio 16.

Eadem corporum Phaenomena (seu situs eorum inter se datis temporibus) per varias Hypotheses (seu motuum et quietium ac directionum assignationes) obtineri possunt. Et si phaenomena effici possunt per motus uniformes rectilineos uno modo, poterunt per tales aliis adhuc modis innumeris praestari, cuicunque demum mobili quies vel datus motus rectilineus uniformis assignetur.

Si duo sint puncta A et B, ex ipsis solis utique discerni non potest, utrum quiescat aut dato gradu moveatur. Assumtis pluribus punctis A, B, C, sufficit distantias easdem pro iisdem temporibus aut proportionales servari, ut etiam iidem anguli serventur, quia datis rationibus quorumque punctorum distantiis triangulorum species dantur, vel puncta in rectam cadunt, adeoque et anguli sunt dati; hoc autem est, iisdem distantiarum proportionibus triangulorum species manent eadem et anguli; angulis autem iisdem nihil est quod sufficiat quibuscunque praedicantibus oculus in aliquo punctorum positus hypotheses discernere non potest, cum nihil aliud observare possit. Idemque est in pluribus quam tribus punctis, quorum configurationes specie determinantur, adeoque et habentur anguli, si triangula inter quaecunque tria puncta specie dentur. Supponamus jam esse aliqua puncta inter se situm non mutantia, ut sunt in corporibus durabilibus (veluti coelestibus) extremitates diametrorum, et ex servatis angulis aut mutatis velut ex diametris apparentibus qui sane quantitate angulorum cognoscuntur, distantiarum conservationes mutationesque colligimus, et tunc non tantum specie, sed et magnitudine cognoscimus aspectus sive configurationes. Quodsi igitur saltem hypothesin excogitemus easdem distantias pro iisdem temporibus exhibentem, phaenomenis est satisfactum; idque facile est, cum problema solvi possit: Dato pro arbitrio motu puncti unius, assignare motus punctorum quotcunque tales, ut datis temporum momentis data prodeant phaenomena seu anguli. Quodsi motus sint rectilinei uniformes, etiam distantiae punctorum uniformiter mutabuntur, et celeritates respectivae erunt rectilineae uniformes. Sed et eae variis hypothesibus obtineri possunt, ita ut unicuilibet ex illis assignando quietem (si placet) vel motum datum eadem prodeant. Oculo enim in uno punctorum

posito, caetera omnia velut ipso quiescente moveri videbuntur salvis iisdem phaenomenis. Quod ut appareat distinctius, considerandum est, omnem motum concipi posse ut compositum ex parallelis ad datas rectas, duas quidem in plano, tres autem in solido, ita ut composito existente uniformi et componentes uniformes esse possint, et si quidem in pluribus motibus inter se collatis secundum componentes parallelos ad eandem rectam discerni hypotheses non possunt, omnino discerni non posse, quia ipsi motus per parallelos componentes determinantur. Et quoniam jam ostendimus, si tria quaevis puncta servant eadem phaenomena, inter se servari phaenomena omnia, superest tantum ut ostendamus, in tribus motibus uniformibus parallelis phaenomena discerni non posse.

Sint (fig. 187) trium punctorum A, B, C motus paralleli AA, BB, CC, et in rectam AA ex punctis B, C agantur normales β, K, junganturque AB, AC; ajo quocunque motu uniformi assignato ipsi puncto A, assignari etiam posse motus uniformes competentes punctis B et C, ut eadem phaenomena prodeant. Nam qui motus assignantur punctis β et K, assignabuntur et punctis A et B; jam manifestum est, utcunque moveatur aut quiescat punctum A, tales motus uniformes assignari posse punctis β et K, in eadem recta positis, ut eaedem prodeant celeritates respectivae seu distantiarum variationes uniformes. Et proinde pro eodem temporis momento eaedem prodibunt magnitudines rectarum $A\beta$, AK, βK, ut pro uno momento ${}_1A_1\beta$, ${}_1A_1K$, ${}_1\beta_1K$; et pro alio momento ${}_2A_2\beta$, ${}_2A_2K$, ${}_2\beta_2K$. Eadem ergo (quacunque facta hypothesi) dato momento prodeunte magnitudine rectae ${}_2A_2\beta$, et manente semper ob parallelismum recta $B_2\beta$, idem prodibit angulus ${}_2B_2A_1A$, et similiter angulus ${}_2C_2A_1A$; ergo (ob eandem quoque semper manentem distantiam inter rectas BB, CC) idem quoque prodibit angulus ${}_2B_2A_2B$ pro dato momento; adeoque semper prodeuntibus iisdem angulis pro eodem tempore eadem prodeunt phaenomena. Idemque est, si puncto A pro motu quies assignetur. Quod autem de puncto A ostendimus, de alio quocunque valet, et quod de tribus quibuscunque, utique de omnibus; et quod de omnibus punctis, etiam de situ ipsorum mobilium verum est. Itaque nihil prohibet, quamcunque hypothesium veram esse, si nihil aliud quam Mathematicam possibilitatem desideremus. Intelligimus scilicet quod in motu pure mathematicum est solumque agnosci potest, situs nempe et eorum mutationes. Sed pars physica, causae agendi sci-

licet et virium subjecta, et aptae rationibus reddendis explicationes alterius sunt considerationis. An autem eadem quoque phaenomena serventur pro quacunque hypothesi facta, quando corpora concurrunt inter se, infra dicemus. Porro si plures essent hypotheses, et secundum unam corpora moveantur uniformiter, secundum aliam secus, nec adsint externae causae, praeferenda est hypothesis motus uniformis, quia omnis motus per se est talis. Igitur hic quoque talis erit, ubi causae mutantes absunt. Interim in rectilineis motus uniformes plures idem praestare possunt, quodcunque demum subjectum quieti aut motui dato assignetur.

Propositio 17.

Si puncta quotcunque moveantur in lineis rectis, etiam centrum gravitatis earum movebitur in linea recta; et si motus punctorum sint uniformes vel saltem proportionales inter se, etiam motus centri gravitatis erit uniformis vel saltem prioribus proportionalis.

Sint (fig. 188) primum puncta duo, unum A percurrens rectam ${}_1A_2A$, alterum B percurrens rectam ${}_1B_2B$, sintque motus proportionales, id est eadem sit proportio linearum eodem tempore seu simul absolutarum; dico, et centrum gravitatis C etiam percurrere rectam ${}_1C_2C$, eamque motu etiam prioribus proportionali. Ducatur ${}_1BD$ parallela ipsi ${}_1A_2A$, in quam ex ${}_2B$ perpendicularis agatur ${}_2BD$, et per ${}_2A$ ducatur quantumlibet parva ${}_2AF$ parallela ipsi ${}_2BD$. Si poneretur A moveri recta ${}_1AF$ motu ad ipsius B motum proportionali, utique ferretur motibus ${}_1A_2A$ et ${}_2AF$ proportionalibus inter se et cum motu ipsius B. Moverentur ergo puncta A et B (per prop. 2) motibus compositis, illud ex ${}_1A_2A$ et ${}_2AF$, hoc ex ${}_1BD$ et DN, qui omnes sunt inter se seu ipsi ${}_1A_2A$ proportionales. Dum igitur puncta A et B moventur motibus rectilineis parallelis et proportionalibus ${}_1A_2A$ et ${}_1BD$, utique et centrum gravitatis C feretur motu rectilineo ipsis parallelo et ad ipsum ${}_1A_2A$ proportionali in ${}_1CE$ aut parallelis; seu promovebitur ad partes quas postulat directio ipsi ${}_1A_2A$ parallela secundum rectae alicujus CE magnitudinem (per prop. 11). Et similiter dum puncta A et B moventur motibus rectilineis ${}_2AF$ et DE, etiam centrum gravitatis C feretur motu rectilineo ipsis parallelo, et ipsi D_2B, adeoque et ipsi ${}_1A_2A$ proportionali E_2C; seu promovebitur in par-

tes quas postulat directio ipsi D_2B parallela secundum alicujus ${}_1CG$ vel E_2C magnitudinem (per dict. prop, 11). Cum ergo centrum gravitatis ${}_1C$ feratur motibus rectis ipsis ${}_1A_2A$ adeoque inter se proportionalibus, compositis uno ${}_1CE$, et altero ${}_1CG$ vel E_2C, feretur utique motu recto ipsi ${}_1A_2A$ proportionali (per dict. prop. 2). Idemque est, quantulacunque sit parvitas ipsius ${}_1AF$, adeoque idem est, licet ea plane evanescat, mobileque A feratur non nisi motu ${}_1A_2A$, ut erat propositum. Sunt autem motus ${}_1A_2A$ et ${}_1B_2B$ assumti quicunque rectilinei inter se proportionales (etiam in diversis utcunque planis). Itaque habemus generaliter demonstratam propositionem in punctis duobus. Sed quod de duobus ostensum est, ad tria producitur et alia quotcunque, si pro motu duorum assumamus motum centri, et huic novum tertii puncti motum adjungamus; motus enim centri horum duorum erit motus centri omnium trium. Quare generaliter in punctis quotcunque habetur propositum.

Propositio 18.

Si conatuum quantitates et directiones exprimantur per rectas a puncto conante eductas usque ad puncta quaedam terminantia, conatus compositus exprimetur recta a puncto conante ad punctorum terminantium commune centrum gravitatis ducta sed multiplice per numerum punctorum.

Sint (fig. 189) puncti A conatus quotcunque, ut rectae AB AC, AD, et punctorum B, C, D centrum gravitatis sit G; ajo conatum compositum esse ut rectam AGH, quae sit ad AG, ut numerus punctorum B, C, D ad unitatem. Nam ducto angulo recto EAF, patet conatus AB componi ex AL et AM, et AC ex AN et AP, et AD ex AQ et AR, et AG ex AS et AT. Conatus autem compositi AQ, AN, AL dant conatum AQ + AN + AL. Jam AS est media Arithmetica inter AQ, AN, AL, quia distantia centri gravitatis G ab axe AF ducta in numerum punctorum, quae hoc loco pondera aequalia intelliguntur, aequatur summae distantiarum singulorum punctorum ab axe. Itaque conatus AS ductus in numerum punctorum dat conatum AQ + AN + AL. Eodem modo conatus AT ductus in numerum punctorum dat conatum AM + AP + AR. Ergo conatus AS cum conatu AT, id est conatus AG ductus in numerum punctorum, id est conatus AH aequatur conatibus AQ, AN, AL, AM, AP, AR, id est conatibus AB, AC, AD simul sumtis. Simile argumentum in solido institui potest, ubi

unus conatus potest resolvi in tres ad tria plana angulum rectum (si placet) comprehendentia et in A concurrentia normales.

Propositio 19.

Si puncta conatuum ejusdem puncti infinitorum repraesentatrices rectas terminantia cadant in quendam locum extensum, tunc directio conatus inde compositi tendet ad centrum gravitatis loci, magnitudines vero talium conatuum erunt in ratione composita distantiarum centri gravitatis cujusque loci a punctis conantibus et magnitudinum cujusque loci.

Sint (fig. 190) puncta conantia A et L, et punctum A tendat conantibus infinitis AB seu tendat ad unumquodque ex punctis B lineae BB, in ratione cujusque rectae AB, similiterque tendat L conatibus omnibus LM; sit loci BB centrum gravitatis C, et loci MM centrum gravitatis G; dico punctum A revera tendere versus C, et punctum L versus G, sed nisum aut conatum ipsius A fore ad nisum aut conatum ipsius L in ratione composita AC ad LG et loci $_1B_4B$ ad locum $_1M_4M$. Nam si sit (fig. 191) recta fracta DEFH polygona aequalium laterum, idem est centrum gravitatis hujus lineae, quod est punctorum mediorum cujusque lateris, nempe P, Q, R, idemque verum est, numerum utcunque multiplicando, donec polygona abeat in curvam. Unde quae demonstravimus in praecedenti de centro gravitatis punctorum, habent locum in centro gravitatis ipsius lineae; eademque et ad polyedram superficiem, imo et ad locum solidum produci possunt, si scilicet hedrae aequales in superficie, aut cubi aequales in solido assumantur, pro quibus deinde eorum puncta media seu centra gravitatis substitui possunt.

SECTIO TERTIA.

DE CONCURSU CORPORUM.

Propositio 1.

Si corpora quotcunque concurrant quomodocunque, aequalis semper manet potentia absoluta

hoc est, summa factorum ex ponderibus seu materiae quantitatibus cujusque corporis in altitudines ductis, ad quas vi suarum celeritatum ascendere possunt, seu factum ex pondere sive quantitate materiae omnium simul sumtorum ducta in altitudinem centri gravitatis communis, ad quam id vi celeritatum praesentium in corporibus existentium ascendere posset.

De summa factorum ex pondere seu mole in altitudines jam constat ex demonstratis capite de Causa et Effectu. Nam per prop. 7 dicti cap. eadem manet potentia in corporibus, quae sola invicem agunt. Potentiae autem sunt in ratione composita ex simplice ponderum et duplicata velocitatum, seu ex composita ponderum et dictarum altitudinum (per prop. 15 ibid.). Porro eadem est quantitas summae ex ascensibus in corpora singula ductis, et facti ex ascensu centri gravitatis in summam corporum per prop. 14 cap. 2 Sect. 1 Part. II, quia altitudines intelliguntur perpendiculares adeoque inter se parallelae. Abstrahitur autem animus ab eo, quod fieret si durante concursu accederet actio gravitatis vel alia quaecunque praeter jam conceptam a corporibus seu praeter eam quam habent in ipso concursu.

Propositio 2.

Si Elastrum, quatenus se restituit, in duo corpora agat, imprimet illis conatus corporibus reciproce proportionales.

Sint (fig. 192) duo corpora A et B connexa per Elastrum, quod se restituens in ipsa agat; veluti si sit compressum ea a se invicem repellendo, vel si sit distensum ea ad se invicem attrahendo; ajo celeritates quas accipiunt corpora, esse corporibus reciproce proportionales. Ponantur enim corpora esse pondera eo ipso dum ab Elastro moventur elevanda, ut si ponantur esse horizonte et suspensa a funibus perpendicularibus aequalibus ex C et D; manifestum est magis resistere, quod magis quam reciproca ad pondus ratione elevatur. Itaque conatus quos a corporibus accipiunt, corporibus reciprocos esse necesse est (per prop, 16 cap. de causa et effectu). Cumque id continuata restitutione semper contingat, etiam impetus vivi ex conatibus repetitis semper pro-

portionalibus conflati seu impressae tandem celeritates erunt corporibus reciproce proportionales, prorsus ut prop. 41 cap. de causa et effectu Sect. 4.

Propositio 3.

Iisdem positis, etiamsi plura duobus sint corpora, succedet quod propositione praecedenti diximus, aggregatum ex quibusdam simul sumtis pro uno corpore sumendo, et elevationem centri componentium pro elevatione ipsius aggregati. Itaque generaliter centrum gravitatis unius vel aggregati plurium accipiet celeritatem, quae sit ad celeritatem quam accipit centrum gravitatis reliquorum, reciproce ut pondera corporum quorum ea sunt centra gravitatis.

Ostenditur ut praecedens. Si corpora ex filis perpendicularibus suspensa intelligantur, distribuendo enim omnia corpora in duo aggregata et unumquodque aggregatum concipiendo ut unum corpus habens centrum gravitatis (veluti si per lineas rigidas connecti intelligantur), fieri non potest, ut centra magis quam reciproce pro ponderibus eleventur, cum illud pondus quod plus elevari debet, magis resistat; pondera autem velut in centra gravitatis redacta intelligi possint eadem potentia manente (per prop. 3 cap. 1 Sect. 1 Part. II).

Plura corpora simul ab uno eodemque Elastro se restituente impellentur, si aër compressus plura ostia a corporibus totidem obstructa inveniens corpora simul omnia propellat. Idemque continget in tormenti repulsa, dum emittitur globus. Et vis haec est alternativa, ita ut si unum non possit cedere, reliqua recipiant vim totam.

Propositio 4.

Si duo globi gemelli (hoc est aequales et per omnia similes) sibi occurrant in recta per amborum centra transeunte, et partes eorum post ictum quiescant ut ante; ambo regredientur ea qua venere velocitate et contraria directione in eadem recta. (fig. 193).

Cum enim post concursum nec progredi possint (alioqui se penetrarent), nec flectere in latus, cum nulla sit ratio in quam po-

tius partem flecti debeant, nec quiescere, alioqui effectus foret debilior causa, tanta quippe vi perdita, nisi scilicet eam transtulerint in partes, quod est contra hypothesin; regredi igitur debent, et ita quidem, ut in summa sit eadem vis quae ante. Sed cum nulla sit ratio cur unum plus virium altero accipiat, utrumque accipiet vim dimidiam. Et initio etiam unumquodque habebat dimidiam. Ergo eandem accipiet vim quam habebat ante. Sed idem corpus eandem accipiens vim quam habuit ante, etiam eandem accipit celeritatem. Igitur constat propositum.

Propositio 5.

Nulla dantur corpora perfecte inflexibilia.

Ponantur enim dari, itaque poterunt dari duo tales globi, iique concurrentes, ut in prop. praecedenti. Sed ita (fig. 193) globus in loco $_2A$ positus a conatu pergendi in directione, ut $_1A_2A$, transibit ad conatum contrarium $_2A_3A$, idque momento, quod est absurdum. Omnis enim mutatio fit per intermedia. Itaque in tali concursu cedere in partibus suis seu flecti corpora necesse est, ut paulatim deveniant ad quietem, et deinde Elastro se restituente motum contrarium priori recipiunt per gradus. Idem sic quoque ostenditur, quod necesse est in corporibus concurrentibus aliquando mutari velocitates, idque fieret in momento concursus, si corpora essent perfecte rigida. Sed nulla potest esse in Natura mutatio momentanea assignabilis sive notabilis, et proinde ab uno velocitatis gradu ad alium nisi per intermedios transiri non potest.

Hinc intelligitur, Atomos Naturae legibus consentaneos non esse. Caeterum quando nos corpora rigida adhibemus, ea intelligimus, quae flexilia sunt quidem, sed summa promtitudine se restituunt. Principium autem generale, quod mutationes vel transitus non fiant per saltus sive temporis sive aliorum determinantium respectu, maximi in Mathesi et Natura momenti est. Usi jam eo sumus in prop. 38 cap. de causa et effectu, et alibi ope ejus methodum ostendimus a posteriori opiniones non bene concinnatas dignoscendi. Videantur Novellae literariae Batavae anni 1687 mense Julio.

Propositio 6.

Corpora non agunt immediate in se invicem motibus suis, nec immediate moventur, nisi per sua Elastra.

Cum omnia corpora sint flexilia (per praecedentem) et facilius sit corpus utcunque firmum flectere nonnihil, quam ei impetum dare vel adimere (per prop. 30 cap. de causa et effectu); itaque corpus flectetur prius nonnihil, quam ullum determinatum velocitatis gradum vel impetum accipere possit ab alio, vel ejus actione amittere. Cumque eadem ratio semper subsistat, et flexu licet facto rursus novus flexus facilior sit quam impulsus, quo semper determinatae est velocitatis, ejus scilicet minimum quae est impellentis; unde semper assumi potest flexus minor, donec plane vis impellendi consumatur. Nunquam igitur corpus, nisi flectetur ab alio, impelletur autem non nisi ab Elastro suo restituente, quod statim incipit agere ad corpora invicem dimovenda.

Quod corpora prius flectantur quam impellantur, discimus etiam experimentis. Hinc si magna sit ictus velocitas, potius franguntur, quam moventur, ut videmus ictu glandis plumbeae ex pyrio sclopeto potius perforari januam paulum apertam quam claudi. Etsi enim alioqui majore vi sit opus ad perforandum quam claudendum, hic tamen majore vi opus fuisset ad subito claudendum, quam subito perforandum requirebatur. Hinc patet etiam, corpus unum semet vi elastri sui seu motus intestini ab alio repellere seu dimovere, ut qui intra navem sunt eam conto a ripa repellunt. Ex hujus autem propositionis demonstratione attente considerata poterunt paradoxa elici, unde apparebit naturam corporis et motus longe aliam esse, quam credi solet. Sed ab iis nunc abstineo.

Propositio 7.

Si duo corpora in se invicem agant, eadem est vis agendi respectiva seu (in casu concurrendi) vis ictus, in quocunque demum corpore sit motus, modo eadem sit vis intendendi elastrum, seu celeritas mutandi distantiam corporum, quam voco respectivam. Et aequalis est actio et passio utrinsque invicem exercita. Idemque ad plura corpora porrigitur ad modum propositionis 3.

Nam (fig. 194) Elastrum, quo mediante corpus A agit in B vel contra, eodem modo intenditur, posita aequali celeritate respectiva, appropinquandi scilicet aut recedendi, quibus verbi gr. linea elastica AB distenditur aut coarctatur. Actio autem corporis in corpus non est nisi per Elastrum (ex prop. 6), et Elastrum aequaliter agit in ambo corpora simul, vires ipsis imprimens aequales respectivas (per prop. 2 hic; adde prop. 41 Sect. 4). Itaque ambo aequaliter patiuntur, adeoque (cum non nisi a se invicem licet mediante Elastro patiuntur) et aequaliter invicem agunt. Atque idem est intelligendum de concursu corporum immediato, ubi Elastrum est in partibus ipsorum.

Propositio 8.

Duo corpora directe concurrentia velocitatibus quae sint corporibus reciproce proportionales, tota vi sua invicem agunt, et qua velocitate venere reflectuntur, si modo satis elastica sint, nec vis ictus a partibus ipsius corporis absorbeatur.

Sistunt enim se mutuo (per prop. 41 Sect. 4). Itaque tota vis qua agunt ab ipsis amissa transfertur in eorum Elastrum, quippe cum (per prop. 6 hic) non nisi ab Elastro in contrarias partes agi possint, progredi autem vel deflectere nequeant. Accipiunt autem velocitates reciproce proportionales (per prop. 2 hic) adeoque (cum summa eandem vim dare debeat per prop. 1 hic) priores.

Propositio 9.

Vis respectiva qua duo corpora possunt agere in se invicem, est ea pars vis absolutae, quae habetur corporibus velocitates tribuendo ipsis corporibus reciproce proportionales et tantas, ut inde sequatur eadem celeritas respectiva, quam nunc ob concursum prasentem habent.

Ponamus (fig. 195) distantiam corporum fuisse $_1A_1B$, et deinde esse $_2A_2B$, et ita ista mutatione intensum esse Elastrum CD, quo mediante corpora invicem agunt. Jam si esset celeritas $_1A_2A$ ad celeritatem $_1B_2B$, ut B ad A, corporum hos motus habentium vis absoluta aequaretur vi eorum respectivae (per prop. 8). Et vis respectiva corporum sic motorum aequatur vi respectivae eorundem motu aliter utcunque distributo motorum, dummodo eadem

maneat celeritas respectiva accedendi ad se invicem, seu eadem differentia inter $_1A_1B$ et $_2A_2B$ (per prop. 7). Ergo vis absoluta dicta sequatur respectivae propositae.

Propositio 10.

Vis agendi corporum respectiva per eorum actionem in se invicem non mutat quantitatem, nec inde mutatur celeritas respectiva, modo corpora non nisi invicem agant et patiantur, nec portio virium ab eorum partibus retineatur. Quae autem de duobus corporibus dicta sunt, ad plura producantur in modum propositionis 8 vel 7.

Nam vis agendi respectiva translata est in Elastrum (per quod solum corpus agit in corpus prop. 6), et cum ea vis non absorbeatur vel a tertio aliquo corpore vel a partibus corporum (ex hypothesi), corporibus redditur ab Elastro. Jam si eadem maneat vis respectiva, necesse est, ut eadem quoque maneat celeritas respectiva, alioqui corpora eandem in se agendi vim respectivam non haberent, si forte denuo concurrerent aut in se agerent (per prop. 7). Idem sic intelligitur: Celeritas respectiva eadem eandem facit Elastri intensionem. Elastri autem seu ictus vis est tanta, quanta corporum amborum celeritatibus reciproce proportionalibus eandem respectivam efficientibus latorum (per prop. 9). Haec ergo vis ablata est, et periret nisi redderetur corporibus. Sed ex hypothesi non absorbetur a partibus aut causa externa; ergo tota redditur. Quod quomodo fiat, ita distincte cognoscemus. Dum (fig. 196) A et B concurrunt celeritatibus $_1A_2A$ et $_1B_2B$, et ex $_1A_1B$ transeunt in $_2A_2B$, secemus rectam $_1A_1B$ in puncto C sic, ut sit AC ad BC, ut B ad A; erit vis ictus perinde ac si concurrissent A celeritate $_1A_1C$, et B celeritate $_1B_1C$ (per prop. 9). Haec vis absoluta, quam componerent, si duo motus detrahantur a vi absoluta totali, residua vi iret totum compositum simul. Utique enim vis residua est in ipso composito sublata vi ictus, alioquin aliquid de tota vi periret contra prop. 1. Totum autem compositum iret simul, si corpora a se invicem per restitutionem Elastri non iterum repellerentur; nam quamdiu adhuc corpora se urgent, nondum totam vim ictus in Elastrum transtulere (vid. demonstr. prop. 6), eo vero momento quo se urgere desinunt, manent simul (perdito conatu magis appropinquandi seu celeritate respectiva)

nisi quid novum superveniat, quod est restitutio Elastri. Jam si Elastrum motu communi cum corporibus feratur, ea a se invicem dirimet eodem modo ac si motus ille communis abesset (ut in prop. 2), celeritate scilicet reciproce proportionali singulorum tanta, quantam vis Elastri et magnitudo corporum, id est vis respectiva prior nempe Elastro impressa postulat. Necesse est ergo eandem corporibus dari celeritatem recedendi, quae prius appropinquandi fuit, seu A abscedere a concursu celeritate ut ${}_1A_1C$, et B celeritate ut ${}_1B_1C$, adeoque eandem esse quae ante celeritatem respectivam. Celeritas autem communis, qua itura essent si abesset restitutio, ea foret, quae ante concursum fuit centri gravitatis, nempe ${}_1C_2C$, ut mox apparebit.

Si tamen corpora non satis elastica sint, et ita partes compressae vim absorbeant nec prorsus restituant corporibus, tantundem decidit potentiae respectivae, et proinde si corpora ex materia quadam molli et tenui constent, ita ut post ictum cohaereant, perit vis respectiva, et restat solummodo vis progressiva totius, de quo jam. Quodsi materia non satis perfecte elastica sit, ut lignum, pars vis respectivae seu potentiae ictus absorbebitur a partibus ligni, pars reddetur corporibus totis, in quantum a se invicem ob ictum reflectuntur.

Propositio II.

Potentia absoluta aggregati plurium corporum ex motu eorum orta componitur ex vi eorum respectiva agendi in se invicem, et vi progressiva (agendi in tertium) per modum unius seu vi directionis.

Sint corpora quotcunque in motu vel quiete posita, et ponantur subito connecti a lineis rigidis vel elasticis si placet (quod vim nec auget nec minuit, cum thema hoc per se non sit activum), et omnis vis quae est in corporibus recedendi a se invicem vel accedendi, hoc est vis respectiva a lineis rigidis vel elasticis sustinebitur, et in elastrum vel vinculum qualecunque transferetur. Et haec vis ab Elastro aut firmitate vinculorum recepta, a tota potentia praesentis thematis, quippe permanente (per prop. 1), detracta relinquet potentiam, qua corpus totum unitum, ex corporibus pluribus datis compositum, progredi conabitur.

Propositio 12.

Non mutatur per concursum vis progressiva seu vis directionis in summa quae est composita ex pluribus corporibus, sed eadem est ante et post concursum, et proinde in per se libere motis, eademque quantitas non quidem motus, sed tamen progressus secundum quascunque parallelas, eademque celeritas centri gravitatis totius compositi remanebit. Nec refert, corpora sint mollia an dura seu perfecte elastica.

Nam potentia absoluta semper manet eadem (per prop. 1) et componitur ex vi respectiva seu ictus, et progressiva seu directionis totalis (per prop. 11); manet autem eadem vis respectiva sive in corporibus sive in eorum partibus absorbentibus (per prop. 1); ergo et vis directionis totalis eadem manet. Porro cum eadem maneat vis progrediendi, ut ostendimus, ea scilicet quae vi respectiva ademta, seu massa in unum rigidum congelascente, superesset, utique eadem quoque manet celeritas progrediendi, nam eadem vi in eodem corpore manente, eadem manet celeritas. Itaque et eadem quantitas progressus seu factum ex celeritate progrediendi in totam corporis molem seu pondus, si scilicet celeritas illa seu progrediendi impetus exitum sortiatur, quod fit si scilicet libere et per se moveantur corpora, alioqui stabit ea celeritas intra conatum, ut si centro immobili inter circulandum corpora retineantur, ne directionem quam secundum tangentes habent, prosequi possint; quanquam haec impedimenta non revera, sed in speciem tantum contingere inferius ostendemus, cum nullus conatus destruatur, sed tantum aliis componatur. Porro si corpora per se libere moveantur, seu vi sui impetus pristini ac secundum suam directionem, movebuntur linea recta ac motu uniformi. Et proinde tunc centrum gravitatis eadem semper celeritate ibit in eadem recta ad easdem partes. Nam intelligantur exstingui corporum vires respectivae, quod fieri potest, si intelligamus corpori cuilibet celeritatem respectivam aequalem et contrariam priori (recedendi si accesserat, et contra) et corporibus sese respicientibus reciproce proportionalem esse additam; ita enim exstinguitur ille motus, qui ut prop. 9 ostendimus vim respectivam constituit, quippe unus contrario aequali compensatus; tunc igitur tota massa cessante mutatione distantiae inter partes massae movebitur per motum unius

rigidi motu rectilineo aequidistributo, adeoque centrum gravitatis uniformiter et directe progredietur. Utor autem hic potius hypothesi motus compensati quam connexionis in rigidum, ne in casu obrigescentiae progressio pro parte in circulationem convertatur, quae rectilinea manebit, si motibus uniformibus rectilineis jam existentibus (ex hypothesi) nihil aliud quam conatus compensantes rectilinei addantur per prop. 3 cap. 2 Sect. 1 Part. II. Porro ante hanc innovationem, quae distantiarum mutationem sustulit, totius massae centrum gravitatis eodem ut nunc modo movebatur, quod inde ostendo, quia duorum quorumlibet corporum centrum eodem modo movebatur ut nunc. Ergo et centrum gravitatis totius aggregati. De centro autem duorum quorumlibet res sic patet, quia sive corpora a se non recedant sive recedant celeritatibus reciproce proportionalibus ad corpora, eodem loco manet centrum gravitatis. Hinc ergo denuo demonstratum habemus (quod supra cap. de directione prop. 11 primum in parallelis ostenderamus, et prop. 17 cap. ejusdem ex solis considerationibus Geometriae in libero corporum non concurrentium motu eruimus), punctorum quotcunque adeoque et corporum lineas rectas motu uniformi describentium centrum gravitatis in linea recta motu uniformi progredi, et quidem eadem celeritate, qua tota massa sublata vi respectiva progredi debet. Quae celeritas habetur, vim respectivam (ex prop. 9 determinandam in singulis corporibus, adeoque et in toto) detrahendo a vi totius absoluta (per prop. 11), restabit vis progressionis, unde ex data massa corporis habetur et celeritas progressionis hujus massae. Caeterum hic progressus centri gravitatis totalis non mutatur a corporum concursu, quia ipsorum concurrentium (in quibus mutatio ista credi posset) centrum gravitatis a concursu non mutatur, in quantum enim in se invicem agunt, agunt per Elastrum (prop. 6), quod celeritatem respectivam (veluti velocitatem a se invicem recedendi) inter ipsa distribuit proportione corporibus reciproce proportionali (per prop. 2 et 3 hic); at quae ad se accedunt vel a se recedunt celeritate reciproce proportionali, ex hoc locum centri gravitatis non mutant, quippe quod etiam corporum distantiam in partes secat, corporibus ad quos pertinent reciproce proportionales. In universum igitur, corporum per se (seu vi pristina retenta) et libere (sine retinaculo) adeoque lineis rectis et motu uniformi motorum centrum commune gravitatis uniformiter pergit in recta ad

easdem partes, sive corpora haec inter se concurrant, sive non. Idemque est, si motus esset proportionaliter crescens. Porro centro gravitatis directe et uniformiter progrediente, etiam corporum per se libere motorum, quorum hoc est centrum, quantitas progressus in easdem partes in iisdem parallelis manebit idem. Nam (fig. 197) assumta recta quacunque LM, positoque puncta mobilia A, B, C progredi in rectis motu uniformi ${}_1A_2A$, ${}_1C_2C$, ${}_1B_2B$, itaque etiam secundum parallelas huic rectae uniformiter progredientur celeritatibus quae repraesentabuntur rectis ${}_1\alpha_2\alpha$, ${}_1x_2x$, ${}_1\beta_2\beta$, positis normales vel inter se parallelas ex dictis locis punctorum A, B, C in rectam LM esse ductas. Sed in motibus parallelis punctorum quibuscunque factum ex via centri gravitatis ut ${}_1x_2x$ in pondera punctorum A, B, seu in rectas AC+CB aequatur summae vel, si contrarii sint motus, differentiae facti ex pondere A ducto in suam viam ${}_1\alpha_2\alpha$, et ex pondere B ducto in suam ${}_1\beta_2\beta$, hoc est, quantitati progressus in summa (ut ostendimus prop. 12 cap. 2 sect. 1 Part. II.); et quod de punctis duobus, id de quibuscunque verum esse ostendimus, adeoque et de mobilibus quibuscunque quae per puncta constituuntur, seu nihil aliud sunt quam summae punctorum, hoc est corporum sufficientis ad evitandum errorem dato minorem parvitatis. Sed aliter quoque ostendi potest, quod de punctis, idem de mobilibus quibuscunque verum esse, quorum puncta moventur motu rectilineo aequidistributo, ut hoc loco singula corpora moveri supponimus. Fit enim progressus corporis talis ex facto via unius alicujus puncti in corporis pondus ductae, perinde ac si totum pondus in unum ex punctis (ex. gr. in centrum) esset redactum. Cum igitur assumtis parallelis ad rectam datam LM eadem sit quantitas summae progressus et facti ex progressu centri gravitatis totalis in summa corporum, progressus autem centri gravitatis ${}_1C_2C$ in easdem partes semper aequalis sit celeritatis, adeoque respectu ad parallelas rectae LM, ita ut progressus quoque ${}_1x_2x$ semper aequalis sit celeritatis; utique et summa totalis progressus in easdem partes (detractis scilicet progressibus contrariis si qui sunt per dict. prop. 12) secundum parallelas quascunque idem manebit.

Haec autem vera esse patet etiam, si per mollitiem corporum concurrentium pars ictus absorbeatur, translata in concurrentium partes insensibiles, quoniam vis directionis totalis a vi ictu nullo modo pendet, nec per eam alteratur. Unde fit ut haec re

gula etiam sic satis vera reperiatur in corporibus sensibilibus. quae libere satis moventur. uti in pendulis observari potest, etsi pars potentiae respectivae in concursu pereat. et eatenus in praxi summa totius potentiae absolutae non conservetur. Detrimentum tamen ipsam factis aliquot experimentis in datae speciei materia ad calculum revocari. et inde in reliquis ejusdem materiae praedici potest. Quodsi corpora per concursum cohaerescant, soli potentiae directricis conservationi locus erit, vi ictus amissa.

Caeterum observare operae pretium est. quod in vi respectiva conservetur quantitas motus. itemque in vi directiva quantitas progressus. seu factum ex pondere in velocitatem. etsi alioqui potentiis conservatis celeritates non conserventur. ut prop. 40 cap. de Causa et Effectu ostendimus. Cujus rei ratio est, quod hic eadem quoque manet quantitas materiae. Sed eo ipso potentiae sunt in ratione composita corporum et quadratorum celeritatum, manente quantitate materiae. necesse est idem manere quadratum celeritatis. adeoque et ipsam celeritatem eandem. Manere autem semper eandem quantitatem. in quam duci debet potentia tam in vi ictus. quam in vi directrice, manifestum est. Nam in vi ictus seu respectiva eadem manet vis respectiva in quolibet corpore respectu cujusque alterius, quae est media vis ictus totalis, qui ab ipsis fieri invicem potest, adeoque eadem quoque manet ejusdem corporis respectiva celeritas. licet contrariam directionem recipiat. In quantitate progressus quoque eadem manet quantitas materiae, nempe totius corporum aggregati. ac proinde eadem vi progressiva seu directrice manente. etiam celeritas centri gravitatis seu progressus totius manet. Sed non ideo eadem manet quantitas motus in summa. quia progressus totalis invenitur detrahendo sibi progressus contrarios; unde eatenus compensando quantitas motus ex parte perit. Ex quo nascitur propositio sequens 13.

Propositio 13.

Tum demum eadem manet quantitas motus ante concursum et post concursum. cum et ante concursum corpora ibant simul ad easdem partes, et post concursum rursus simul eunt ad easdem. non vero ad contrarias invicem partes. Quodsi ante concursum duo corpora sibi ibant in contrarias et post concursum rursus, secundum certas scilicet paral-

lelas, eatenus differentia inter quantitates motuum ante concursum aequatur differentiae post concursum. Quodsi corpora progressum ex consentiente mutent in contrarium vel contra, summa quantitatum motus in progressu consentiente aequabitur differentiae earundem in progressu contrario, secundum easdem scilicet utrobi parallelas in quibus contrarietas sumitur. Idemque locum habet in pluribus, quatenus nonnulla tanquam aggregata in unum considerando, omnia simul pro duobus haberi possunt, ut supra.

Demonstratio manifesta est ex Scholio praecedente. Manet enim eadem quantitas progressus ante et post concursum; quae si per meram additionem progressuum (id est quantitatum motus) corporum amborum in utroque statu colligitur, utique manet et quantitas motus absoluta; quatenus vero detractione opus est in alterutro aut utroque statu, progressus iste integer est quantitatum motus secundum illas parallelas differentia. Atque ita eatenus motuum seu progressuum singulorum differentia in uno statu differentiae aut summae quae est in alio statu aequatur.

Propositio 14.

Si corpora suo impetu moveantur, tunc quaecunque demum fiat hypothesis phaenomenis corporum quoad situs inter se semel satisfaciens in statu aliquo priore seu in causa, satisfaciet etiam in statu quocunque posteriore seu effectu, eademque semper prodibunt phaenomena, seu (ut paucis dicam) Hypotheses diversae a se invicem discerni non possunt.

Nam posito motu libero ex vi semel impressa praecedente, hoc est rectilineo uniformi, ante concursum non possunt discerni hypotheses (quod quidem Geometrice constat ex prop. 16 cap. 2 sect. 1 Part. II.). Sed nec concursu discernuntur. Nam modo eadem sit corporum celeritas respectiva, corpora eodem modo agunt in se invicem, seu eadem sit vis ictus (per prop. 7 hic). Vis autem ictus transfertur in corporum Elastrum, et corpora concurrentia, nisi Elastrum ipsis vim ex toto aut parte restitueret, ferrentur simul (ut ostendimus ad prop. 10). Elastro igitur eam restituente duo componuntur Motus (non arbitrio fingentium nostro, sed ab ipsa

natura rei), unus communis, alter proprius corporibus reciproce proportionalis, et quidem priori aequalis, atque adeo priorem reddens celeritatem respectivam (ut ostendimus prop. 10), si Elastrum totam vim acceptam restituat; sed si pars virium a partibus corporis non satis elastici absorbeatur, elastrum nihilominus quantam vim dabit corporibus, eandem dabit reciproca proportione, tantumque celeritas respectiva prior certa proportione imminuetur. Cumque haec omnia eodem modo fiant, quicunque fuerit verus corporum motus ante concursum, constat igitur per concursum quoque hypotheses discerni non posse.

Propositio 15.

Si motus communis rectilineus corporibus addatur, eaedem manent eorum actiones mutuae eademque phaenomena inter ipsa. Et si corpora plura praeter motus proprios unius corporis (velut navis) motu communi rectilineo ferantur, nihil inde mutatur quoad proprios motus.

Motus enim communis distantias corporum inter se adeoque celeritates respectivas non mutat, ut manifestum est. Unde jam (per prop. 7 hic) etiam vires respectivae et (per demonst. prop. 16 cap. 2 sect. 1 Part. II.) phaenomena ipsorum inter se non mutantur.

Hinc sequitur, motuum compositionibus nos tuto uti posse salva potentia, quod tamen alioqui dubitationem aliquam recipiebat. Neque enim corpus, quod duabus celeritatibus aequalibus inter se compositis fertur, habet potentiam in directione composita aequalem summae potentiarum in directionibus componentibus, nisi cum directiones angulum rectum comprehendunt. Interim legum praecedentium beneficio natura nihilominus ejusdem potentiae absolutae conservationem consequitur, quae a composito motu aestimatur. Haec autem experimentis consentiunt. Etsi in navi motu recto progrediente nec succussiones patiente ludas motus ludicari, eadem phaenomena experiere quae in terra. Et quae ex navi projiciuntur sagittae, navem vi remorum avolantem consequuntur inque eam recidunt, experimento Gassendi, perinde ac in navem pro anchoris stantem, quia scilicet praet er motum projectionis, etiam motus navis sagitta habuit antequam inde sejungeretur. Unde qui cum magno aliquo corpore nec directe procedente defertur, et ab externis exploratae quietis aut cogniti motus notandis exclusus est,

non habet quo cognoscat, utrum quiescentem an progredientem locum sit sortitus. In motibus circularibus aliisque curvilineis videntur haec prima fronte locum non habere, cujus causam et correctionem in sequentibus investigare operae pretium erit.

Propositio 17.

Omnes Motus sunt compositi ex rectilineis uniformibus.

Nam omnis motus per se est uniformis et rectilineus; actio autem omnis in corporibus constitit in motu. Itaque motus rectilineus non nisi impressione alterius, etiam per se rectilinei (salvo licet priore) supervenientis inflecti potest, ac proinde nulla intelligi potest origo motus curvilinei et difformis, nisi per compositiones rectilineorum uniformium.

Haec propositio ut ad sequentes quasdam demonstrandas adhiberi potest, ita vicissim demonstrari potest ex sequentibus, quippe quae et aliunde demonstrantur, ut apparebit inprimis ad prop. 20. Hinc si corpus captum ab alio ex motu rectilineo in gyrum se vertere cogatur, arbitror revera pergere in recta linea, licet vi adhaesionis, quam a motu quodam derivo, ad centrum repellatur. Suspicor autem, Naturam arcanis quibusdam modis omnes suos conatus etiam particulares conservare et ad exitum perducere. Certe in concursu corporum aequalium contingit (quemadmodum infra ostendemus), ut celeritates absolutas ac directiones permutent inter se. Inde si certo tempore (fig. 198) A et B pervenerint ex ${}_1A, {}_1B$ in ${}_2A, {}_2B$, et aequali tempore a concursu ${}_2A\,{}_2B$ perveniant in ${}_3A, {}_3B$, fiet ut omnia perinde eveniant, ac si sine ullo concursu unumquodque suam viam fuisset prosecutum; loco enim ipsius A, quod semoto concursu pervenisset nunc in locum ${}_3B$, jam eo pervenit B, et loco ipsius B, quod semoto concursu pervenisset nunc in locum ${}_3A$, jam eo pervenit A. Cumque sibi sint aequalia, patet Naturam scopum suum aequipollenter obtinuisse. Et quemadmodum videmus Naturam in sono propagando res elasticas trementes secare per se in partes aequales, quod scilicet ea ratione melius consentiunt vibrationes; ita fieri potest, ut sponte Naturae ita fiant concursus, quasi corpora inaequalia ex pluribus partibus aequalibus componerentur. Hinc etiam cum omnes conatus quodammodo exitum habere arbitrer, si (fig. 199) corpora A, B radii cujusdam extremitatibus affixa circa medium

velut centrum ferantur atque ita recedere ab eo conentur, arbitror revera recedere et tendere ab B ad C, sed impulsu contrario corporum insensibilium rursus versus centrum repelli a C ad $_2$B, neque aliam esse causam adhaesionis, ut mox amplius patebit.

Propositio 18.

Si in corporum concurrentium composito ex concursu gyrus oriatur, is fit circa centrum commune gravitatis, et motibus contrariis reciproce proportionalibus seu respective aequalibus utrinque compensantur. Atque ita et vis respectiva eadem et vis progressiva seu progressus dicti centri rectus uniformis conservatur ut in molibus retilineis, ita et in circularibus uniformibus, aliisque curvilineis qui horum compositione nascuntur. Quodsi tales non sint motus, saltem tales intelligi possunt conatus, et speciatim ultimi conatus ante concursum, qui proinde dictos per se motus vel saltem, si impediantur, tales rursus conatus producent summam directionis conservantes.

Haec quidem directionis totalis conservatio sequitur ex praecedente, quoniam in rectilineis uniformibus veram esse supra ostendimus (prop. 12), et ex his per dictam praecedentem omnes alii componuntur. Sed hoc interpretandum foret subintelligendo motus quosdam insensibiles corporum insensibilium ambientium, quorum impressione corporum partes ad se invicem impelluntur, unde firmitas seu cohaesio exsurgit. Idem tamen, his etiam non comprehensis, aliunde ostendi potest, sumendo corpora firma per se more solito exclusis causis firmitatis; sed tunc propositio non valet quidem generaliter, succedit tamen in motibus uniformibus et in conatibus quibuscunque, ut eam concepimus.

Ponamus (fig. 200) duo corpora A, B aequalia aequalibus motibus parallelis et contrariis directionibus incidere in excipulas seu cavitates C et D in extremitatibus rectae CD positas, atque ita motus rectilineos in gyrum convertere, manifestum est centrum eorum G (quod in medio est rectae CD) ut quieverat ante gyrationem, ita et quiescere post eam, siquidem ipsam rectam velut molis expertem, aut si corporea est, ut centrum suum etiam in G habentem consideremus. Quod si corpora sint inaequalia

aut inaequali celeritate ferantur, orietur colluctatio quaedam, et quidem concurrentium motus ex hypothesi (et conatus semper) sunt rectilinei et uniformes, secundum leges motuum rectilineorum uniformium seu liberorum et per se evenientium hactenus ostensas, licet vel ab externa actione, vel ab obstaculo deinde mutentur.

Itaque perinde moveri conabuntur corpora A, B, pariterque eorum centrum gravitatis commune, ut leges supradictae jubent, adeoque centrum si prius quieverat adhuc quiescet, si prius movebatur, moveri porro conabitur aequabili motu in directum. Hi autem conatus non impediuntur in ipsa conversione motus rectilinei in circularem nisi differentia incomparabiliter parva seu inassignabili. Ponamus enim (fig. 201) punctum A conari progredi recta ${}_1A{}_2A$, sed incidens in D extremum radii AD cogi circulari ac deflectere in $({}_2A)$ seu ${}_2D$, et pro recta ${}_1A{}_2A$ describere arcum ${}_1D{}_2D$; patet initio seu in ipsa mutatione motus recti in gyrum, directionem non mutari differentia majore quam quae est anguli contactus quovis rectilineo incomparabiliter minoris, et differentiam inter rectam ${}_1A{}_2A$ et arcum ${}_1D{}_2D$ esse ipsis differentibus incomparabilem, ac proinde vim centrifugam (quae est ut ipsa recta ${}_2A$ $({}_2A)$, differentia scilicet radii A $({}_2A)$ et secantis R_2A) esse celeritate (quae est ut recta ${}_1A{}_2A$) incomparabiliter minorem, adeoque initio pro nihilo habendam esse mutationem, quae demum in progressu continua repetitione fit notabilis; idemque est in caeteris omnibus punctis, quae a conatu rectilineo ad gyrum transeunt. Et punctum quod quiescere debet, si abesset gyrus, quiescet nunc quoque non obstante corporum gyro, quia ne initium quidem mutationis intelligi in ipso potest, et nulla existente ${}_1A{}_2A$, multo magis nulla est deflexio et vis centrifuga, ipsaque adeo ${}_2A$ $({}_2A)$. Itaque si quiescit centrum gravitatis ante concursum, seu initio concursus, celeritatem progrediendi nullam habet, et proinde etiam ex vi concursus conatibusque inde ortis per se rectilineis celeritatem nullam habere debet, gyro quoque superveniente motum nullum habebit, neque adeo circulabitur, cum gyrum nihil aliud esse ostenderimus, quam motum per se rectilineum futurum, nunc inassignabili alteratione deflexum. Ex hoc ipso jam quod de quiescente centro ostendimus, conficitur idem et in moto. Quoniam enim ostensum est prop. 15 compositiones motuum rectilineorum seu hypotheseos variationes nil mutare in phaenomenis, ideo pos-

sumus talem assignare motum communem toti composito, ut perinde sit ac si omnia in navi ferantur, in qua spectanti quiescat centrum gravitatis, etsi absolute seu ex ripa immota spectanti eadem prodeant phaenomena quae antea. Jam in navi omnia fieri debent eodem modo, sive moveatur sive quiescat navis. Itaque in navi etiam post concursum gyro licet oriente quiescet centrum gravitatis, si ante concursum quievit, quemadmodum paulo ante ostendimus futurum esse, si navis motus abesset, seu centrum revera quiesceret absolute. Interim totum motu navis seu motu communi progredietur, et ita efficietur, ut extra navem spectanti centrum gravitatis, prout ante concursum supposuimus, aequabiliter porro progrediatur, atque ita absolute loquendo progrediatur ut ante sine ulla gyratione; caetera autem puncta (ut in navi) gyrantur circa ipsum centrum velut immotum, et praeterea simul cum ipso motu communi rectilineo progressionis totalis progrediuntur; quatenus autem gyrantur, compensant invicem progressus et regressus seu motus contrarios corporibus reciproce proportionales ex natura gyri, in quo utique latera opposita in contrarias partes feruntur, atqua ita semper vis respectiva conservatur; et si liberarentur omnia a gyro et directiones in tangentibus prosequerentur, haberent priores celeritates respectivas, quas ante gyrum habebant, et gyrantia utcunque divisa in duas partes haberent celeritates earum invicem recedendi corporibus reciproce proportionales et iis quas ante concursum habuerant aequales. Itaque ut in motibus rectilineis per celeritates contrarias corporibus reciprocas, ita et nunc in gyris oppositis per easdem eadem proportione distributas celeritates respectivae, adeoque et respectivae vires conservantur; dum interim motu communi centri gravitatis seu totius compositi motibus contrariis respective aequalibus superaddito praeter vim corporum agendi in se invicem, etiam ipsa vis agendi communis, seu vis progressiva totius compositi vel summa directionis totalis conservatur. Caeterum plures gygri particulares quoque fieri possunt in componentibus, ubi etiam centri cujusque particularis ratio habetur.

Res etiam ex praecedenti propositione ostendi poterat, hoc modo, quod ubique vires tam respectivae quam progressivae conservantur in motibus rectilineis uniformibus, tales autem sunt omnes (ex praecedenti), posito scilicet adhaesiones quoque seu firmitates et adeo aequidistantiam quoque a centro servatam ex-

insensibilibus impressionibus ambientium aëris. Sed quia ambientium impressiones a conatibus recedendi gyrantium compensantur, nec inde quicquam viribus ipsis corporum insitis a motu rectilineo in gyrum versis derogatur, supererunt eaedem quae ante vires tam totales, quam respectivae, ut explicatum est. Quae sane admirandam nec satis consideratam hactenus Naturae in tuendis legibus constantiam atque harmoniam declarant. Videri poterat fallere regulas nostras, cum (fig. 202) corpus A in corpus aliquod immobile B incurrit; aut cum radius CD circa centrum firmum C mobilis, cavitate seu excipula D capit corpus E rectilineo motu adveniens, et in gyrum cogit; vel cum corpora F et G in libram HML, cujus centrum firmum M, brachia autem opposita HM, LM, incurrunt lineis FH, GL ab eadem parte librae (verbi gratia, ambo tendendo sursum aut ambo deorsum), sed in brachiis oppositis. Tunc enim reflecti potest corporum motorum centrum gravitatis (ut centrum ipsius A a corpore B repulsi), vel in gyrum se flectit, ut E incidens in excipulam D; vel denique reflectitur aut pergit pro ratione situs, ut centrum ipsorum F et G, quodsi incideret in M, reflecteretur.

Sed haec objectio solvi facile potest; praeterquam enim quod omne corpus perfecte firmum, si daretur, considerari debet ut infinitum respectu aliorum, unde centrum gravitatis omnium commune in ipsum immobile cadit adeoque quiescit, sciendum est revera nullum esse corpus immobile; quod autem nobis tale apparet, ideo videtur eundem semper locum tenere, quia telluris globo aut alteri corpori magno adhaeret, quod quidem movetur loco nonnihil quantum postulant hae ipsae leges nostrae, sed motus ejus insensibilis ob summam tarditatem quam corporis magnitudo postulat percipi nullo modo potest. Idem est, si corpus aliquod firmum vi insensibilium corporum continue resistentium suum locum tueatur. Semper igitur verum manebit, et vim respectivam corporum invicem, et vim progressivam directionis totalis conservari. Hanc Naturae legem non consideravit quidam ex celeberrimis nostri saeculi Philosophis, dum putavit, ad cogitationes voluntatesque animarum non quidem mutari quantitatem motus, mutari tamen directiones motuum in corporibus. Sed hoc fuit non minuere, sed transferre tantum difficultatem. Neque enim Natura minore cura summam virium directricium, quam absolutarum (quas ille Philosophus cum quantitate motus confudit) conservare

studet. Et fieri potest, ut concomitantia quadam (si ita appellare licet) a Conditore ab initio stabilita consentiant animarum et corporum actiones, etsi neutris leges alterius occasione minima ex parte violentur, quod mirum videri non debet, cum unaquaeque singularis substantia ita comparata sit, ut in notione sua completa totum Universum involvat, et secundum certos considerandi modos omnia per se ac velut sponte facere dici possit. Adde prop. 6. Sed ista quidem hujus loci non sunt.

Propositio 19.

Non tantum in motibus rectilineis (ut hactenus ostendimus) sed et in universum vera est, quam stabilivimus Naturae Lex de aequipollentia hypothesium, seu quod Hypothesis semel respondens phaenomenis praesentibus respondebit semper adeoque et phaenomenis consequentibus, quomodocunque corpora agant inter se, modo scilicet corporum systema sit cum aliis incommunicans, seu nullum superveniat agens externum.

Hoc demonstratur ex prop. 16, quod scilicet nihil aliud sunt motus omnes quam rectilinei uniformes compositi, in quibus res succedit per prop. 14. Sed idem aliter demonstratur ex generali Axiomate, quod quorum determinantia discerni non possunt, eorum nec discerni possint determinata. Ac proinde cum in causa seu statu praecedente hypotheses diversae discerni non possint, quamdiu scilicet corpora motibus rectilineis liberis feruntur, utique nec in effectibus seu statibus sequentibus quibuscunque poterant discerni; neque adeo in concursibus aut aliis quibuscunque eventibus, licet forte quidam motus ex rectilineis in circulares ob corporum cohaesiones vel firmitatem et obstantia retinacula convertantur. Cum ergo omnes motus etiam circulares aliive curvilinei potuerint orti esse ex praecedentibus rectilineis uniformibus per objecta forte retinacula in curvilineos mutatis, et motus semel datus quomodocunque prius fuerit productus, eosdem eventus nunc habere debeat, quos alius per omnia gemellus licet aliter productus; ideo generaliter Hypotheses nullis unquam phaenomenis poterunt mathematico rigore discerni. In universum, cum motus fit, nihil in corporibus invenimus quo determinari possit, quam mutationem situs, qui semper in respectu consistit. Itaque motus sua natura est re-

spectivus. Haec autem de Mathematico rigore intelliguntur. Interim nos motum tribuimus corporibus secundum eas hypotheses, per quas aptissime explicantur, neque aliud est hypothesin veram esse, quam aptam. Itaque cum navis plenis velis in mari fertur, possibile est omnia phaenomena exacte explicare, navem quiescere supponendo atque affingendo omnibus Universi corporibus motus ad hanc hypothesin congruentes. Sed hoc etsi nulla demonstratione mathematica refutari queat, tamen ineptum foret. Memini quidem, viro cuidam praeclaro olim visum ex motibus quidem rectilineis non posse discerni sedem subjectumve motus, posse tamen ex curvilineis, quoniam quae revera moventur, recedere conantur a centro motus sui. Atque haec fateor ita se haberent, si ea esset natura retinaculi seu firmitatis atque adeo motus circularis, quae communiter concipi solet. Verum omnibus exacte consideratis reperi, motus circulares nihil aliud esse quam rectilineorum compositiones, neque alia in Natura esse retinacula quam ipsas motuum leges. Et ideo nobis aliquando non apparet aequipollentia hypothesium, quod omnia eventa aliquando non appareant ob corporum ambientium insensibilitatem, et saepe systema aliquod corporum cum aliis incommunicans videtur, contra quam res se habet.

Caeterum ex hoc solo principio, quod motus sua natura sit respectivus adeoque omnes hypotheses semel consentientes semper idem producant, caeterae Naturae leges hactenus expositae demonstrari potuissent, quod admonere operae pretium fuit.

Propositio 20.

Corporum firmitas seu partium cohaesio oritura motu seu conatu unius corporis versus aliud impulsi.

Nam (ex prop. 17) omnes motus sunt rectilinei uniformes inter se compositi. Sed si corporum firmitas aliunde quam a motuum compositione est, gyratio quoque aliunde quam a compositione nascitur, ex ipsa scilicet necessitate quae sequitur ex hypothesi firmitatis. Utique enim (fig. 203) rectam corpoream seu crassitudine praeditam ac firmam LM, in extremitatibus L et M aequali vi respectiva motuum contrariorum AL, BM a corporibus A et B simul pulsatam, progredientibus corporibus in gyrum agi necesse est circa punctum medium N, sed ita materia circa L vel M a centro N recedere tentans sola firmitate corporis non motu

contrario impresso retinetur; nec proinde motus circularis iste constitit in compositione rectilineorum, nisi ipsam firmitatem motu quodam appressionis explicemus. Idem conficitur ex prop. 19, quam non tantum ex prop. 17 sed et alia diversa ratione demonstravimus, unde rursusque prop. 17, ex prop. 19 una cum praesente 20 regressu quodam aliter quam supra demonstratur. Nimirum quia in prop. 19 ostensum est, ob naturam motus respectivam hypotheses esse indiscernibiles, etiam cognosci non debet, utrum corpus aliquod gyretur; sed posito firmitatem atque adeo gyrationes ex motuum rectilineorum compositione non nasci, motum absolutum a quiete discernendi ratio datur. Sit enim (fig. 204) corpus ACB gyrans circa suum centrum C, juxta seriem punctorum ADB, et jam ponatur firmitatem corporis dissolvi partemque extremam ut A rupto vinculo separari, ibit linea recta versus E, si versus fuit corporis AB motus; sin apparens tantum fuit, pars A cum reliquo corporis ACB manebit, non obstante vinculi solutione. Atque ita habebimus rationem necessariam discernendi motum verum ab apparente contra prop. 19. Neque hoc evitabitur, nisi firmitas corporis ACB oriatur a corporum ambientium appressione. Cum enim omnes ita motus sint rectilinei, nec aliud fuerit gyratio quam certa quaedam motuum rectilineorum compositio, et in mere rectilineis motibus absolute loquendo et geometrica necessitate hypotheses invicem discerni nequeant (per prop. 19), sequitur nec in gyrationibus discerni posse. Sed ostendamus distinctius, quo modo gyratio quaedam circa centrum et appressio corporum ex sola conatuum rectilineorum impressione oriatur. Nempe sit (fig. 205) mobile A tendens directione et celeritate repraesentata per rectam ${}_1A_1\alpha$ elementarem indefinite parvam; sit autem corporum ambientium conatus perpetuo pellens mobile A versus centrum C, ita ut eandem semper ab eo distantiam servet (quia scilicet alioqui praesens motus ambientium turbatur), et sit impulsus ut recta ${}_1A_2A$, ita ut ${}_2A$ cadat in circulum centro C radio C_1A descriptum (quem sane impulsum ${}_1\alpha_2A$ comparatione celeritatis praecedentis incomparabiliter parvum esse necesse est, ut jam notavimus ad prop. 18 hic; est enim aequalis vi centrifugae ipsius A, qua a centro recedit, quam infinite parvam esse respectu celeritatis seu impetus infinitis istis impulsibus concepti jam ostensum est prop. 28 de Causa et Effectu). His positis manifestum est, mobile quo temporis elemento venisset ab ${}_1A$ ad ${}_1\alpha$, nunc venire ab ${}_1A$

ad ${}_2A$, et ita ferri motu composito ${}_1A_2A$, seu celeritate et directione repraesentata per rectam (ab arcu circuli inassignabili inconsiderabiliter differentem) ${}_1A_2A$, ac proinde vi concepti conatus, ut ${}_1A_2A$, porro tendere in recta ${}_2A_3A$ continuata ad ${}_2\alpha$ conatu ${}_2A_2\alpha$ aequali ipsi ${}_1A_2A$. Sed cum ita rursus exerret seu recedat a circulo, utique a causa priore iterum pelletur versus centrum C usque ad circulum conatu ${}_2A_3A$, iterum incomparabiliter minore quam est celeritas seu impetus ${}_2\alpha_3A$, et ita motu movebitur ex ${}_2A_2\alpha$ et ${}_2\alpha_3A$ composito, id est motu ${}_2A_3A$, qui rursus continuabitur per se in ${}_3A_3\alpha$; unde corpus conatu ${}_3\alpha_4A$ ad circulum repelletur; et ita porro. Quoniam autem rectae ${}_1A_1\alpha$ et ${}_2A_2\alpha$ sunt aequales, ut ostendimus, et recta ${}_1A_1\alpha$ ab arcu circulari ${}_1A_2A$, itemque recta ${}_2A_2\alpha$ ab arcu circulari ${}_2A_3A$ differunt inconsiderabiliter, ita scilicet ut in initiis seu conatibus motuum, de quibus agitur, error sit minor quovis dato; ideo cum manifestum sit assumto tempore satis parvo errorem seu differentiam ad ipsa quae differre dicuntur, habiturum esse rationem data minorem (quod nunc prolixe explicare non vacat) utique ob aequalia temporis elementa assumta (quoniam scilicet celeritas per progressus ipsos elementares expressimus); patet aequalibus temporis elementis aequales arcus circulares absolvi, seu circulationem esse uniformem. Itaque ex motu rectilineo per se uniformi, sed accedente conatu paracentrico in circularem mutato oritur circulatio quoque uniformis, quod memorabile est, experimentisque consentit. Habemus ergo conversionem motus rectilinei in circularem per conatuum rectilineorum compositiones explicatam, qua sola ratione aequipollentiae Hypothesium satisfieri potest.

Certum est, explicandam esse causam cohaesionis ex his quae de corpore intelligimus, uti sunt magnitudo, figura, quiesve aut motus. Sed praeter motum nihil horum ad rem facit.

Sit enim (fig. 206) corpus ABC, cujus pars AB impulsa ictu veniente in DE, non relinquat BC in loco priore, sed secum moveat, quaeritur ratio hujus tractionis. Et quidem si velimus eam ad pulsum reducere concipiendo hamos quosdam corporis unius AB inseri in ansas corporis alterius BC, vel funes quosdam aut plexus fibrosos aliamve illaqueatricem texturam comminiscamur, nihil egimus, quia rursus quaeritur, quidnam fibrarum hamulorumque partes connectat. Contactus autem solus vel quies unius apud aliud aut motus communis utique non sufficit, neque

enim intelligi potest, cur corpus unum aliud trahat, ob hoc solum quia contingit. Et in universum non intelligimus aliam rationem cur corpus moveatur, nisi ideo quod duo corpora in eodem loco esse non possunt, et proinde uno moto et alia moveri necesse est, in quorum hoc locum subit; atque ideo omnis tractio ad pulsum reduci debet. Idem ex Naturae legibus hoc loco confecimus. Et quemadmodum ex lege mutationis quae per saltum esse non debet, ostendimus omnia corpora esse flexilia, seu non dari Atomos; ita ex posita generaliter lege Naturae, quod eadem prodire debeant phaenomena, quaecunque de subjectis motuum fiat hypothesis, ostendimus, non oriri firmitatem nisi ex compositione motuum. Quod vero aliqui a pressione aëris aut aetheris corporum firmitatem deducunt, similitudine duarum tabularum politarum quae aegre divelluntur, id tametsi in aliquibus verum sit, primas tamen firmitatis vel cohaesionis origines non explicat; quaestio enim superest de ipsa firmitate seu cohaesione tabularum. Cum ergo massa materiae non nisi motu discriminari possit, ab hoc uno ultimas firmitatis majoris minorisve rationes peti debere manifestum est.

Propositio 21.

Corpus omne aliquem habet gradum firmitatis in omnes partes.

Nam omne corpus impelli potest vel impellere in omnes partes; itaque Elastrum est (per prop. 6 hic), in quamcunque partem impellatur; et omne Elasticum aliquem habet gradum firmitatis seu partium cohaesionem.

Scilicet omnia corpora ostendimus flexilia esse prop. 5, nunc omnia ostendimus aliquam habere firmitatem. Itaque nihil perfecte fluidum aut firmum, vel molle aut durum est, suntque omnino extrema haec aliena a rerum natura. Et omnia omnibus aliquo modo cohaerent, et ab ipsis nonnihil patiuntur. Itaque minime putandum est dari in natura materiam summae fluiditatis, tanquam primum aliquod Elementum, aut globos secundi cujusdam Elementi duros perfecte tornatos.

Propositio 22.

Vacuum dari Legibus Naturae consentaneum non est.

Nam omne corpus aliquem habet gradum firmitatis in omnes partes (per prop. 21). Sed omnes firmitas oritur ab appressione

ambientis (per prop. 20). Igitur corpus omne ab omni parte ambiri necesse est, id est vacuum non datur.

Hanc propositionem ex aliis generalioribus derivare licet, quae non sunt hujus loci; quoniam tamen sponte nascitur ex Naturae legibus hactenus stabilitis, annotandum duximus. Quemadmodum et supra Atomos sustulimus prop. 5. Et sunt, quibus magis placent ratiocinationes a concretis sumtae, quam quae ducuntur ex theoria abstracta a systematico statu.

Propositio 23.

In motu composito ex duobus angulum rectum facientibus eadem est potentia absoluta secundum directionem diagonalis, quae est in ambobus motibus secundum latera rectanguli simul sumtis.

Sit (fig. 207) corpus A tendens motu AB, et rectae AB tanquam diagonali circumscribatur parallelogrammum rectangulum quodcunque ACBD; sintque corpora E et F aequalia ipsi A, et habeat E motum EG aequalem ipsi AC, similiterque F motum FH aequalem ipsi AD; dico potentiam corporis A esse potentiis corporum E et F aequalem. Nam potentia ipsius E est ad potentiam ipsius A ut quadratum EG ad quadratum AB (per prop. 4 cap. de potentia); similiterque potentia ipsius F est ad potentiam ipsius A, ut quadratum FH ad quadratum AB. Ergo et summa potentiarum E et F simul est ad potentiam ipsius A, ut summa quadratorum EG et FH seu AC et FH ad quadratum AB. Sed summa quadratorum AC et FH aequatur quadrato ipsius AB; ergo et potentiae E et F simul aequantur potentiae ipsius A.

Propositio 24.

Ictus corporum concurrentium fit secundum rectam perpendicularem ad planum contactus in puncto concursus, quatenus ex directione ejus ipsa motus directio componitur.

Si (fig. 208) corpora A et B concurrant directione AB, ad planum contactus (seu corpora ambo in puncto concursus tangens) CB angulum faciente obliquum, ex puncto B educatur BD normalis ad CB, et compleatur rectangulum CADB; ajo ictum fieri directione DB. Nam ponamus quiescere corpus B (quia ad ictum nil refert, quod concurrentium quiescat per prop. 7 vel per prop. 14), ponamus praeterea motum AB produci motu composito ex AC et AD,

perinde ac si regula esset FG, quae dum motu CB parallelo transfertur ex AC in DB, interim corpus A iret in ipsa regula FG motu ut AC vel DB, inde enim (per prop. 2) manifestum est productum iri motum AB. Sed in eo casu patet, corpus A simul motum duobus motibus, uno in regula FG versus B, et altero cum regula FG parallele ad CB, solo motu in regula FG versus CB agere in CB; itaque cum motus AB idem efficiat, quomodocunque productus intelligatur, semper ergo ictus obliquus AB non erit nisi secundum directionem DB. Idem demonstratur ex consideratione Elastri; nam si (fig. 209) corpus A veniens motu ${}_1A_2A$, et ibi incurrens in Elastrum LM, pergat linea recta in ${}_2A_3A$, non intendet Elastrum, nisi secundum ${}_2A_2M$, perinde ac si venisset motu N_2A. Denique idem confirmatur ex propositione praecedente. Nam quia ictus obliquus partem tantum virium habet ictus recti (quod ex eo demonstratur, quia summa obliquitas, id est parallelismus omnimodus facit omnino ictum evanescere; ab integro autem ictu perpendiculari ad nullum non potest iri per saltum, itaque paulatim per intermedias obliquitates imminuitur ictus), et simul habenda est ratio obliquitatis, adeoque simul et vis et directio dividenda est in duas partes, nec vero dividi potest potentia secundum directionem aliquam AB in duas potentias secundum duas alias directiones componentes, nisi per rectanguli DC latera AD, DB diagonalem habentia AB (per prop. praeced. 23); itaque consequens erat, ut haec divisio potentiae, seu compositio directionis valeret, ex quibus unam solam DB, nempe perpendicularem in planum contactus CB, ad agendum in corpus ictum excipiens B aptam esse manifestum est.

Propositio 25.

Si corpus incurrens totam vim servat, anguli incidentiae et reflexionis sunt aequales, anguli scilicet ad planum contactus.

In corpus CD (fig. 210) incidat A linea ${}_1A_2A$ angulo obliquo; ajo si reflectitur tota vi quam habuit incurrens, reflecti linea ${}_2A_3A$ tali, ut anguli ${}_1A_2AC$ et ${}_3A_2AD$ sint aequales. Sit triangulum rectangulum ${}_1AE_2A$, et ${}_3AE_2A$, incurrit corpus A motu E_2A (per prop. praec.), et ideo si reflectitur, in linea ${}_2AE$ reflectetur, cum nulla sit ratio declinandi in alterutram partem, et motu quoque qui celeritate sit ut motus E_2A, alioqui vim amisisset; jam servat praeterea et motum ${}_1AE$, id est, continuat motum ei aequalem et

aequidirectum E_3A; ergo ex composito motu ${}_2AE$ et E_3A fit motus ${}_2A_3A$, angulo ${}_3A_2AD$ aequali ipsi ${}_1A_2AC$.

Hanc rationem demonstrandi aequalitatem anguli incidentiae et reflexionis primus invenit Keplerus in Paralipomenis ad Vitellionem, quam deinde in rem suam transtulit Cartesius. Sed idem alia non minus pulchra ratione demonstrarunt Veteres, Ptolemaeus et Heliodorus Larissaeus, supponendo in actione lucis quod Natura agit via facillima qua potest. Ergo A pervenit ex ${}_1A$ in ${}_3A$ per reflexionem via facillima qua potuit. Et cum facilitas hic in sola brevitate viae intelligi possit, quia uniforme est medium, sequitur A ex ${}_1A$ pervenire in ${}_3A$ per ${}_2A$ punctum reflectens tale, ut sit ${}_1A_2A + {}_2A_3A$ omnium possibilium via brevissima.

Seite 49 Zeile 7 von unten ist für δρεκτικῷ zu lesen δεκτικῷ.

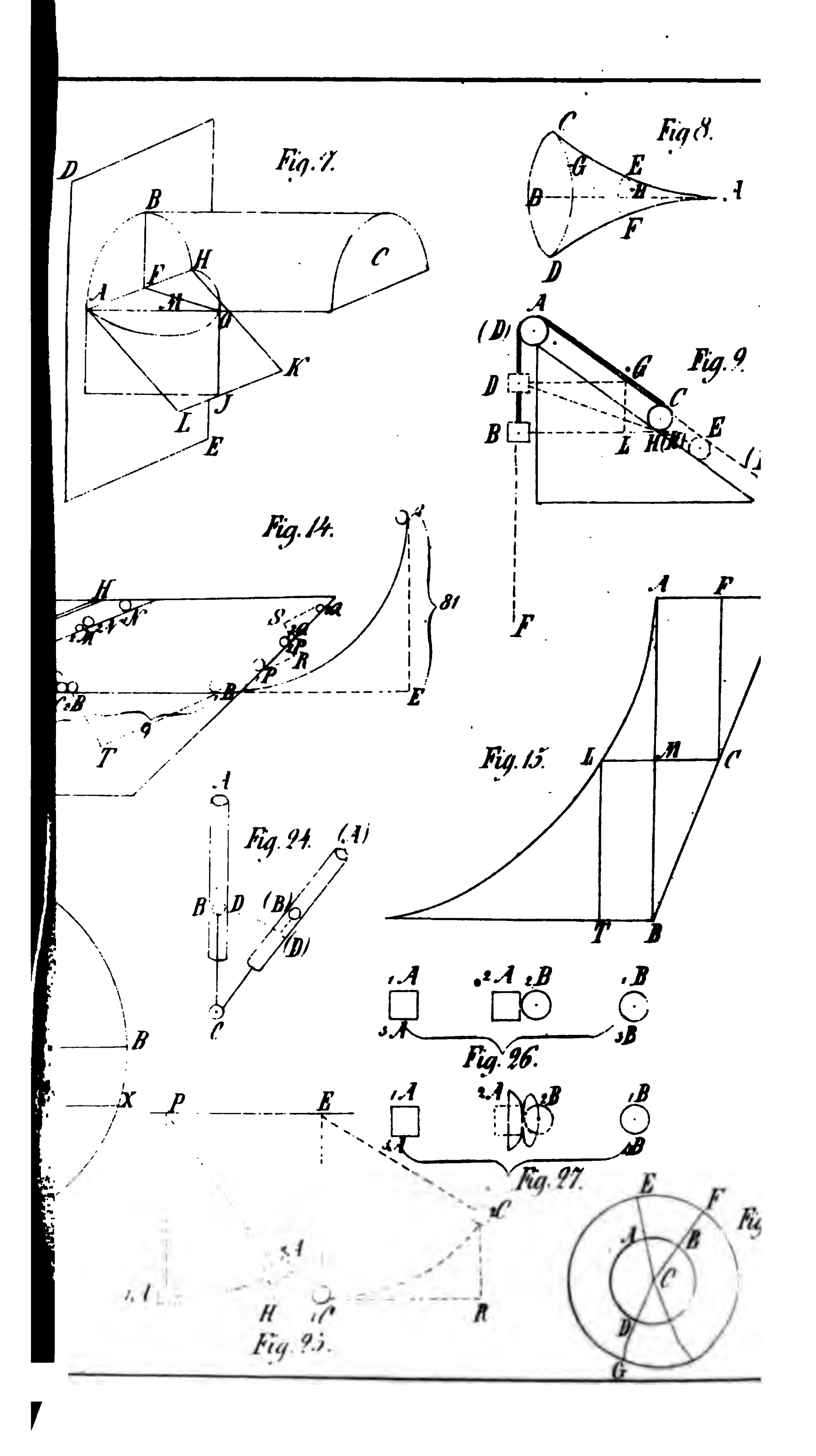
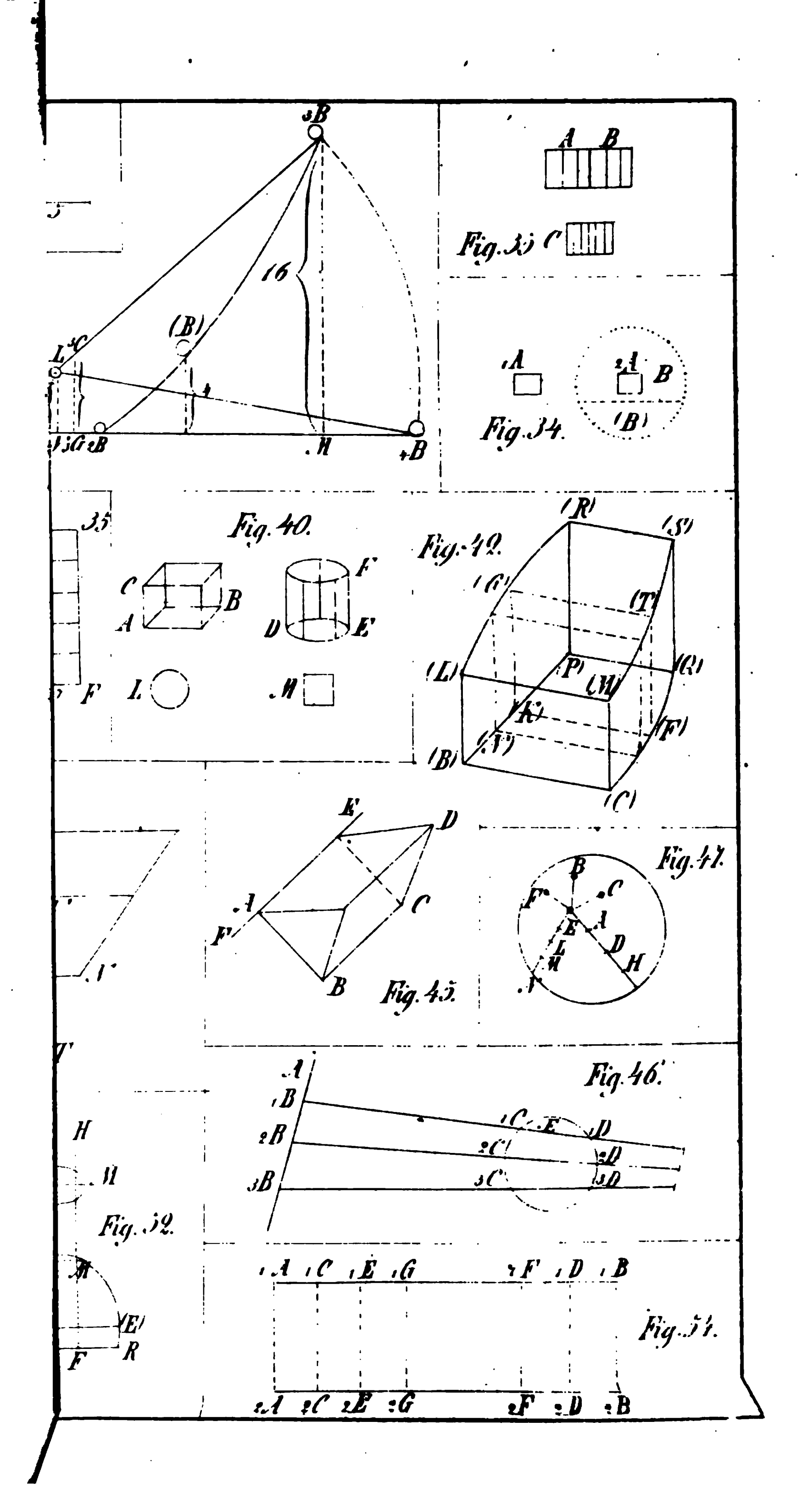


Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.




Fig. 33
Fig. 34.
Fig. 40.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 46.
Fig. 52.
Fig. 54.



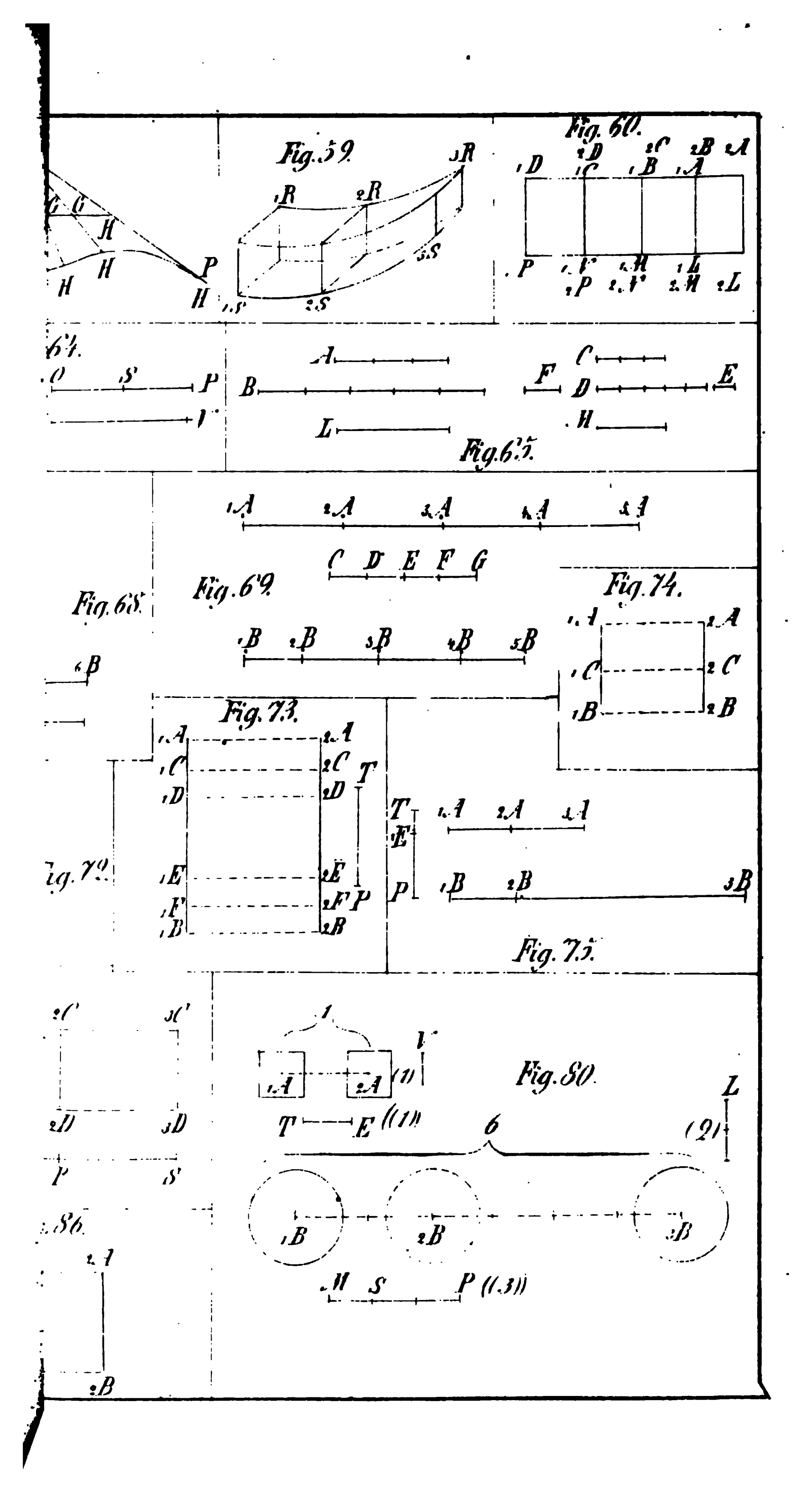
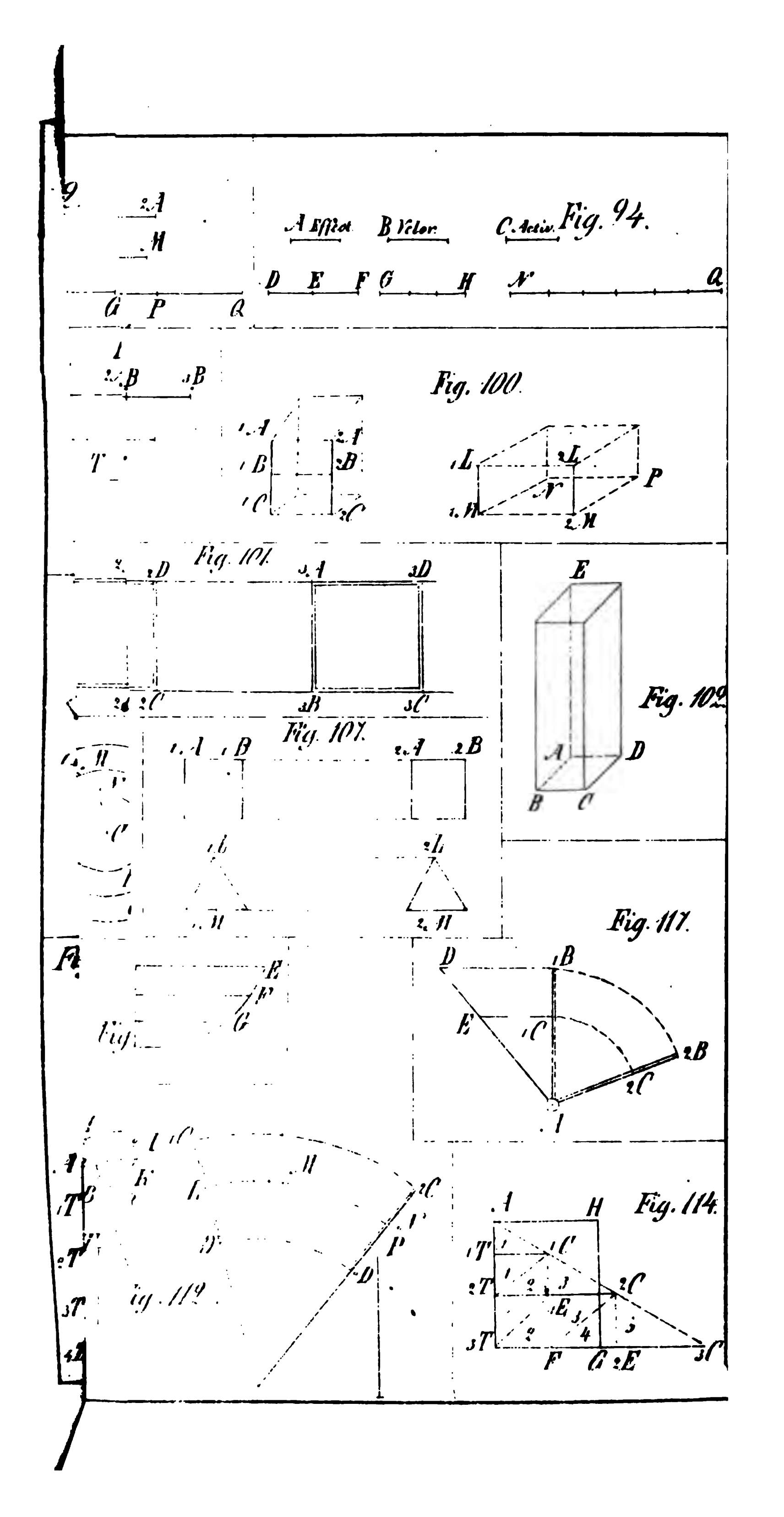


Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 65.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 80.





A Effect
B Velor
C Activ.
Fig. 94.
D E F G H N Q
G P Q
Fig. 100.
L
2L
N
P
1H
2H
Fig. 101.
1D
2A
3D
2B
2C
3B
3C
Fig. 107.
Fig. 102.
E
A
D
B
C
Fig. 117.
D
B
E
1C
2B
2C
Fig. 114.
A
H
1T
2T
3T
1C
2C
E
3C
F
G
2E
P
D

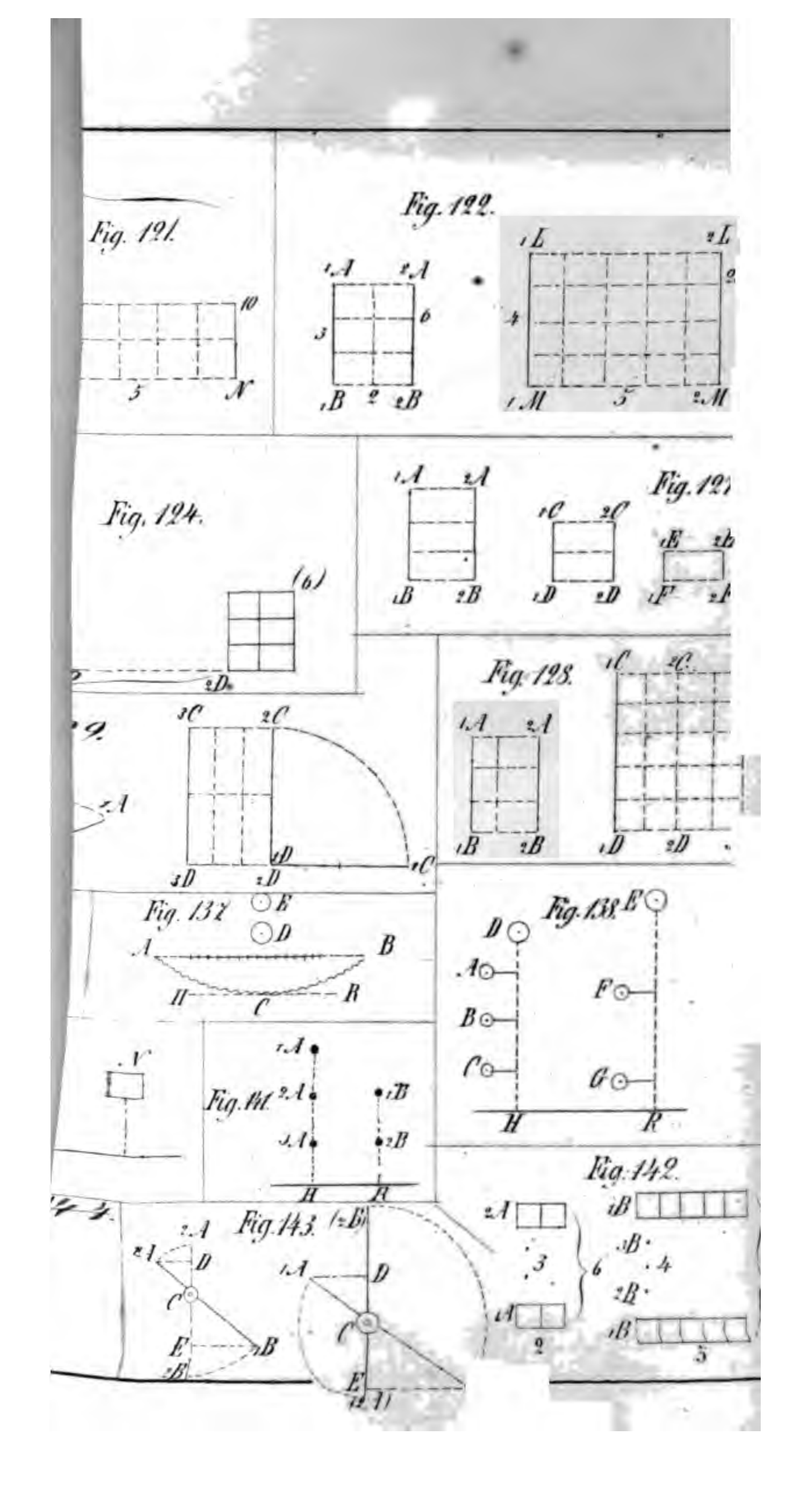
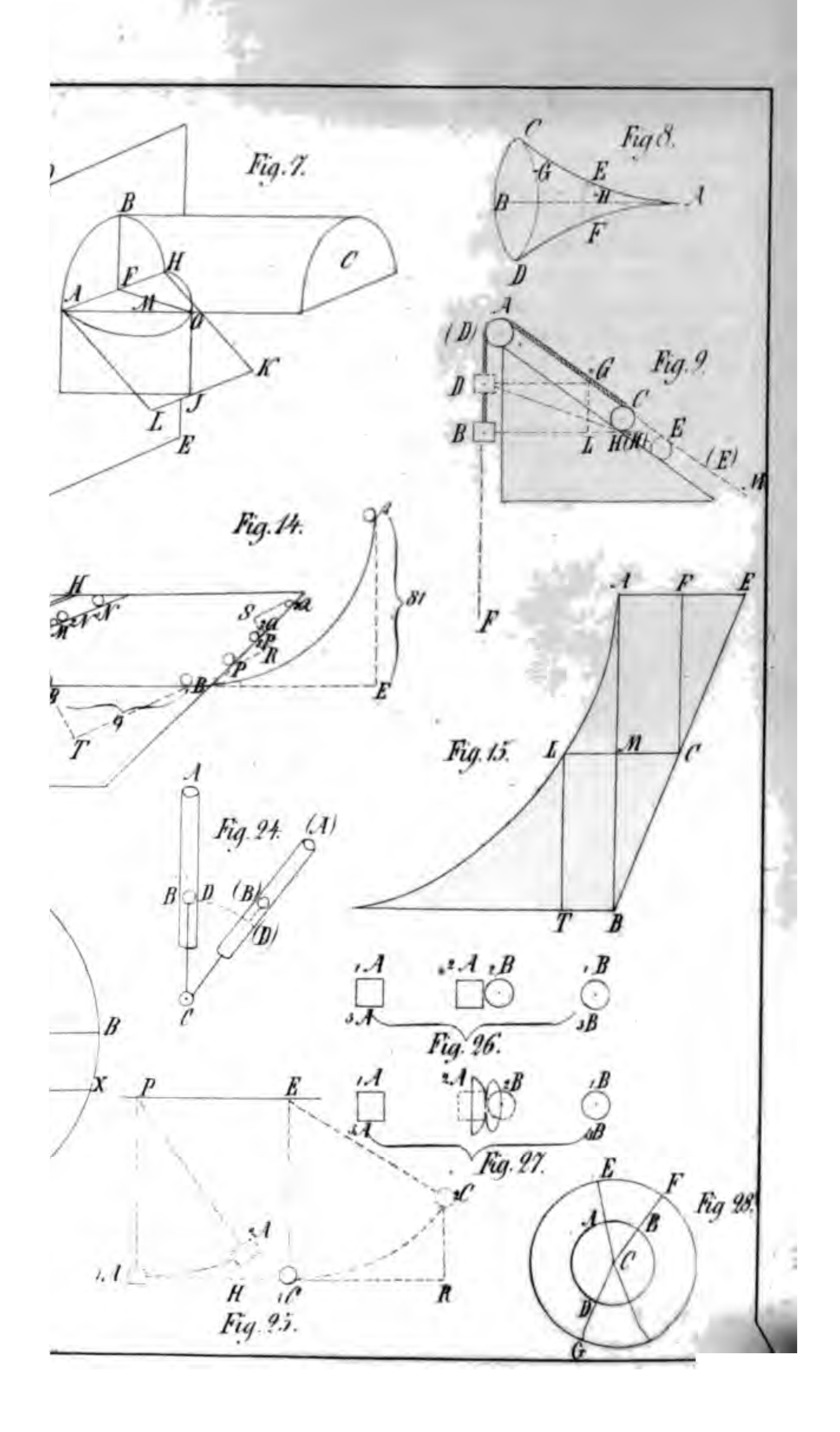


Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 124.
Fig. 128.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.

aequidirectum E_3A; ergo ex composito motu ${}_2AE$ et E_3A fit motus ${}_2A_3A$, angulo ${}_3A_2AD$ aequali ipsi ${}_1A_2AC$.

Hanc rationem demonstrandi aequalitatem anguli incidentiae et reflexionis primus invenit Keplerus in Paralipomenis ad Vitellionem, quam deinde in rem suam transtulit Cartesius. Sed idem alia non minus pulchra ratione demonstrarunt Veteres, Ptolemaeus et Heliodorus Larissaeus, supponendo in actione lucis quod Natura agit via facillima qua potest. Ergo A pervenit ex ${}_1A$ in ${}_3A$ per reflexionem via facillima qua potuit. Et cum facilitas hic in sola brevitate viae intelligi possit, quia uniforme est medium, sequitur A ex ${}_1A$ pervenire in ${}_3A$ per ${}_2A$ punctum reflectens tale, ut sit ${}_1A_2A + {}_2A_3A$ omnium possibilium via brevissima.

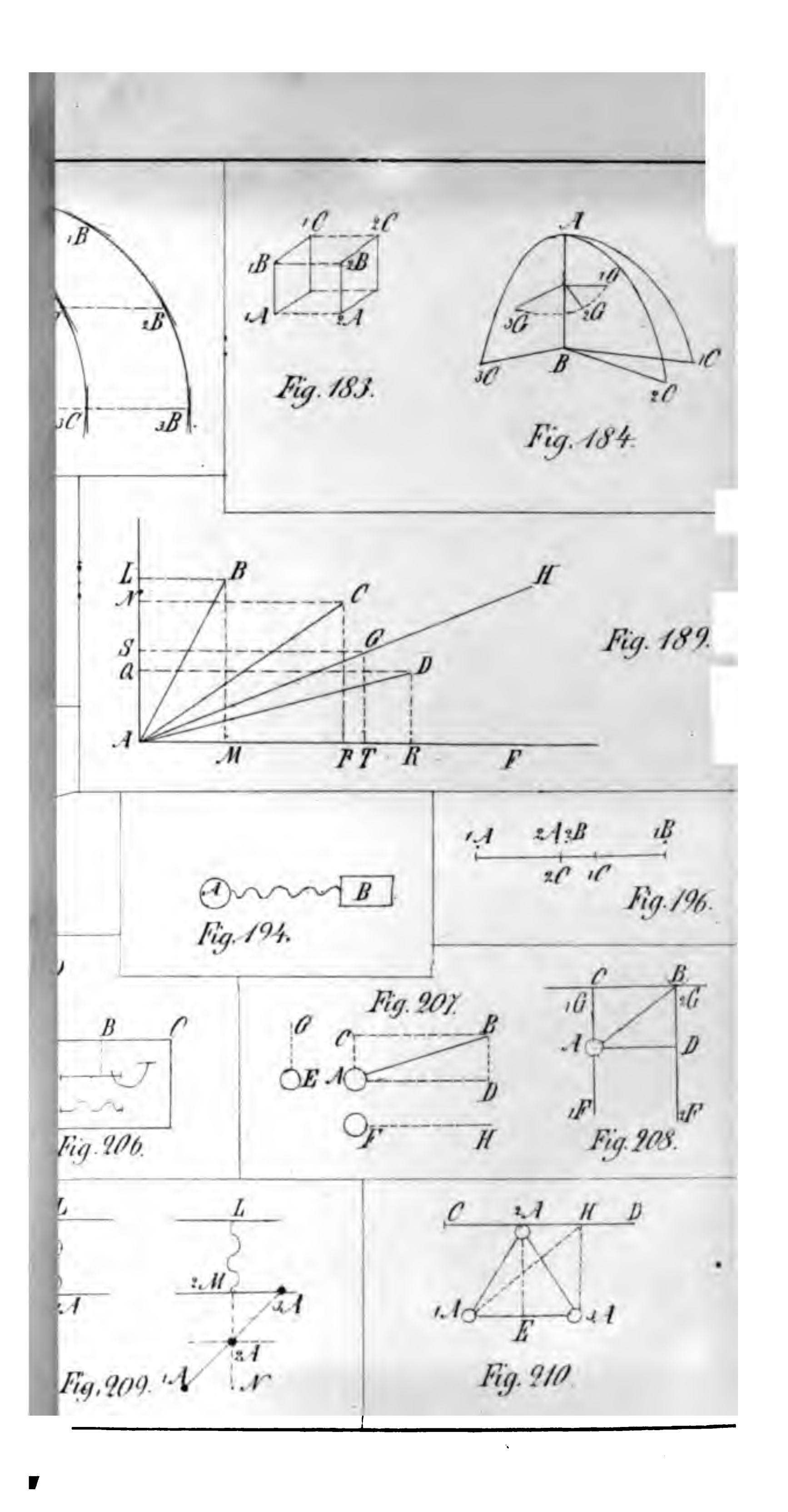
Seite 49 Zeile 7 von unten ist für δρεκτικῷ zu lesen δεκτικῷ.


Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

aequidirectum E_3A; ergo ex composito motu ${}_3AE$ et E_3A fit motus ${}_2A_3A$, angulo ${}_3A_2AD$ aequali ipsi ${}_1A_2AC$.

Hanc rationem demonstrandi aequalitatem anguli incidentiae et reflexionis primus invenit Keplerus in Paralipomenis ad Vitellionem, quam deinde in rem suam transtulit Cartesius. Sed alia non minus pulchra ratione demonstrarunt Veteres, Ptolemaeus et Heliodorus Larissaeus, supponendo in actione lucis quod natura agit via facillima qua potest. Ergo A pervenit ex ${}_1A$ in ${}_3A$ per reflexionem via facillima qua potuit. Et cum facilitas hic in brevitate viae intelligi possit, quia uniforme est medium, debet A ex ${}_1A$ pervenire in ${}_3A$ per ${}_2A$ punctum reflectens tale, ut ${}_1A_2A + {}_2A_3A$ omnium possibilium via brevissima.

Seite 49 Zeile 7 von unten ist für δρεκτικῷ zu lesen δεκτικῷ.


Fig. 183.
Fig. 184.
Fig. 189.
Fig. 194.
Fig. 196.
Fig. 206.
Fig. 207.
Fig. 208.
Fig. 209.
Fig. 210.

Leibnizens gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Siebenter Band.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Leibnizens mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Zweite Abtheilung.

Die mathematischen Abhandlungen Leibnizens enthaltend.

Band III.

HALLE.

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

Inhalt.

Seite

Initia mathematica. Mathesis universalis. Arithmetica. Algebraica.

Geometrica.

INITIA MATHEMATICA.

MATHESIS UNIVERSALIS.

ARITHMETICA. ALGEBRAICA.

In Betreff des vorliegenden Bandes ist die Bemerkung vorauszuschicken, dass die bisherige Anordnung der Abhandlungen nach der Zeit ihrer Abfassung aufgegeben werden musste, insofern von den noch unedirten der Termin ihrer Entstehung nicht immer genau sich ermitteln liess. Es wurde deshalb auf die Verwandtschaft des Inhalts Rücksicht genommen, und es sind diejenigen, die ihrem Inhalt nach übereinstimmen, zusammengestellt. —

Je tiefer Leibniz in die einzelnen mathematischen Disciplinen eindrang, um so mehr überzeugte er sich, dass ein Aufbau derselben von den ersten Principien an nöthig sei. Dies erfordere nicht nur die Wissenschaft selbst, indem dadurch zugleich an ihrer Vervollkommnung gearbeitet werde, besonders aber sei es für diejenigen von der höchsten Wichtigkeit, die selbstständig in die Wissenschaft einzudringen wünschten, insofern sie kennen lernten, wie nach und nach der Fortschritt von dem Einfachsten zu dem Schwierigeren geschehe; auch erhielten sie so eine Anleitung, aus eigener Kraft neue Wahrheiten zu finden. Es ist namentlich das Letztere, die Erfindungskunst (ars inveniendi), der Leibniz an vielen Stellen seiner Schriften das höchste Lob spendet; er preist sie als das Wichtigste, wonach der Mensch streben müsse, denn von ihrer Vervollkommnung hängt das wahre Glück der menschlichen Gesellschaft ab. Dieser Gedanke beseelte ihn, den Meister in dieser Kunst, sein ganzes Leben hindurch. Unter seinen Papieren befinden sich mehrere Entwürfe mit den Aufschriften: Clavis mathematica arcana, Inventorium mathematicum, Thesaurus mathematicus, worin er die mathematischen Wissenschaften auf solche Weise zu behandeln beabsichtigte. Leibniz hat in den Jahren der rüstigsten Kraft daran gearbeitet, namentlich nachdem er die Principien der höheren Analysis gefunden; sie verdienen hier eine Stelle, um Leibnizens Thätigkeit auf dem Gebiet der Mathematik vollständig

kennen zu lernen. Von diesen Entwürfen sind die einen für Anfänger geschrieben, die in die Wissenschaft einzudringen wünschen; andere für die, welche die Mathematik wissenschaftlich fördern wollen. Die Bruchstücke, die unter num. I. bis VI. mitgetheilt werden, geben ein Bild, wie Leibniz den hier besprochenen Gedanken zu verwirklichen gedachte.

Was nun zunächst die Arithmetik und Algebra betrifft, so waren Leibnizens erste wissenschaftliche Studien besonders diesen Gebieten zugewandt. Von seiner Jugendschrift, der Dissertatio de Arte Combinatoria, ist bereits die Rede gewesen. Ferner geht aus den Anfängen seiner Correspondenzen mit Oldenburg und mit Hugens hervor, dass er sich in der ersten Zeit seines Pariser Aufenthalts mit der Summation von Zahlreihen mittelst der Differenzen und mit der Theorie der algebraischen Gleichungen beschäftigte. Nur das Wenigste davon hat er selbst veröffentlicht, bei weitem das Meiste liegt in seinen hinterlassenen Papieren, zum Theil unvollendet und zum Druck nicht geeignet, vergraben. Auch die Eigenschaften der Zahlen entgingen seiner Aufmerksamkeit nicht; eine Notiz darüber ist aus einem Briefe Leibnizens an den Herausgeber des Journal des Savans 1678 bekannt gemacht worden. Von den dieses Gebiet betreffenden Untersuchungen, die in seinem Nachlass vorhanden sind, mögen nur die folgenden hier eine Stelle finden: De primitivis et divisoribus ex tabula combinatoria; Exercitium ad promovendam scientiam numerorum; Invenire triangulum rectangulum, cujus area sit quadratus.

Mit diesen arithmetischen Untersuchungen gingen algebraische Studien Hand in Hand. Bombelli's Algebra diente anfangs als Führer; aber seinem Grundsatz getreu, mit dem Erlernen einer Wissenschaft zugleich auch ihre Erweiterung anzustreben, gelang es Leibniz zuerst in der Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst der Cardanischen Formel den sogenannten casus irreducibilis zu beseitigen.*) Besonders aber warf er sich mit der ganzen Kraft jugendlicher Energie auf das berüchtigte Problem, die allgemeine Auflösung der Gleichungen zu finden. Die ersten Versuche dazu

*) Siehe die Correspondenz mit Hugens Bd. II. S. 11 ff. — Die diesen Gegenstand betreffende, bisher unedirte Abhandlung Leibnizens ist in diesem Bande abgedruckt.

geschahen bereits um die Zeit, als Leibniz und Tschirnhaus zu Paris gemeinsam arbeiteten. Sie führten nicht zum Ziele, da sie im Wesentlichen darin bestanden, die auf die höchste Potenz folgenden Potenzen der Unbekannten aus der Gleichung wegzuschaffen. Dass es unmöglich sei, auf diesem Wege das Problem zu lösen, erkannte Leibniz sehr bald, und er tadelte Tschirnhaus, als dieser seine ebenfalls darauf basirte Methode in den Actis Eruditorum 1683 veröffentlichte. *) Da die Schwierigkeiten hauptsächlich darin bestanden, dass die für die Coefficienten erhaltenen Ausdrücke in Betreff ihrer Entstehung und Zusammensetzung sich schwer übersehen liessen und vorhandene Rechnungsfehler nur mit Mühe aufgefunden werden konnten, so meinte Leibniz in dieser Hinsicht Abhülfe zu schaffen, wenn er eine andere Bezeichnung der Coefficienten als die übliche durch Buchstaben einführte. Er drückte deshalb die Coefficienten durch fingirte Zahlen aus, so dass z. B. in den Gleichungen

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

von den fingirten Zahlen 10, 11, 12, 20, 21, 22, 30, 31, 32 jede Ziffer rechts anzeigte, zu welcher der Unbekannten sie gehöre, und jede Ziffer links, in welcher Gleichung, ob in der ersten, zweiten, dritten sie ursprünglich vorkomme. Dadurch wurde es Leibniz zunächst möglich, einen Canon für die Elimination der Unbekannten aus Gleichungen, die den ersten Grad nicht übersteigen, aufzustellen, welchen er sofort auf zwei Gleichungen von höheren Graden, die nur eine Unbekannte enthalten, ausdehnte. Er selbst spricht sich darüber auf einem Zettel, der vielleicht unmittelbar nach der Entdeckung geschrieben ist, folgendermassen aus:

Inveni Canonem pro tollendis incognitis quotcunque aequationes non nisi simplici gradu ingredientibus, ponendo aequationum numerum excedere unitate numerum incognitarum. Id ita habet.

Fiant omnes combinationes possibiles literarum coefficientium, ita ut nunquam concurrant plures coefficientes ejusdem incognitae et ejusdem aequationis. Hae combinationes affectae signis,

---

*) Siehe die Correspondenz mit Tschirnhaus Bd. IV.

ut mox sequetur, componantur simul, compositumque aequatum nihilo dabit aequationem omnibus incognitis carentem.

Lex signorum haec est. Uni ex combinationibus assignetur signum pro arbitrio, et caeterae combinationes quae ab hac differunt coefficientibus duabus, quatuor, sex etc., habebunt signum oppositum ipsius signo; quae vero ab hac differunt coefficientibus tribus, quinque, septem etc., habebunt signum idem cum ipsius signo.

Ex. gr. sit $10+11x+12y=0$, $20+21x+22y=0$, $30+31x+32y=0$, fiet

$$\left.\begin{array}{l} +10.21.32 \\ -10.22.31 \\ -11.20.32 \\ +11.22.30 \\ +12.20.31 \\ -12.21.30 \end{array}\right\} = 0$$

Coefficientibus eas literas computo, quae sunt nullius incognitarum, ut 10, 20, 30.

Ope hujus Canonis inveniri poterit alius Canon pro tollenda communi incognita ex duabus aequationibus gradus cujuscunque. Sunto aequationes binae ejusdem gradus: $10+11x+12xx+13x^3+14x^4=0$, et $20+21x+22xx+23x^3+24x^4=0$. Multiplicetur unaquaeque per formulam assumtitiam uno gradu inferiorem, producta ambo componantur in unam aequationem, cujus quilibet terminus sit aequalis nihilo, habemus tot aequationes quot incognitas assumtitias, quae sunt formularum assumtitiarum coefficientes, et unam aequationem praeterea; incognitae autem assumtitiae in simplice gradu consistunt. Itaque canon superior applicari potest. Quodsi duae aequationes literam communem tollendam habentes non sint ejusdem gradus, coefficientes graduum superiorum in aequatione inferiore erunt aequales nihilo.

Veniamus ad exemplum:

$10+11x+12xx=0$ multiplicetur per $30+31x$

$20+21x+22xx=0$ multiplicetur per $40+41x$,

ubi 12, 22, 31 poni possunt $=1$ et $41=-1$. Compositum ex duobus productis erit:

$$\left.\begin{array}{llll} 10.30 & +11.30x & +12.30xx & \\ & 10.31.. & 11.31.. & +12.31x^3 \\ 20.40 & +21.40.. & +22.40.. & \\ & 20.41.. & 21.41.. & +22.41.. \end{array}\right\} = 0$$

ubi ut destruatur x, fient aequationes tres:

$$10.30+20.40=0,\quad \left.\begin{array}{l} 11.30+10.31 \\ 21.40+20.41 \end{array}\right\}=0,\quad \left.\begin{array}{l} 12.30+11.31 \\ 22.40+21.41 \end{array}\right\}=0$$

nam quarta $12.31 + 22.41 = 0$ per se patet, posito $12, 31, 22 = 1$, et $.41 = -1$. Harum trium aequationum ope tolli possunt incognitae assumtitiae 30 et 40;

coefficientes ipsius 30 sunt 10, 11, 12
40 sunt 20, 21, 22

neutrius nempe ipsius 1
coefficientes sunt 0, 10—20, 11—21
seu compendio 0, 51, 52

Habemus combinationes cum suis signis debitis et ex iis aequationem incognitis assumtitiis pariter ac litera x carentem

$$\left.\begin{array}{l} +10.21.52 - 10.22.51 \\ -11.20.52 + 12.20.51 \end{array}\right\} = 0, \quad \begin{array}{l} \text{ubi } 12 \text{ et } 22 = 1, \text{ et } 51 = 10 - 20, \\ \text{et } 52 = 11 - 21. \end{array}$$

Unde fiet

$$\left.\begin{array}{l} +10.11.21 - 10.10.22 \\ -10.21.21 + 10.20.22 \\ -11.11.20 + 10.12.20 \\ +11.20.21 - 12.20.20 \end{array}\right\} = 0$$

Von dieser Coefficientenbezeichnung, die zuerst in einem Manuscript aus dem Jahre 1678 vorkommt*), so wie von der dadurch

---

*) Unter den Leibnizischen Manuscripten findet sich das folgende, datirt: Junii 1678, mit der Aufschrift: Specimen Analyseos novae, qua errores vitantur, animus quasi manu ducitur et facile progressiones inveniuntur.

Pro literis numeros adhibeo, quoniam ita perpetuo singulis ut ita dicam passibus promotis instituere possum examen per abjectionem novenarii vel etiam summationem. Examen per novenarium sufficit adhiberi continuo, examen autem exactius per summationem satis est singulis stationibus adhiberi. Praeterea adhibitis numeris in proclivi mihi est inter ipsas quantitates sive characteres ordines atque relationes varios exacte exprimere, ita ut statim primo adspectu in progressu appareat, quaenam litera cognita ad quam incognitam pertinuerit aut quam ejus potentiam affecerit, quod in numeris exactissime assequi licet, in literis non item. Haec observatio omnium, quae de calculo fieri possunt, maximi momenti est: ita facile et velut sponte sua se detegunt praeclara theoremata et progressiones, ita ut pleraque sine calculo scribi possint, initiis tantum praelibatis. Sane si quis in exemplo praesenti, datis quatuor literis totidemque aequationibus simplicibus plenis, valorem unius ex ipsis quaerat et literas indistincte

gewöhnenen bemerkenswerthen Entdeckung hat Leibniz in seinen Untersuchungen, besonders in der Behandlung von Problemen aus der höheren Analysis den ausgedehntesten Gebrauch gemacht; die mathematischen Manuscripte aus der spätern Zeit seines Lebens zeigen zahlreiche Spuren davon. Er selbst hat ausser der ziemlich kurzen Notiz am Schlusse seiner Vertheidigung gegen Fatio's Angriffe nichts darüber veröffentlicht; dagegen hat er in seinen Correspondenzen nicht selten darauf hingewiesen und zu ihrer Vervollkommnung, die ihm ganz besonders am Herzen lag, aufgefordert, vielleicht am ausführlichsten in seinen Briefen an den Marquis de l'Hospital (Bd. II. S. 238 ff.)

Es ist bereits an einem andern Orte darauf aufmerksam gemacht worden, dass wegen des Obigen Leibniz berechtigt ist, auf die erste Entdeckung der in neuester Zeit so wichtig gewordenen Lehre von den Determinanten Anspruch zu machen. Er hat ferner zuerst die Regel gefunden, die um die Mitte der vorigen Jahrhunderts von Cramer bekannt gemacht wurde und nach ihm benannt wird; desgleichen hat er zuerst für einzelne Fälle das Eliminationsverfahren zur Anwendung gebracht, das um ein Jahrhundert später Bezout als ein allgemeines aufstellte. —

Durch eben jene Coefficientenbezeichnung wurde Leibniz höchst wahrscheinlich darauf geführt, dass jede ganze Zahl durch zwei Zahlzeichen ausgedrückt werden könnte; es wäre demnach seine Dyadik lediglich als ein Corollarium jenes Verfahrens zu betrachten.

---

ut solent assumat a, b, x, y etc. ut lubet, confusionem experietur horribilem et laborem immensum, cum nostro more res nullo pene negotio peragatur, ut patebit. Artis ergo characteristicae haec summa regula est, ut characteres omnia exprimant quae in re designata latent, quod numeris ob eorum copiam et calculandi facilitatem optime fiet. Item et in Geometria magni usus est ad situs exprimendos.

I.

PRAEFATIO CLAVIS MATHEMATICAE ARCANAE.

Quoniam interest generis humani artem inveniendi mathematicam hactenus in arcano habitam aut ignoratam perfici atque inter eruditos vulgarem reddi, ut pluribus hoc organo instructis junctisque multorum operis inventa vitae utilia augeantur, ideo libellum hunc ita scribere constitui, ut solus sufficiat ad scientiam mathematicam a primis Elementis ad intima usque arcana intelligendam, et si occasio detur proprio cujusque studio in immensum provehendam. Scio multos esse mathematicae rei amatores, sed in principiis haerere, quia a nemine recte ducuntur. Horum bonae voluntati succurrendum existimavi. Itaque ita scripsi, ut semper videant discentes rationem eorum quae discunt, imo ut ipsa etiam inventorum origo appareat, ac ut perinde omnia intelligant ac si omnia per se invenissent ipsi. Diligentia atque animi attentione opus esse quisque facile judicabit, jucundius tamen aut brevius ista hactenus tractata esse non puto. Nihil enim affero, quin usum quoque ejus monstrem, quod maxime illi desiderant, qui vitae potius quam scholae discunt. Memoria quoque nulla ratione magis juvatur, quam si quis rationes praeceptorum teneat: ita enim quae memoria elapsa sunt, facile meditando eruuntur.

Porro ingentes esse utilitates disciplinarum mathematicarum experimento publico constat; sciunt enim omnes, quanti sit rerum pretia numeris aestimare, agros ac solida liquidaque metiri, tempora et astrorum cursus cognoscere instrumentis, locum ubi agas in longinquis navigationibus et medio mari vel abditis terrae cavernis indi-

care posse, firmas commodasque substructiones moliri quibus ab aëris hominumque injuriis defendamur, certis quibusdam instrumentis in sentiendo juvari et in agendo dirigi, vires denique nostras machinis in immensum augere. Magna haec sunt, sed majora supersunt, in quibus humano generi mathematica scientia prodesse posset, si satis sciremus Dei beneficiis uti. Usus autem illi etsi nondum experimento sint comprobati, satis tamen agnoscentur ab his qui mecum cogitabunt, physicam nihil aliud esse quam Geometriam materiae applicatam, et posse a nobis tot experimenta sumi circa naturam, imo jam in promtu esse, ut credam sufficientia jam data haberi ad corporum multorum texturas interiores cognoscendas maximo generis humani bono, si sanitatis nostrae curam gerere vellemus, et si geometrae exhaustis artis suae praeceptis jam serio in natura explicanda laborarent, tandemque tot praeclaris experimentis in unum congestis uterentur. Quod nisi faciunt, peribit nobis laborum nostrorum fructus, quos post multa secula vix denique percipiet posteritas.

Haec cum mecum cogitarem attentius, observavi in geometriae applicatione ad naturam aut mechanicam occurrere plerumque problemata longe diversa ab his quae vulgo considerant geometrae, planeque per algebram intractabilia. Unde non nisi maximos geometras in hoc genere specimina alicujus momenti dedisse videbam, caeteris velut a limine repulsis. Agnito ergo algebrae defectu, cogitavi de vera Analysi Mathematica, sive via certa ac determinata, per quam semper ad propositum pervenire possemus. Hanc tandem assecutus mihi videor, quae algebram hodie receptam infinitis transcendit modis; docet enim solvere problemata, quae neque plana neque solida aut supersolida sunt, sed proprie nullius certi sunt gradus, proinde a me transcendentia appellantur, qualia sunt potissima atque utilissima quaeque. Quare qui algebram quidvis praestare posse putat, aut inconsiderate loquitur aut problemata majoris momenti tractare non est expertus.

Hanc ergo artem in Mathematicis inveniendi generalem publicare constitui boni publici amore; gloriae enim fortasse meae magis velificarer, si speciminibus editis methodum supprimerem. Sed supersunt mihi longe majora, et generis humani interest, ut geometrae, quod supra dixi, exhaustis artis suae praeceptis, jam serio cogitent de applicatione ejus ad naturam, ubi si methodum a me hic praescriptam et exemplis illustratam sequentur, non dubito quin

detecturi sint non pauca quae nunc ingenio humano impenetrabilia habentur. Tempus credo veniet, nec opinor longe abest, et hoc libello meo fortasse accelerabitur, quo omnis mathematica doctrina non minus vulgata erit inter eruditos, quam nunc arithmetica communis est inter plebejos, nec amplius de geometria (nisi exercendi tironum ingenii causa) sed de usu ejus laborabitur. Unum tamen nondum tradam, quod nec perfecte possem, artem scilicet inveniendi brevissimas atque optimas vias, quanquam et in eo genere non pauca praestiterim et videam progrediendi rationem. Sed nunc quidem contenti sumus habere vias certas ac determinatas propositum assequendi, quod tutius imo et brevius est quam fatigare animum et temere divagari velle, ut casu in meliora incidamus.

Methodum in tradendo hanc sequar. Primum exponam genesin numerorum et characteres, quibus exprimuntur. Deinde explicabo Logisticam seu modum calculandi, id est addendi, subtrahendi, multiplicandi, dividendi et radices extrahendi, idque tum in numeris indeterminate et generaliter sumtis, tum in numeris determinatis per characteres suos expressis, quod vulgo vocant Algorithmum, ubi tradetur et expressio per decimales et tabulae variae numerorum, quibus calculus sublevatur, inter quas est tabula logarithmorum. Inde explicabo Algebram, id est modum inveniendi valores incognitorum numerorum literis expressorum, sive modum logisticae praeceptis ita utendi, ut primum nanciscamur aequationem, quae exprimat relationem inter incognitam et cognitas, deinde ut extrahamus radices ex aequationibus tum exacte tum per appropinquationem in infinitum continuatam seu seriem infinitam idque tum in literis tum in numeris. Algebram sequitur Arithmetica Diophantea, ubi id quod quaeritur non est satis determinatum, sed pro nostro arbitrio porro determinandum, ea tamen arte ut conditiones quas pro arbitrio assumimus aptae sint ad quaestionem reddendam faciliorem. Hanc scientiam quae hactenus in potestate Analytici non fuit, tandem absolvi. Subjiciam specimen Tabularum Analyticarum mirificarum, quibus calculus literalis magis contrahetur, quam calculus numerorum per logarithmos. His tabulis absolutis omnis calculus literalis imposterum ludus jocusque erit. Sequitur Analysis transcendentium seu eorum quae ab aequatione certi gradus non pendent, eaque duplex, una summarum et differentiarum in seriebus, altera exponentium in potestatibus.

Hactenus magnitudines in universum tractavimus velut Nume-

ros, nulla situs ac figurae ratione habita. Nunc ergo agemus de Geometriae Elementis, nempe de situ, de angulo, de natura rectae, circuli aliarumque figurarum quarum generationes et potissimas potestates ita explicabimus, ut caeteras quae per calculum ex his facile ducuntur non attingamus. Inde jungendo calculum cum geometria ostendemus primum, quomodo ea quae per geometriam et ductum linearum sive per motum determinata habentur, exprimi possint per calculum; deinde vicissim quomodo ea quae calculo determinata sunt, construi possint per ductum linearum. Sequitur Geometria transcendentium, nempe de quadraturis figurarum, quo refero dimensiones curvarum et superficierum et inventiones centrorum gravitatis; item de methodo tangentium inversa, quae Geometriae fastigium est. Atque ita absoluta est pars mathematicae doctrinae pura; subjicienda est mixta, quae nihil aliud continet, quam methodum problemata concreta revocandi ad abstracta ejusque exempla, ex quibus simplicissima sunt quae exhibet Optica. Hanc sequitur Mechanica, inde Musica, post Astronomia et Geographia ac Navigandi ars, et Architectonica, et Scientia militaris. Et omnino post Opticam et Mechanicam et Musicam et Astronomiam caetera tractanda eo ordine, quem postulat usus eorum in vita, ut appareat origo inventionis; ea enim cognita mirifice et acuitur ingenium et memoria sublevatur. *)

---

*) Ein der Clavis mathematica arcana ähnliches Werk gedachte Leibniz unter dem Titel: Thesaurus mathematicus, zu verfassen. Ueber den Inhalt desselben äussert er sich folgendermassen: Consilium operis: efficere ut lector attentus sine praeceptore, sine aliis libris proprio marte jucunde et facile non discere tantum pulcherrima atque utilissima mathematicorum inventa paucis comprehensa possit, sed etiam rationes veras atque inventionum origines teneat sciatque, qua ratione non haec tantum ipse si quando forte oblitus sit sibimet reperire denuo regularumque discendarum labore carere, sed et infinita alia ubi opus erit invenire oblataque problemata licet a nemine tractata quantum ad usum sufficit accurate solvere possit.

II.

INVENTORIUM MATHEMATICUM.

Praefatio. *)

Cum usu deprehenderim, agnoscantque nunc primarii geometrae, receptam analysin ad problemata difficiliora non sufficere qualia quotidie occurrunt geometriam ad mechanicen caeterasque artes vitae utiles applicantibus, et mihi ad universalia respicienti quaedam inveniendi artificia obtigerint quae superioris cujusdam scientiae corollaria tantum esse video: specimina haec in publicum exire volui, tum ut excitentur praestantiora ingenia, aperto aditu novo, tum ut illi ab errore liberentur qui cum facilia tantum experti sint proprio marte, putant tamen quidvis analysi sua praestari posse, magno detrimento juventutis, quae vana scientiae opinione inflata remittit a diligentia et progrediendi conatum deponit, cum tamen pulcherrima atque utilissima geometria, qua tum maxime indigemus cum lineas calculumque ad naturae arcana artiumque desiderata applicamus, prope intacta supersit.

Sciendum est autem, problemata difficiliora pleraque aut non omnino aut non nisi singulari artificio ad aequationes reduci posse, quales vulgo quaerunt: multa enim desinunt in aliud quoddam aequationum genus, quas vocare soleo transcendentes, quia non sunt certi gradus, sed vel graduum simul omnium, vel gradus ut ita dicam infiniti, quare problemata quae ab his pendent neque plana neque solida sunt neque suprasolida modo definito, possunt tamen solvi per calculum non minus quam per constructiones lineares. Sed lineae in geometriam recipiendae sunt novae, geometricae quidem, hacte-

---

*) Leibniz hat später hinzugefügt: Praefatio ad provectos. De his quae nova praestitimus. Alia addenda praefatio ad discentes, addendum optare me, ut imposterum de mathematicis abstractis arcana possimus deponere, accedentes ad naturam. — Am Rande des Manuscripts hat Leibniz zur Erklärung der Aufschrift bemerkt: Methodus Mathematica Nova, qua quisque instructus harum scientiarum arcana facile intelligere et per se invenire potest.

nus tamen pro mechanicis habitae etiam a novissimis autoribus, sunt enim transcendentes et analyticam quidem relationem habent omnium punctorum habitudinem perfecte exprimentem, sed quae per naturam rerum non est definiti gradus, possunt tamen describi exacte sine ulla transmutatione curvi in rectum, motu non minus continuo et ab uno principio pendente quam quo conchoides circuli aut parabola describitur, quanquam hic describendi modus non sit notus. Has ergo a geometria excludere nihil aliud est quam modum sibi adimere solvendi maxima atque utilissima problemata, quae demonstratum est aliter solvi non posse.

Unde intelligi potest, incipi a nobis, ubi Vieta et Cartesius desinunt, proportione incrementi longe majoris quam quo ipsi Apollonium ac Diophantum supergressi sunt, et quemadmodum illi problemata altiorum graduum quae plana solidaque excedunt, numeris lineisque tractare docuerunt, ita nos geometriam aequationes ipsorum transcendentem docentes, campum inveniendi aperimus longe immensiorem. Problemata enim quae aequationibus sive planis sive solidis sive utcunque suprasolidis continentur, omnia si recte inspicias tantum rectilinea sunt (etsi curvarum intersectione solvantur) et variis inter datas quaesitasque rectas rationum compositionibus tantum constant; sed cum curvilineae magnitudines calculum ingrediuntur, aut problemata ejus sunt naturae, ut non rationum certa compositione potentiarumve certi gradus aequalitate sed aliis quibusdam habitudinibus quales sunt innumerae determinentur, verbi gratia per angulos aut exponentes incognitos, per tangentium proprietates, per maxima et minima serierum exploratarum, tum vero non potest inveniri ultima quaedam aequatio certi gradus quales vulgo quaerunt, cujus radicibus per numeros lineasve exhibitis problema solvatur, sed aequationibus lineisque transcendentibus opus esse certum est. Itaque ut rem omnem paucis complectar, Veteres geometriam planam ac solidam tantum tradidere, persuasi alias solutiones tantum mechanicas esse; recentiores vero deprehenso eorum errore suprasolidam quidem, sed certi gradus cujuscunque tantum adeoque non nisi rectilineam adjecere, obstruxere vero ipsi sibi progrediendi viam, dum simili plane errore quae hanc legem ab ipsis latam subire non poterant, velut mechanica rejecerunt, cum tamen contemplationes effectionesque haberent pulcherrimas utilissimasque et analytice exprimi possint per aequationes de gradu in gradum transeuntes. Sic ergo haec nobis relicta est provincia vacua, ut geometriam

curvilinea metientem et analysin transcendentem eique propria Loca sive lineas effectioni problematum necessarias supplentes, fastigium quoddam scientiae imponeremus. Quae qui cum vulgata hodie methodo contulerit, intelliget neque difficultatis neque amplissimi usus comparationem fieri posse.

Nam quod ad difficultatem attinet, equidem hujus calculi quem Vieta introduxit, et constructionum quas Cartesius adhibuit, apud Veteres multa satis vestigia habentur, ut tantum quae ipsi Veteres inconsulte coërcuerant arctis nimis limitibus paucorum graduum, simili plane ratione ad caeteros producerentur symbolisque enuntiarentur commodis; sed nostri calculi apud Veteres ne vestigium est quidem, ac ne problemata quidem talia apud illos quaeri solita sunt, exceptis tantum paucis quae cognita videntur uni Archimedi, qui tamen suas artes adeo callide texit, ut nemo Veterum eas suspicione assecutus sit, unde nec quisquam Veterum quicquam praestitit in Geometria Archimedea. Recentiores eam ex latebris eruere, excellentes viri Galilaeus, Cavalerius, P. Gregorius, Guldinus, Fermatius, sed summam rei non sunt assecuti. Et vero totum hoc quo Archimedes usus videtur, transcendentis analyseos pars tantum exigua est, unde ad reliqua aditus non patet. Vietam et Cartesium potuisse arbitror aliquid magni praestare, etiam in hoc genere, sed ille nimia modestia (dum quadam antiquitatis reverentia etiam quae potest, se posse non putat solutionesque plane geometricas pro mechanicis habet), hic nimia ingenii sane maximi fiducia (dum ad quae aditum ex calculo suo primo obtutu non videbat, ea pro impossibilibus damnat et ad mechanica relegat) sibi obstitere. Sed in universum dici potest, talem esse calculum nostrum transcendentem, ut non unquam facile in mentem venire possit. Et quamvis profitear excellentissimorum Geometrarum, Hugenii, Huddenii, Heuratii, Pascalis, Slusii, Wrenni, Wallisii, Barrovii, Gregorii, Mercatoris, Neutoni, ingeniosissimis inventis me mirifice adjutum esse, agnoscent tamen opinor hi quoque qui ex illis hodieque superant pro candore suo, praestita esse a me quae fieri posse ipsi fortasse nec expectabant.

Usum vero geometriae hujus novae liber hic satis ostendet: illud tantum hoc loco monere satis erit, eum infinities ejus geometriae usum superare quam supplevit Veteribusque adjecit Vieta vel Cartesius, nam in Opticis, in Astronomia, in Mechanicis et in universum in mathesi quae cum physica concrevit, raro occurret pro-

blema utile ad aequationem receptam revocabile, quod ascendat ad suprasolida sive quod per geometriam planam vel conicam solvi non possit aut constructionibus a Cartesio primum introductis indigeat, cum tamen in iisdem scientiis perpetuo incurremus in quaestiones quae ad aequationes receptas reduci non possint, et si quis eas analytice tractare velit, huic analysi transcendente opus erit, nam hactenus egregii viri qui aliquid in hoc genere praestitere, fere ingenii potius sagacitate atque harum rerum usu quam methodo atque analysi quam aliis communicare potuissent sibi viam fecere. Imposterum autem nihil esse arbitror pure mathematicum, quod hac nostra methodo transcendente recte intellecta superari non possit, hoc uno excepto, quod artem inveniendi vias brevissimas, tametsi aditum ad eam videam, nondum in promtu habeam, et nisi mihi aut me felicioribus otium ei rei necessarium suppetat, absolvendam relinquo posteritati.

Caeterum una superest methodus sublimior, qua naturae artisque, quin imo et Metaphysicae et Vitae civilis problemata ad terminos quasi pure mathematicos reduci possint calculoque subjici in tantum certo, in quantum ex datis ingenio humano fieri potest; sed haec pertinent ad Artem inventoriam generalem nondum cuidam scriptorum quantum judico agnitam, et plane diversam ab omni eo quod hi quos legere aut cum quibus conferre memini, sibi figurant aut suspicantur. De quo hoc unum nunc dicere satis erit, habere me demonstrationem ejus, viamque videre infallibilem atque ita designatam, ut in ea persequenda exerrare aliquis non possit certoque sit voto potiturus, sed labore complanandum esse iter temporisque compendium esse quaerendum, conspiratione aliquot virorum huic rei aptorum. Cujus artis Elementis utcunque traditis non dubitem intra viginta annos majora ad humanae vitae usum praestari etiam in scientiis, quae maxime conjecturales sed tanto magis necessariae sunt, quam sueto ratiocinandi atque experimenta instituendi modo, aliquot secula, ne dicam annorum millenarii dabant. Nunc enim jam inopia, jam copia experimentorum atque ratiocinationum laboramus, et uti divitiis nostris non possumus nescimusque saepe, quid possideamus, similes illis qui ingentem apparatum habent, inventarium vero nullum, aut qui semper materiam colligunt, nunquam aliquid exstruunt. Quin etiam saepe cum possemus ex datis aut facile parabilibus experimentis magna quaedam et utilia colligere, si vel artem experimenta recto consilio instituendi teneremus vel si

empiricae industriae scientiam analyticam adjiceremus, contenti tamen sumus vel incertas hypotheses comminisci vel ex observationibus conclusiones ducere aliunde jam notas et per se demonstrabiles deplorabili temporis sumtuumque jactura. Quare si sic pergimus, serae tantum posteritati laboramus, cum possemus, si saperemus quidem, ipsi laborum nostrorum percipere fructus. Atque haec quidem illis consideranda commendo, qui altiore genio res agitant, veroque affectu publica bona prosequuntur; an autem fides aliqua tribuenda sit sive votis sive propositionibus meis, his qui libellum hunc intelligent, judicandum relinquo, hoc unum nunc adjicere contentus, duas inventoriae artis partes esse, analyticam et combinatoriam, instrumentum autem inventionis humanae generale esse characteres aptos, quod satis Arithmeticae et Algebrae et Geometriae ipsius exemplo patet: mens enim filo quasi quodam sensibili regenda est, ne vagetur in labyrintho et cum multa simul complecti distincte nequeat, adhibitis signis pro rebus, imaginationi parcit: multum tamen interest, quomodo signa adhibeantur ut res utiliter referrant; et jam nunc profiteor, hoc, quicquid est quod inventioni mathematicae adjeci, ex hoc uno natum esse, quod usum symbolorum quantitates repraesentantium reddidi meliorem.

III.

INITIA RERUM MATHEMATICARUM METAPHYSICA.

Cum insignis Mathematicus Christianus Wolfius nuper in Cursu suo Mathematico Latino meditationes quasdam meas circa Analysin Axiomatum et circa naturam similitudinis attigerit et pro more suo illustrarit (vid. Act. Erudit A. 1714), visum est nonnulla huc spectantia, dudum a me animo concepta, ne intercidant proferre, ex quibus intelligi potest, esse artem quandam Analyticam Mathematica ampliorem, ex qua Mathematica scientia pulcherrimas quasque suas Methodos mutuatur. Paulo ergo altius ordiri placet:

Si plures ponantur existere rerum status, nihil oppositum involventes, dicentur existere **simul**. Itaque quae anno praeterito et praesente facta sunt negamus esse simul, involvunt enim oppositos ejusdem rei status.

Si eorum quae non sunt simul unum rationem alterius involvat, illud **prius**, hoc **posterius** habetur. Status meus prior rationem involvit, ut posterior existat. Et cum status meus prior, ob omnium rerum connexionem, etiam statum aliarum rerum priorem involvat, hinc status meus prior etiam rationem involvit status posterioris aliarum rerum atque adeo et aliarum rerum statu est prior. Et ideo quicquid existit alteri existenti aut simul est aut prius aut posterius.

Tempus est ordo existendi eorum quae non sunt simul. Atque adeo est ordo mutationum generalis, ubi mutationum species non spectatur.

Duratio est temporis magnitudo. Si temporis magnitudo aequabiliter continue minuatur, tempus abit in Momentum, cujus magnitudo nulla est.

Spatium est ordo coexistendi seu ordo existendi inter ea quae sunt simul.

Secundum utrumque ordinem (temporis vel spatii) **propiora sibi aut remotiora** censentur, prout ad ordinem inter ipsa intelligendi plura paucioraque correquiruntur. Hinc duo puncta propiora sunt, quorum interposita ex ipsis maxime determinata dant aliquid simplicius. Tale interpositum maxime determinatum, est via ab uno ad aliud simplicissima, minima simul et maxime aequabilis, nempe recta, quae minor interjecta est inter puncta propiora.

Extensio est spatii magnitudo. Male Extensionem vulgo ipsi extenso confundunt, et instar substantiae considerant.

Si spatii magnitudo aequabiliter continue minuatur, abit in punctum cujus magnitudo nulla est.

Situs est coexistentiae modus. Itaque non tantum quantitatem, sed et qualitatem involvit.

Quantitas seu Magnitudo est, quod in rebus sola compraesentia (seu perceptione simultanea) cognosci potest. Sic non potest cognosci, quid sit pes, quid ulna, nisi actu habeamus aliquid tanquam mensuram, quod deinde aliis applicari possit. Neque adeo pes ulla definitione satis explicari pot-

est, nempe quae non rursus aliquid tale involvat. Nam etsi pedem dicamus esse duodecim pollicum, eadem est de pollice quaestio, nec majorem inde lucem acquirimus, nec dici potest, pollicis an pedis notio sit natura prior, cum in arbitrio existat utrum pro basi sumere velimus.

Qualitas autem est, quod in rebus cognosci potest cum singulatim observantur, neque opus est compraesentia. Talia sunt attributa quae explicantur definitione aut per varias modificationes quas involvunt.

Aequalia sunt ejusdem quantitatis.

Similia sunt ejusdem qualitatis. Hinc si duo similia sunt diversa, non nisi per compraesentiam distingui possunt.

Hinc patet exempli causa, duo Triangula aequiangula habere latera proportionalia vel vicissim. Nam sint latera proportionalia, similia utique sunt triangula, cum simili modo determinentur. Porro in omni triangulo summa angulorum est eadem, cum aequetur duobus rectis; ergo necesse est in uno rationem angulorum respondentium ad summam esse quae in altero; alioqui unum triangulum ab alio eo ipso distingui posset, ex se scilicet seu singulatim spectatum. Ita facile demonstratur quod alias per multos ambages.

Homogenea sunt quibus dari possunt aequalia similia inter se. Sunto A et B, et possit sumi L aequale ipsi A, et M aequale ipsi B sic ut L et M sint similia, tunc A et B appellabuntur Homogenea.

Hinc etiam dicere soleo, Homogenea esse quae per transformationem sibi reddi possunt similia, ut curva rectae. Nempe si A transformetur in aequale sibi L, potest fieri simile ipsi B vel ipsi M, in quod transformari ponitur B.

Inesse alicui loco dicimus vel alicujus ingrediens esse, quod aliquo posito, eo ipso immediate poni intelligitur, ita scilicet ut nullis opus sit consequentiis. Sic ubi lineam aliquam finitam ponimus, ejus extrema ponimus ejus partes.

Quod inest homogeneum, Pars appellatur, et cui inest appellatur Totum, seu pars est ingrediens homogeneum.

Terminus communis est, quod duobus inest partem communem non habentibus. Quae quoties intelligantur partes ejusdem Totius, is terminus communis dicetur Sectio totius.

Hinc patet, Terminum non esse homogeneum terminato, nec Sectionem esse homogeneam secto.

2*

Tempus et Momentum, Spatium et Punctum, Terminus et Terminatum, etsi non sint Homogenea, sunt tamen homogona, dum unum in alterum continua mutatione abire potest.

Locum qui alteri loco inesse dicitur, Homogonum intelligimus, quod si ejus sit pars aut parti aequalis, non tantum homogonus sed et homogeneus erit. Angulus etsi ad punctum sit, non tamen est in puncto, alioqui in puncto magnitudo intelligeretur.

Si pars unius sit aequalis alteri toti, illud vocatur Minus, hoc Majus.

Itaque Totum est majus parte. Sit totum A, pars B, dico A esse majus quam B, quia pars ipsius A (nempe B) aequatur toti B. Res etiam Syllogismo exponi potest, cujus Major propositio est definitio, Minor propositio est identica:

Quicquid ipsius A parti aequale est, id ipso A minus est, ex definitione,

B est aequale parti ipsius A, nempe sibi, ex hypothesi,

ergo B est minus ipso A.

Unde videmus demonstrationes ultimum resolvi in duo indemonstrabilia: Definitiones seu ideas, et propositiones primitivas, nempe identicas, qualis haec est B est B, unumquodque sibi ipsi aequale est, aliaeque hujusmodi infinitae.

Motus est mutatio situs.

Movetur, in quo est mutatio situs, et simul ratio mutationis.

Mobile est homogonum extenso, nam et punctum mobile intelligitur.

Via est locus continuus successivus rei mobilis.

Vestigium est locus rei mobilis, quem aliquo momento occupat. Hinc vestigium termini est sectio viae quam terminus describit, cum scilicet mobile per sua vestigia non incedit.

Mobile per sua vestigia incedere dicitur, cum quodvis ejus punctum extra terminum in locum alterius puncti ejusdem mobilis continuo succedit.

Quodsi Mobile sic moveri non ponatur, tunc Linea est via puncti.

Superficies est via Lineae.

Amplum vel Spatium vel ut vulgo solidum est via superficiei.

Magnitudines viarum quibus punctum lineam, linea superficiem, superficies amplum describit, vocantur longitudo, latitudo, profunditas. Vocantur dimensiones, et in Geometria ostenditur non nisi tres dari.

Latitudinem habet, cujus datur sectio extensa, seu quod extenso terminatur.

Profunditatem habet, quod extensum non terminat, seu quod sectio extensi esse non potest, in profundo scilicet est plus aliquid quam quod terminus esse possit.

Linea est ultimum terminans extensum.

Amplum est ultimum Terminatum extensum.

Similitudo vel dissimilitudo in amplo seu spatio cognoscitur ratione terminorum, itaque amplum, cum plus aliquid sit quam quod terminus esse possit, intus ubique simile est. Amplaque quorum omnimodae extremitates coincidunt, congruunt, assimilantur, sunt coincidentia, congruentia, similia. Idem est in plano, quod est superficies intus uniformis vel sibi similis, et in recta, quae est linea intus sibi similis.

Omnimoda extremitas in Extensis latitudinem habentibus Ambitus appellari potest. Sic ambitus circuli est peripheria, ambitus sphaerae est superficies sphaerica.

Punctum (spatii scilicet) est locus simplicissimus, seu locus nullius alterius loci.

Spatium absolutum est locus plenissimus seu locus omnium locorum.

Ex uno puncto nihil prosultat.

Ex duobus punctis prosultat aliquid novi, nempe punctum quodvis sui ad ea situs unicum, horumque omnium locus, id est recta quae per duo puncta proposita transit.

Ex tribus punctis prosultat planum, id est locus omnium punctorum sui ad tria puncta non in eandem rectam cadentia situs unicorum.

Ex quatuor punctis non in idem planum cadentibus prosultat Spatium absolutum. Nam quodvis punctum sui ad quatuor puncta in idem planum non cadentia situs unicum est.

Prosultandi vocabulo utor ad ideam indicandam novam, dum ex quibusdam positis aliquid aliud determinatur eo ipso quod

suae ad ipsa relationis unicum est. Relatio autem hic intelligitur situs.

Tempus in infinitum continuari potest. Cum enim totum tempus sit simile parti, habebit se ad aliud tempus, ut pars se habet ad ipsum, et ita in alio majore tempore continuari intelligitur.

Similiter et spatium solidum seu amplitudo continuari in infinitum potest, quandoquidem ejus pars sumi potest similis toti. Et hinc planum quoque et recta continuantur in infinitum. Eodem modo ostenditur, spatium velut rectam, itemque tempus, et in universum continuum in infinitum subdividi posse. Nam in recta et in tempore pars est similis toti atque adeo in eadem ratione secari potest, qua totum, et licet sint extensa, in quibus pars non est similis toti, possunt tamen transformari in talia, et in eadem ratione secari, in qua ea, in quae transformantur.

Sequitur etiam ex his, quovis motu posse assumi celeriorem et tardiorem in data ratione: radio enim rigido circa centrum acto motus punctorum sunt ut distantiae eorum a centro, itaque celeritates variari possunt ut rectae.

Aestimatio magnitudinum duplex est, imperfecta et perfecta; imperfecta, cum aliquid majus minusve altero dicimus, quamvis non sint homogenea, nec habeant proportionem inter se, quemadmodum si quis diceret, Lineam esse majorem puncto, aut superficiem linea. Et tali modo Euclides dixit, Angulum contactus esse minorem quovis rectilineo, etsi revera nulla inter hos toto genere diversos sit comparatio, quin nec homogenea sunt, nec continua mutatione ab uno in alterum transiri potest. In aestimationibus perfectis inter homogenea obtinet haec regula, ut transeundo continue ab uno extremo ad aliud, transeatur per omnia intermedia; sed non obtinet in imperfectis, quia quod medium dicitur heterogeneum est, itaque transeundo continue ab angulo acuto dato ad angulum rectum non transitur per Angulum semicirculi seu radii ad circumferentiam, etsi is angulo recto minor, et quovis acuto major dicatur, id Majus enim hic sumitur improprie pro eo quod intra alterum cadit.

Plures secundum quantitatem dantur relationes; sic duae rectae possunt eam habere Relationem inter se, ut summa earum aequetur constanti rectae. Et infinita possunt dari paria rectarum

hanc relationem inter se habentia, nempe x et y, ita ut sit $x+y=a$, si verb. gr. a sit ut 10, possunt x et y esse ut 1 et 9, ut 2 et 8, ut 3 et 7, ut 4 et 6, ut 5 et 5, ut 6 et 4, ut 7 et 3, ut 8 et 2, ut 9 et 1. Sed possunt etiam infiniti sumi fracti infra 10, qui satisfaciunt. Sic datur relatio talis inter duas rectas x et y, ut quadrata earum simul sumta aequentur quadrato dato rectae a, ita fiet $xx+yy=aa$: et talium etiam dari possunt paria infinita, et haec est in Circulo relatio sinus complementi ad sinum vel contra, nam uno posito x, alter est y, radius autem est a. Et tales relationes possunt fingi infinitae, tot quot species linearum in plano describi possunt. Veluti si x sint abscissae ex recta directrice, y erunt ordinatae inter se parallelae ad abscissas applicatae, quae terminantur in Linea.

Sed omnium Relationum simplicissima est, quae dicitur **Ratio** vel **Proportio**, eaque est Relatio duarum quantitatum homogenearum, quae ex ipsis solis oritur sine tertio homogeneo assumto. Veluti si sit y ad x ut numerus ad unitatem seu $y=nx$, quo casu x positis abscissis, y ordinatis, locus est recta, locus inquam seu Linea quam ordinatae terminantur. Ex quo etiam patet, si esset aequatio localis cujuscunque gradus velut $lx^3+my^3+nxxy+pxyy=0$, ubi l, m, n, p sint meri numeri, locum ad quem sit aequatio fore rectam et datam esse rationem ipsarum x et y.

Sint datae duae rectae, quae inter se comparentur utcunque. Verb. gr. detrahatur minor ex majore, quoties fieri potest, et residuum rursus ex minore, et ita porro residuum ex illo quod quoties fieri potest est detractum, donec vel sequatur exhaustio, ultimo subtrahendo existente communi Mensura, si quantitates sunt commensurabiles, vel habeatur lex progressionis in infinitum, si sint incommensurabiles. Et eadem erit series numerorum Quotientium, cum eadem est proportio. Nempe si sit a ad b ut

$$l+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}$$ ad unitatem, erit l, m, n, p etc.

series numerorum quotientium. Verb. gr. si a sit 17 et b sit 5, series tantum constabit ex tribus l, m, n, qui numeri erunt 3, 2, 2. Si a et b sint partes rectae extrema et media ratione sectae,

erit a major ad b minorem, ut $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}$

ad unitatem; quotientes erunt unitates, et series eorum ibit in infinitum. Sic a et b quaecunque rectae erunt ad se invicem ut $\frac{l}{1}+\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{p}{8}+\frac{q}{16}+$ etc. ad 1, posito l, m, n, p, q etc. esse 0 vel 1, quae series vel finitur vel periodica est, cum numeri sunt commensurabiles.

Ex his sequitur, lineas similes esse in ratione rectarum Homologarum, superficies similes ut rectarum homologarum quadrata, solida similia ut eorum cubos. Sint duo Extensa similia A et L, et homologa homogenea et B et M. Quia A cum B seu A; B simile est ipsi L cum M seu L; M, erit ratio A ad B eadem, quae L ad M, alioqui ipsum A; L ab ipso B; M aliter quam per compraesentiam distingui posset; prodibunt enim alii numeri rationem exprimentes. Ergo permutando erit A ad L ut B ad M, ut ponebatur. Sic ostendetur circulos esse ut quadrata diametrorum, sphaeras ut cubos diametrorum. Circuli (sphaerae) erunt A et L, quadrata homologa (cubi homologi) B et M.

Ex his manifestum est, **Numerum** in genere integrum, fractum, rationalem, surdum, ordinalium, transcendentem generali notione definiri posse, ut sit id quod homogeneum est Unitati, seu quod se habet ad Unitatem, ut recta ad rectam. Manifestum est etiam, si Ratio a ad b consideretur ut numerus qui sit ad Unitatem, ut recta a ad rectam b, fore Rationem ipsam homogeneam Unitati; Unitatem autem repraesentare Rationem aequalitatis.

Notandum est etiam, totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae animo, quae est Characteristica in universum, et ad Metaphysicam pertinet. Sic productum multiplicatione a + b + c + etc. per l + m + n + etc. nihil aliud est quam summa omnium binionum ex diversi ordinis literis, et productum ex tribus ordinibus invicem ductis, a + b + c + etc. in l + m + n + etc. in s + t + v + etc. fore summam omnium ternionum ex diversi ordinis literis; et ex aliis operationibus aliae prodeunt formae.

Hinc in calculo non tantum lex homogeneorum, sed et justi-

tiae utiliter observatur, ut quae eodem modo se habent in datis vel assumtis, etiam eodem modo se habeant in quaesitis vel provenientibus, et qua commode licet inter operandum eodem modo tractentur; et generaliter judicandum est, datis ordinate procedentibus etiam quaesita procedere ordinate. Hinc etiam sequitur Lex Continuitatis a me primum prolata, qua fit ut lex quiescentium sit quasi species legis in motu existentium, lex aequalium quasi species legis inaequalium, ut lex Curvilineorum est quasi species legis rectilineorum, quod semper locum habet, quoties genus in quasi-speciem oppositam desinit. Et hic pertinet illa ratiocinatio quam Geometrae dudum admirati sunt, qua ex eo quod quid ponitur esse, directe probatur id non esse, vel contra, vel qua quod velut species assumitur, oppositum seu disparatum reperitur. Idque continui privilegium est; Continuitas autem in tempore, extensione, qualitatibus, motibus, omnique naturae transitu reperitur, qui nunquam fit per saltum.

Situs quaedam coexistendi relatio est inter plura, eaque cognoscitur per alia coexistentia, intermedia, id est quae ad priora simpliciorem habent coexistendi relationem.

Coexistere autem cognoscimus non ea tantum quae simul percipiuntur, sed etiam quae successive percipimus, modo ponatur durante transitu a perceptione unius ad perceptionem alterius aut non interiisse prius, aut non natum esse posterius. Ex illa hypothesi sequitur nunc ambo coexistere, cum posterius attigimus; ex hac sequitur ambo extitisse cum prius disereremus.

Est autem in percipiendi transitu quidam ordo, dum ab uno ad aliud per alia transitur. Atque hoc via dici potest. Sed hic ordo cum variari possit infinitis modis, necesse est unum esse simplicissimum, qui scilicet sit secundum ipsam rei naturam procedendo per determinata intermedia, id est per ea quae se habent ad utrumque extremum quam simplicissime. Id enim nisi esset, nullus esset ordo, nulla discernendi ratio in coexistentia rerum, cum a dato ad datum per quodvis iri possit. Atque haec est via minima ab uno ad aliud, cujus magnitudo distantia appellatur.

Haec ut melius intelligantur, nunc quidem abstrahemus animum ab his quae in singulis spectari possunt, de quorum distantia agitur: ita considerabimus ea, tanquam in singulis plura spectanda non essent, seu considerabimus ea tanquam Puncta. Nam

punctum est, in quo nihil aliud ei coexistens ponitur, ita ut quicquid in ipso est, ipsum sit.

Ita via puncti erit linea, quae utique latitudinem non habebit, quia sectio ejus quae in puncto fit longitudinem non habet.

Ex uno puncto dato nihil determinatur praeterea. Sed duobus datis punctis determinatur via ab uno ad aliud simplicissima, quam appellamus Rectam.

(1) Hinc sequitur primo, rectam esse minimam a puncto ad punctum, seu magnitudinem ejus esse punctorum distantiam.

(2) Secundo, rectam esse inter sua extrema aequabilem. Neque enim aliquid assumitur, unde reddi possit ratio varietatis.

(3) Itaque oportet, ut unus locus puncti in ea moti ab altero discerni non possit seposito respectu ad extrema. Hinc et pars rectae recta est, itaque intus ubique sibi similis est, nec duae partes discerni possunt inter se, cum suis extremis discerni non possint.

(4) Sequitur etiam, extremis positis similibus aut congruis aut coincidentibus, ipsas rectas similes, congruas aut coincidentes esse. Extrema autem semper sunt similia. Itaque rectae duae quaevis sunt similes, et pars etiam toti.

(5) Tertio ex definitione sequitur, procedere rectam per puncta suae relationis unica ad duo puncta data, quae ratio est maxime determinata. Oportet autem talia dari, alioqui ex duobus datis nihil resultaret novi determinati. Et si daretur aliud punctum eodem modo se habens ad A et B simul sumta ut propositum, nulla esset ratio cur via illa simplicissima determinata per unum potius quam per aliud procederet. Patet etiam hoc ex praecedente, quia dum ostendimus extremis datis rectam esse determinatam seu extremis coincidentibus coincidere rectas.

(6) Quarto sequitur, rectam in omnes plagas se habere eodem modo nec concavum habere et convexum ut curvam, cum ex duobus punctis assumtis A et B nulla ratio diversitatis reddi possit.

(7) Et proinde, si duo assumantur puncta quaecunque extra rectam L et M quae se eodem modo habeant ad duo puncta rectae collective, seu ita ut L se habeat ad A et B, ut M se habet ad A et B, etiam eodem modo se habebunt ad totam rectam, seu L se habebit ad rectam per A, B, ut M se ad eam habet.

(8) Manifestum etiam est, rectam rigidam seu cujus puncta

non mutant situm inter se, duobus in ea punctis manentibus immotis moveri non posse, alioqui enim plura darentur puncta eodem modo se habentia ad duo puncta immota, nempe tam punctum in quo fuit punctum mobile, quam illud ad quod est translatum.

(9) Sequitur vicissim, alia omnia puncta, quae in rectam per A et B transeuntem non cadunt seu quae ipsis A et B non sunt in directum, mobilia esse situ ad A et B servato, ipsis A et B manentibus immotis, cum recta sit locus omnium punctorum unice se habentium ad A et B; caetera ergo variari possunt et quidem in omnes partes, cum recta eodem modo se habeat in omnes partes.

(10) Itaque si Extensum rigidum moveatur duobus punctis manentibus immotis, omnia puncta ejus quiescentia cadent in rectam per puncta immota transeuntem, quodvis punctum mobile describet circulum circa eandem rectam velut axem.

Datis tribus punctis in eandem Rectam non cadentibus, quod inde determinatur est p l a n u m. Sint puncta A, B, C non cadentia in eandem rectam, ex A, B punctis determinatur recta per A et B, ex C et B punctis determinatur recta per C et B. Ex quovis puncto rectae per A et B, conjuncto cum quovis puncto rectae per C et B, nova determinatur recta, et proinde datis A, B, C, determinantur rectae infinitae quarum locus vocatur p l a n u m.

(1) Itaque p r i m o planum est minimum inter sua extrema. Ambitus enim ejus non constat recta, quia recta spatium non claudit, alioqui pars rectae foret dissimilis toti. Ergo ambitu dato dantur tria puncta in eandem rectam non cadentia, ergo ex solo ambitu dato determinatur planum interceptum. Ergo est minimum.

(2) S e c u n d o planum est aequabile inter sua extrema, quia nulla ratio varietatis ex hac origine ejus deduci potest.

(3) Unde sequitur, planum intus esse sibi simile, ita quod in eo movetur punctum, locum in quo est ab alio loco non distinguit nisi respectu ad extrema. Nec pars plani a parte nisi per extrema discerni potest.

(4) Sequitur et porro, plana quorum ambitus sunt similes aut congrui aut coincidentes, ipsa similia aut congrua aut coincidentia esse.

(5) T e r t i o ex definitione plani patet esse locum omnium punctorum ad tria data puncta unicorum.

(6) Quarto sequitur planum utrinque se habere eodem modo, adeoque nec concavum habere neque convexum.

(7) Atque adeo puncto se habenti utcunque ad A, B, C simul vel ad planum ex his determinatum, respondens aliud punctum dari posse eodem modo se habens ad tria haec puncta simul sumta, cum nulla sit ratio diversitatis.

(8) Planum autem est latitudine praeditum, nam per lineam rectam secari potest, per bina data ejus puncta transeuntem. Itaque sectio ejus longitudinem habet, cujus autem sectio habet longitudinem, id ipsum habet latitudinem.

Datis quatuor punctis in idem planum non cadentibus resultat profundum, seu id in quo sumi potest aliquid quod Terminus non est, seu quod non potest ei esse commune cum altero nisi pro parte in ipsum immerso.

Sunto quatuor puncta A, B, C, D (fig. 1). Hinc dantur sex rectae AB, AC, AD, BC, BD, CD; sed sufficiunt AB, AC, AD, nam tres reliquae ex his nascuntur. Prosultantibus his tribus rectis, prosultant et omnia earum puncta, et rectae conjungentes duo quaevis diversarum rectarum puncta, locusque adeo harum rectarum omnium. Porro habemus et quatuor plana per A, B, C, per A, B, D, per A, C, D, per B, C, D, quorum duo quaevis sectionem habent rectam communem; verb. gr. plana per A, B, C et per B, C, D habent communem sectionem rectam per B, C. Haec quatuor plana claudent spatium quatuor Triangulis planis ABC, ABD, ACD, BCD, quae spatii ambitum facient. Et recta quaevis EF, duo puncta E et F duorum planorum ABC, BCD conjungens, habet omnia puncta ut G intra hoc spatium, ita ut ex puncto G rectae extremis interjecto nulla recta educi possit, quae non in ambitum cadat. Claudunt autem spatium quae ambitum constituunt plenum, nempe talem, ut linea quaecunque ducta in parte ambitus, ubi pervenit ad ejus partis extremum, continuari possit in alia ambitus parte. Ex. gr. recta AL in parte Ambitus ABC ducta, ubi pervenit ad extremum ejus L, continuari non posset in alia ambitus parte, si abesset triangulum BCD, quod cum caeteris tribus ABC, ABD, ACD spatii claudendi opus absolvit. Ponatur illa recta produci quantum opus est ad punctum H, quod magis abeit a puncto G, quam omnia puncta triangulorum ABC, ABD, ACD, BCD. Ex puncto H agantur normales in quatuor plana et itidem ex puncto G, reperietur aliquod ex his planis planum, respectu cujus nor-

males amborum non sint ad easdem partes; aliquod ex his planis debet GK secare in triangulo cujus planum est continuatio; dico rectam GH si opus productam cadere in aliquod ex his planis. Sumatur aliud quodcunque punctum H, ajo rectam GH productam si opus occurrere uni triangulorum quatuor ut ipsi ABD in K, planum per E, F, H secabit plana ABD, ACD, BCD, quae tres rectae constituent triangulum cujus duo latera cadent in duo ex triangulis tribus dictis, et punctum G intra hoc triangulum cadet. Recta ergo quaecunque transiens per G alterutrum ex illis duobus lateribus secabit, ergo et recta GH, ergo recta GH occurrit uni ex triangulis ABD, ACD, BCD in K. Eodem modo ostendetur, et alio extremo occurrere uni ex aliis tribus triangulis. Sed brevius rem ostendemus.

IV.

INITIA MATHEMATICA.

DE QUANTITATE.

Determinantia sunt, quae simul non nisi uni soli competunt, ut duo extrema A, B (fig. 2) non nisi uni competunt rectae.

Coincidentia sunt, quae plane eadem sunt tantumque denominatione differunt, ut via ab A ad B a via a B ad A.

Congrua sunt, quae si diversa sunt, non nisi respectu ad externa discerni possunt, ut quadrata C et D (fig. 3), nempe quod eodem tempore sunt in diverso loco vel situ, vel quod unum C est in materia aurea, alterum D in argentea. Ita congruunt libra auri et libra plumbi; dies hodiernus et hesternus. Punctum quodlibet congruit cuilibet alteri, ut et instans instanti.

Aequalia sunt quae vel congruunt (exempli gratia (fig. 4) triangula EFH, EFG, IKL, LMI, GNE, item rectangula EFGN et

posito AG esse 1, debet esse numerus quo exprimatur quantitas ipsius AF qui dicetur esse $\sqrt{2}$; AB autem erit 2.

Itaque si sit Scala AB divisa in partes aequales duas, quatuor, octo, sedecim etc. atque ita porro subdivisa quantum libuerit, huic scalae utique recta quaelibet ipsa scala minor applicari adeoque numeris explicari potest, et quidem vel exacte, vel propemodum exacte quidem, quando scilicet incipiens ab initio scalae A incidit in aliquod punctum divisionis L, ut AL, cujus proinde numerus in partibus scalae habetur. Ex. gr. AE existente 1, tunc AL erit $\frac{3}{4}$, et tunc recta AL est scalae commensurabilis, id est datur earum mensura communis seu recta AN ($\frac{1}{4}$), quae repetita tam scalam AB quam rectam AL efficit seu metitur. Propemodum vero numeris recta scalae applicata explicari potest, quando non incidit in punctum divisionis, quantumvis scala subdividatur et quocunque modo instituatur divisio. Et talis recta ut AF est cum scala incommensurabilis, adeoque numeris rationalibus sive effabilibus explicari nequit, nisi propemodum. Quoniam tamen necesse est, ut AF scalae applicata seu translata in AP incidat saltem inter duo divisionis puncta, uti certe incidit inter 11 et 12, posito scalam AB in sedecim partes aequales esse divisam, quarum quaelibet est pars octava unitatis vel pedis AE, hinc si AG vel AE latus quadrati sit pes, tunc diagonalis AF vel AP incidet inter $\frac{12}{8}$ (sive $\frac{3}{2}$) et $\frac{11}{8}$ pedis, adeoque si ipsi AF sive $\sqrt{2}$ vel y attribuas $\frac{3}{2}$, nimium, si $\frac{11}{8}$, parum tribues (nam quadratum a $\frac{3}{2}$ est $\frac{9}{4}$, id est plus quam $\frac{8}{4}$ seu 2 seu yy, et quadratum ab $\frac{11}{8}$ est $\frac{121}{64}$, quod est minus quam $\frac{128}{64}$ seu 2), error tamen erit minor una parte minima, in quam hoc loco unitas in scala divisa est, id est minor quam $\frac{1}{8}$. Et $\frac{1}{8}$ sive AQ erit propemodum mensura communis unitatis sive etiam scalae et ipsius AF. Et quanto magis subdivisa erit scala, eo minor erit error adeoque erit tam parvus quam quis velit, sive minor reddi potest quovis errore assignabili. Itaque AF et AG etsi sint incommensurabiles, sunt tamen homogeneae seu comparabiles, et inveniri potest mensura communis tam prope exacta, ut error seu residuum sit minus data quantitate. Atque hoc est fundamentum appropinquationum, et computandarum Tabularum, itemque Logisticae binariae vel sexagenariae vel etiam decimalis, si quidem scala in decem partes dividatur et earum quaelibet in alias decem subdividatur, idque quantumlibet continuetur. Etsi enim scalae instrumentis satis sub-

dividi non semper possint, mente tamen sive calculo ad summam exactitudinem, quae quidem in praxi optari possit, procedi potest. Quod quomodo fiat, infra apparebit.

Dimensiones sunt quantitates diversae (interdum heterogeneae) quae in se invicem duci intelliguntur, ita scilicet ut una tota applicetur cuilibet parti alterius. Exempli causa (fig. 9) ex ductu latitudinis AB duorum pollicum in longitudinem BC trium pollicum linearium (ita ut anguli A, B, C, e, f semper congruant seu iidem sint, qui dicuntur recti, qui est simplicissimus lineam rectam in rectam ducendi modus) fit rectangulum ABC, quod est duarum dimensionum, et sex pollicum sed quadratorum. Ex ductu longitudinis CB, 2, latitudinis BA, 3, altitudinis AD, 4 in se invicem fit rectangulum solidum CBAD (fig. 10), quod est trium dimensionum seu viginti quatuor pollicum cubicorum ($2 \frown$ in $3 \frown$ in 4); cuilibet enim ex baseos ABC sex quadratillis seu pollicibus quadratis (ut quadratillo AEF) insistunt quatuor cubuli seu unitates cubicae sive pollices cubici (nempe columna seu prisma FEAD ex quatuor pedibus cubicis sibi impositis constans). Nec vero putandum, ut hactenus crediderunt, dimensionem spectari in solis figuris, adeoque rem altioris gradus seu plurium dimensionum quam trium dimensionum esse imaginariam. Etsi enim spatium per se habeat tantum tres dimensiones, corpus tamen potest habere multo plures, ex. gr. duo corpora, unum aureum, alterum argenteum, habent praeter considerationem molis seu spatii, quod occupant, etiam considerationem gravitatis specificae, quae in qualibet parte molis spectatur. Ita gravitate specifica pollicis cubici argenti posita ut 55, auri ut 99 unciarum (ea enim fere proportio est), erit pondus solidi CBAD, si aureum sit, $2 \frown 3 \frown 4 \frown 99$ (seu $24 \frown 99$ sive, 2376 unciarum; sin argenteum sit solidum, erit unciarum $2 \frown 3 \frown 4 \frown 55$ seu ($24 \frown 55$) 1320 unciarum. Itaque pondera ita sunt quatuor dimensionum, ex ductu scilicet molis seu spatii tridimensi in corpus ipsum seu pondus. Potest etiam praeter pondus mortuum accedere impetus ex descensu gravis aliquamdiu continuatus: unde nascitur percussio, quae est quinque dimensionum, ex mole tridimensa, corporis ponderositate et tempore lapsus in se invicem ductis. Ita si una ulna quadrata panni valeat tres nummos imperiales, duae ulnae valebunt bis tres imperiales seu sex. Et pretium hoc est duarum dimensionum, quod si idem pannus sit quatuor ulnas latus, erit pretium ejus 2. 3. 4 seu 24 imperialium, adeoque trium

dimensionum ex ductu in se invicem longitudinis, latitudinis, pretiositatis, id est pretiositatis seu bonitatis intrinsecae in quantitatem seu bonitatem extrinsecam. Ita pretium aggeris est quatuor dimensionum; spectatur enim in eo longitudo quae sit pedum 100, latitudo 12, altitudo 20, et firmitas seu bonitas intrinseca sit talis, ut pes cubicus valeat decem nummos, erit valor ejus $100 \frown 12 \frown 20 \frown 10$ nummorum seu 240000, ut proinde ductus dimensionis in dimensionem sit exhibitio realis multiplicationis mentalis.

Ex his definitionibus sequentia Axiomata duci possunt.

Quae iisdem (vel coincidentibus) determinantur (eodem scilicet modo), coincidunt. Ut coincidunt duae rectae, quarum duo extrema coincidunt.

Quae coincidunt, ea multo magis congruunt, seu idem congruit sibi.

Quae congruentibus determinantur (eodem scilicet modo), congrua sunt. Ut quia triangulum datur, datis tribus lateribus, hinc si tria trianguli latera respondentia respondentibus congruunt, congruent triangula.

Quae congruunt, ea multo magis aequalia sunt.

Aequalia eadem sumta mensura eodem numero exprimuntur, sive ejusdem sunt quantitatis; cum enim inter se congrua reddi possint, eidem mensurae primariae, seu unitati eodem modo repetitae, eodem modo congruere poterunt. Unde idem prodit numerus. Aequalia eodem modo secundum quantitatem tractata exhibent aequalia.

Similia similiter tractata exhibent similia. Quae similiter similibus determinantur, similia sunt. Determinari autem intelligo iis conditionibus designari quae simul non nisi in unum cadere possunt. Itaque quod ita determinatur, id plane exhibetur.

Similia et aequalia simul sunt congrua. Nihil enim superest quo discerni possint, sive sigillatim sive simul spectentur, nisi referantur ad externa, ut locum et tempus aliaque accidentia.

Ratio non est nisi inter homogenea; patet ex definitione. Quorum utrum altero majus, minus aut aequale est, homogenea sunt. De aequalibus manifestum est, possunt enim congrua reddi, adeoque et similia. Minus quoque majori homogeneum, quia ejus parti aequale adeoque homogeneum est, pars autem est homogenea toti. Atque ideo non dicemus lineam minorem superficie, aut ejus partem, nec angulum contactus partem rectilinei, aut eo minorem.

Si quis tamen partem latius sumat, pro omni quod quantitatem habet et quantitatem habenti inest, poterit dicere, lineam esse superficie minorem.

Pars minor est toto. Est enim aequalis parti ejus, nempe sibi ipsi.

Totum est aequale omnibus partibus integrantibus, coincidunt enim; vel certe si conjungantur, quia totum componunt, coincidentia reddentur, adeoque et congruent.

Pars partis est pars totius. Adeoque minus minore est minus majore. Nam parti minoris aequale est; ergo et parti majoris, parti scilicet partis majoris.

Duo homogenea habent communem mensuram quantumvis exacte propinquam. Ostendimus supra, cum scalam explicaremus. Si duorum homogeneorum unum altero neque majus neque minus est, erit aequale. In scala supra posita (fig. 8) comparentur AG et AE, appliceturque AG ipsi scalae, et puncto A manente, incidet punctum G inter B et A, posito AG esse minus quam AB. Ponamus jam demonstrari posse quod recta AG translata in AB, manente puncto A, punctum G neque incidat intra E et B, neque inter A et E, id est quod AG nec sit major nec minor quam AE, utique punctum G incidet in ipsum punctum E, adeoque AG erit ipsi AE aequalis. Quod de duabus rectis, idem demonstrari potest de omnibus homogeneis, nam omnia possunt reddi similia, et ubi similia reddita sunt, si nec magnitudine differunt, nullo modo per se discerni poterunt, sed congrua erunt, adeoque cum congrua reddi possint, aequalia sunt.

DE MAGNITUDINE ET MENSURA.

(1) Magnitudo est, quod in re exprimitur per numerum partium, congruentium rei datae, quae Mensura appellatur.

Scholium. Exempli causa lineae magnitudo exprimitur numero pedum vel pollicum, id est partium quarum quaelibet congruit pedi vel pollici in aliqua materia (velut orichalco aut ligno) reapse dato. Sic orgyiae magnitudo (quantum homo brachia extendere potest) ad certum aliquid (velut per aversionem) designan-

dum censetur exprimi numero sex pedum, vel septuaginta duorum pollicum, quia pes duodecim pollicum habetur. Cubiti magnitudo est unius et dimidii pedis, vel unius pedis et sex pollicum, vel octodecim pollicum. Ponimus autem pedis vel pollicis magnitudinem reapse in organo datam esse. Unde patet quoque, eandem ejusdem rei magnitudinem diversis numeris exprimi, prout variatur mensura, imo interdum diversas mensuras conjungi inter se, ut cum cubitus simul designatur per pedem et pollices.

(2) **Homogenea** sunt, quorum magnitudines numeris exprimi possunt eandem assumendo pro omnibus mensuram tanquam unitatem.

Scholium. Ita si pes sit ut unitas, erit pollex ut $\frac{1}{12}$, cubitus ut $\frac{3}{2}$, orgyia ut 6. Sin pollex sit ut unitas, erit pes ut 12, cubitus ut 18, et orgyia 72. Et hoc modo lineae rectae cujusque longitudo exprimi potest numero quidem integro, si mensura aliquoties detracta, verbi gratia pede ter detracto, restet nihil, ita enim recta tripedalis erit. Sed si mensura vel pede quoties fieri potest detracto restet aliquid, ad id quoque mensurandum sumi poterit certa pars pedis, exempli causa decima, quae rursus quoties fieri potest detrahetur ab hoc residuo; exempli causa vicibus septem et pede assumto pro unitate, numerus quantitatis detractae erit fractus 3 et $\frac{7}{10}$ vel $\frac{37}{10}$. Et hoc modo si res mensuranda ita sit exhausta ut restet nihil, is numerus rei respondebit, magnitudinemque ejus exprimet. Sin adhuc supersit aliquid, tunc vel possumus iterum novam assumere mensurae partem, veluti centesimam, eamque detrahere quoties fieri potest; et si *error* centesima parte minor nobis satis magni momenti non videatur, contenti possumus esse hac per mensuram et mensurae decimas vel centesimas *appropinquatione*, alioqui ad millesimas et ultra progressuri. Solemus autem in praxi adhibere *scalam*, id est constantem quandam mensurae divisionem in orichalco aut alia durabili materia factam, et quidem per decimas et decimas decimarum seu centesimas et millesimas et porro, quoniam hoc modo fractiones decimaliter expressae tractari possunt instar integrorum, qui nobis decadica progressione, id est per unitates, decades, centenarios, millenarios, myriades etc. exhiberi solent; ita Ludolphus de Colonia calculo longe producto invenit, diametro circuli existente 1, circumferentiam esse

$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000}$ vel (quod in

decimalibus licet) conjungendo statim in unam fractionem $\frac{3141592}{1000000}$ etc. usque ad ...... sedem. Sed quoniam appropinquationes hujusmodi, etsi praxi vulgari sufficientes, nullam dant exactam magnitudinis quaesitae cognitionem, ideoque in scientifico progressu tamdiu pergimus, donec appareat series progrediendi in infinitum; et huic fini non adhibemus indistincte decimales, aut alias quaslibet scalae constantes divisiones, sed accommodamus fractiones ad rei naturam, ut scilicet facilius ad legem progressus perveniamus. Atque ita a me repertum est, si diameter sit $\frac{1}{8}$, circumferentiam fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195}$ et ita porro in infinitum, posito fractionum numeratorem esse unitatem, sed denominatores esse qui fiunt ex duobus imparibus 1 et 3, 5 et 7, 9 et 11, 13 et 15, 17 et 19, et ita porro, invicem multiplicatis. Et ea ratione non tantum omnes appropinquationes continuando dabiles simul exprimuntur, sed etiam fieri potest ut error minor sit quovis dato, nam ostendi potest, si circumferentiam dicatur esse $\frac{1}{3}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{5}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35}$, errorem minorem fore quam $\frac{1}{9}$; si dicatur esse $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{195}$, errorem fore minorem quam $\frac{1}{13}$, et ita porro, priorem semper ex imparium proximorum combinatione sumendo. Tota autem series infinita exacte naturam circuli exprimit. Sed hoc nos *rationibus* ex intima natura circuli consecuti sumus; *organice* autem magnitudo circumferentiae circuli vel alterius lineae curvae per filum obtineri potest, curvae lineae rigidae accommodatum et deinde in rectam extensum et scalae applicatum, vel dum curva linea rigida volvitur in plano, quanquam provolutio illa ad securitatem filo vel catena regenda sit, ne tractio ei misceatur. Motu etiam res obtinetur, dum duo mobilia velocitatis uniformis percurrunt rectam et curvam, nam erunt lineae iisdem temporibus absolutae ut mobilium velocitates. Quodsi res mensuranda sit superficies, pro mensura poterit alia assumi superficies, verbi gratia pes quadratus qui vel cujus determinatae partes a plana superficie quoties fieri poterit detrahentur: quodsi superficies plana non sit, videndum an commode transformari possit in planam. Pro solidi mensura aliud assumetur solidum, veluti pes cubicus, eodemque modo procedetur. Comparari etiam solidorum magnitudines poterunt immergendo in liquorem, et mensurando quantum ille in vase attollatur; sed et ponderando, si ambo ex eadem materia elaborentur, idemque et ad lineas et superficies suo quodam modo potest transferri. Atque ita Galilaeus Cycloidis di-

mensionem ponderibus investigavit, etsi veram dimensionem scientificam deinde ab aliis ratione repertam hac methodo non fuerit consecutus. Motu etiam superficies et solida interdum commode metiuntur, tanquam vestigia lineae aut superficiei. Generaliter autem omnis aestimatio ex nostra magnitudinis definitione ad mensurae cujusdam repetitionem numeris expressam redit, aut ad numerum rei ascribendum, posito rei alteri datae ascribi unitatem. Eaque ratione etiam non tantum extensiones et diffusiones partium extra parte, ut in spatio et tempore, sed etiam intensiones seu gradus qualitatum actionumque, jura etiam, valores, verisimilitudines, perfectiones aliaque inextensa ad numeros revocantur, reperta scilicet mensura cui aut cujus partibus aliquotis congruant, quae in re mensuranda reperiuntur, sed cujus aut cujus partium aliquotarum repetitione magnitudo aestimanda formetur. Quae consideratio quanti sit momenti, et quam in ea consistat vis verae Matheseos Universalis seu artis aestimandi in universum, in Dynamicis nostris speciminibus est ostensum.

(8) **Commensurabilia** sunt inter se, quorum reperiri potest una mensura communis exhauriens, cujus repetitione magnitudines eorum constituantur; sin minus, **incommensurabilia** vocantur, et numerus ei, quod cum mensura pro unitate assumta incommensurabile est, assignandus vocatur **surdus** vel irrationalis; sin commensurabilis sit unitati, **rationalis** appellatur.

Scholium. Si nempe mensuram vel partes aliquotas mensuram sua repetitione constituentes quoties fieri potest detrahendo perveniatur ad exhaustionem, semper haberi potest communis mensura repetitione constituens. Nam tota magnitudo mensuranda exprimitur vel integris vel composito ex integris et fractis. Jam fracti quotcunque reduci possunt ad communem divisorem, atque ita ad communem mensuram. Esto numerus inventus magnitudinem quaesitam lineae exprimens $2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{6}$, reducendo ad communem denominatorem fiet $\frac{17}{6}$; itaque si pes sit 1 vel $\frac{6}{6}$, utique communis mensura rei aestimatae et pedis erit $\frac{1}{6}$, quae quantitas in re aestimata continetur decies septies, in pede sexies. Sed si sexta pars pedis seu bipollicaris linea assumatur pro unitate seu mensura, erit pes ut 6, linea vero aestimanda ut 17, adeoque pes et linea commensurabiles erunt. Sed si fractiones procedant in infinitum, nec in unum numerum assignabilem integrum vel fractum summando colligi possint, magnitudo aestimanda erit ei, cui

unitatem assignavimus, vel partibus ejus aliquotis (hoc est repetendo eam conficientibus) incommensurabilis. Veluti si linea sit quae constet uno pede et duabus decimis pedis et tribus centesimis et quatuor millesimis, et quinque 10000mis, et sic in infinitum, ita ut pede posito ut 1, linea sit ut $\frac{1}{1} + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{6}{100000} + \frac{7}{1000000}$ etc. vel $\frac{1234567}{1000000}$ etc. vel more decimalium 1.234567 etc. Ita enim nunquam exhaurietur linea quae mensuranda est, et tamen vera ejus magnitudo exacte expressa habetur. Quotiescunque enim numerus est rationalis, ut vocant, seu unitati commensurabilis, toties decimalibus expressus periodo constat, ita ut characteres iidem semper recurrant in infinitum, ut suo loco ostendemus; quod hoc loco non fieri constructio ipsa ostendit. Porro communem mensuram investigandi haec ratio prodita est a Mathematicis, uti suo loco exponemus, ut a majore detrahatur minus quoties fieri potest, Residuum deinde rursus quoties fieri potest ab ipso Minore antea detracto detrahatur, et secundum Residuum a secundo detracto seu primo residuo, et a secundo Residuo similiter tertium; ita necessario vel ad exhaustionem devenietur, eritque ultimum detractum exhauriens ipsa maxima communis mensura toties in prima magnitudine seu comparatarum majore contenta, quoties unitas in producto ex omnibus quotientibus invicem multiplicatis inest; vel si residua supersint in infinitum, incommensurabiles erunt duae primae quantitates, quemadmodum et residua omnia; sed ipsa series quotientium si certa lege constet, qui exprimunt quoties quivis minor a praecedente detrahi possit, comparationem scientificam duarum magnitudinem dabit. Interim fictione quadam possumus concipere, omnes quantitates homogeneas esse velut commensurabiles inter se, fingendo scilicet elementum aliquod infinitesimum vel infinite parvum. Tali fictione constat calculus Logarithmorum, certo aliquo Elemento Logarithmico constituto. Similis fictio locum habet in Geometria, rem concipiendo perinde ac si omnes lineae constarent ex infinitis numero lineolis rectis infinite parvis, et ita perinde ac si lineae curvae essent polygona infinitorum laterum, vel perinde ac si superficies constarent ex infinitis facieculis planis, id est perinde ac si solida concava vel convexa omnia essent polyhedra hedrarum infinitae exiguitatis. Eodem modo fingi potest, omnia solida constare ex corpusculis elementaribus aequalibus infinitis numero et magnitudine infinite parvis. Et haec fic-

tio nullum potest afferre errorem, quia (si rite procedas ex hypothesi) error nunquam fit major particulis aliquot elementaribus, qui nullam cum toto comparationem habet, de quo nostra incomparabilium Lemmata videantur. Unde si pro particulis elementaribus fictitiis seu infinite parvis assumamus veras assignabiles quantumlibet parvas, ostendi potest, errorem qui in ratiocinando admissus videri possit, minorem esse quovis dato errore, id est nullum assignari posse. Licet autem ad commensurabilitatis imitationem concipi possit, infinitesimalia illa seu infinite parva elementa aequalia esse inter se, interdum tamen fingi praestat alia procedere ratione utili ad ratiocinationem juvandam. Quae melius apparebunt ex parte illa interiore Doctrinae magnitudinum seu Matheseos Universalis, qua nempe continetur Scientia infiniti.

DE RATIONE ET PROPORTIONE.

Duarum rerum **Ratio** inter se habebitur, habita forma comparationis earum secundum quantitatem, et contra. Hinc etsi ambarum quantitates sint incognitae, potest tamen ratio earum esse cognita; licet enim ignorem exempli causa, quot sint nasi aut quot sint oculi in hac civitate, scio tamen numerum nasorum bis repetendum esse ut fiat numerus oculorum.

Comparare duas res secundum quantitatem est quaerere modum inveniendi quantitatem unius ex data sola quantitate alterius. Hic enim finis est comparationis duarum rerum, ut postea sufficiat saltem unam in promptu habere et comparationis meminisse; ita sensu unius et memoria alterius tantum efficimus, quantum sensu utriusque, minore autem pretio constat memoria quam sensus, quia memoria etiam absentium est.

Itaque rationem duarum rerum inter se habere, idem est quod habere modum cognoscendi unam ex data altera sola. Equidem si summam duarum quantitatum sciamus, vel etiam differentiam, etiam unam ex alia cognita invenimus, sed non sola; tria enim occurrunt homogenea, duae scilicet quantitates, v. g. lineae AB et BC (fig. 11) et earum summa (vel differentia) AC et duas noscere necesse est ad inveniendam tertiam. In ratione vero solum-

modo unam noscere opus est ad inveniendam alteram. Ratio enim ipsa, quam praeterea nosse oportet, non est linea. Itaque si cognoscatur linea D (fig. 12) et praetera ratio ejus ad lineam E (ut si sciatur esse duplam ipsius D), scietur etiam ipsa E.

Quaeritur jam quomodo duas quantitates, quas nunc habemus praesentes, ita possimus comparare, ut postea sufficiat alteram solam praesentem habere, et modi comparationis ad alteram quoque cognoscendam meminisse. Hoc fiet dupliciter, vel nulla nova quantitate homogenea assumta, vel assumta quidem nova ad comparationem, neglecta tamen postquam absoluta est comparatio. Quando nulla nova quantitas assumitur, tunc comparatio duarum quantitatum fit, si consideremus unam esse minorem altera, vel ambas esse aequales. Si ambae sunt aequales, nihil ultra quaeritur, modus enim inventus est habendi unam habita altera. Si sunt inaequales, tunc minor aequalis est parti majoris, ex definitione majoris et minoris. Conferatur ergo minor DG (fig. 13) primum parti EH majoris E sibi aequali, deinde et reliquae HF, et quoniam reliqua pars HF iterum vel minor vel major est, ideo si major est HF, iterum DG parti ejus HL aequalis erit, et si pars reliqua secunda LF adhuc major est quam DG, tunc DG iterum parti ejus LM aequalis erit, et ita porro continuabitur, donec reliqua vel sit nulla vel sit minor quam DG, quod tandem fieri necesse est, siquidem EF finita est, alioqui enim semper ab ea detrahi posset DG adeoque DG inesset ipsi EF infinities, id est ipsa EF infinita contra hypothesin. Porro nulla quidem erit pars reliqua, quando F incidit in M, seu quando EH, HL, LM vel LF ipsi DG aequantur; adeoque minor quantitas DG dicitur mensura majoris, seu dicitur majorem EF metiri sive repetendo efficere, portio autem ut EH majoris aequalis minoris DG dicitur majoris pars aliquota (nempe tertia vel quarta pro numero repetitionum), et major EF vel EM dicitur multiplex minoris DG secundum numerum repetitionum qui dicitur Quotiens. Si vero pars reliqua tandem fiat minor detrahendo, sive si detracta aliquoties DG vel aequali ejus, ab EF restet MF minor quam DG, tunc DG dicetur Mensura falsa ipsius EF, etsi sit mensura vera ipsius EM, et pars reliqua MF, minor quam Mensura, dicitur Residuum, numerus vero repetitionum Quotiens falsus.

Notandus est ergo quotiens sive verus sive falsus, ut notetur forma comparationis, hoc loco ternarius, quia ter DG aequalis

est EM. Sed quia superest adhuc residuum MF, eo casu quotientem notari non sufficit, divisa est enim major EF in duas partes EM et MF, illam quam minor DG metitur, et cujus comparatio cum minore constat ex quotiente, sed residuum MF cum sit nova quantitas homogenea, iterum comparanda est cum reliquis DG et EM. Sufficit autem comparari cum DG, quia si comparata sit cum mensura ipsius EM, satis comparata erit cum ipsa; itaque eodem modo comparetur residuum MF cum Mensura DG, ut Mensura cum quantitate mensurata EF. Et si quidem in secunda hac comparatione ipsius MF cum DG nullum esset residuum, tunc MF esset mensura ipsius DG, ergo erit maxima communis mensura sui ipsius et DG, non potest enim dari major mensura ipsius MF quam ipsa MF. Iam maxima communis mensura terminorum comparationis hujus, MF et DG, est maxima communis mensura terminorum comparationis praecedentis DG et EF. Ea vocetur P, jam si N major quam P mensura ipsarum DG et EF communis, ea foret mensura ipsius EF. Est autem eadem N et mensura ipsius DG ex hypothesi, ergo et ipsius EM (multiplae ipsius EF). Jam mensura totius et unius partis est mensura reliquae partis, ergo N mensura totius EF ex hypothesi, et partis EM per ostensa, erit et mensura ipsius MF; est vero et ipsius DG per hypothesin, ergo N est communis mensura et ipsarum MF, DG, contra hypothesin. Quoniam ergo continuatis hoc modo comparationibus, maxima communis mensura terminorum unius comparationis eadem est quae praecedentis, et praecedentis quae antepraecedentis, et ita porro, erit eadem maxima communis mensura omnium, adeoque primae quae ultimae comparationis. Itaque si continuentur comparationes residuorum cum mensuris, donec nullum supersit residuum; residuum autem ultimum seu quod nullum amplius relinquit residuum, sit maxima communis mensura suae comparationis per superiora; ideo residuum ultimum erit maxima mensura communis terminorum ab initio comparandorum; quotientes autem omnium comparationum ordine notati dabunt formam comparationis. Ita ratio numerorum 63 et 49, itemque 72 et 56 seu forma comparationis eadem est, quia eadem utrobique series quotientium prodit, nempe 1, 3, 2; unde ea est ratio inter 63 et 49 quae inter 72 et 56.

Quodsi semper supersit residuum, tunc duae quantitates sunt incommensurabiles, nec aliter hac methodo notari potest forma

comparationis, quam si constet quotientium progressio in infinitum. Unde si sit recta in extrema et media ratione secta, ut vocat Euclides, sive si quantitas AB (fig. 14) sit divisa in duas partes, ut eadem sit ratio minoris AC ad majorem CB, quae est partis majoris CB ad totam BA, tunc progressio quotientium in comparatione partium duarum BC, CA, vel partis CB cum toto AB, erit 1, 1, 1, 1, 1, 1 etc. in infinitum. Nam compendii causa AB appellatur a, et BC vocetur b. Iam b sive BC plus quam semel ab a sive AB detrahi non potest (nam CB major dimidia AB). Eodem modo residuum AC a subtracta BC nisi semel subtrahi non potest, est enim AC ad BC ut BC ad AB, restabitque BD. Jam recta BC in puncto D rursus extrema et media ratione secta est, est enim CD (sive AC) ad CB ut CB ad AB, quae AB in puncto C extrema et media ratione secta est. Atque ita porro: quare semper residuum non nisi semel detrahi poterit, in infinitum. Hanc sectionem vocant divinam, et quoniam perpetuis illis residuorum subtractionibus semel factis oriuntur termini sequentes:

a | b | a − b | − a + 2b | + 2a — 3b | — 3a + 5b | + 5a   8b

qui continuari possunt in infinitum. Si notetur numeros sic progredi:

$$\frac{1}{1} \frac{2}{1} \frac{3}{2} \frac{5}{3} \frac{8}{5} \frac{13}{8} \; 21 \text{ etc.}$$

seu antepenultimum additum penultimo facere ultimum, hinc patet 1a majorem quam b (ob terminum a − b), et 1a minorem quam 2b (ob terminum − a + 2b, ubi a 2b detrahitur a), et 3a majorem quam 3b (ob terminum 2a — 3b, ubi a 2a detrahitur 3b) et 3a minorem quam 5b (ob terminum — 3a + 5b, ubi a 5b detrahitur 3a) et ita porro. Hinc patet, si a sit 1, tunc b fore minorem quam 1; et si a sit 2, b fore majorem quam 1; et si a sit 3, b fore minorem quam 2; et si a sit 5, b fore majorem quam 3; et si a sit 8, b fore minorem quam 5, et ita porro in infinitum. Eaque hujus progressionis pariter et sectionis divinae proprietas jam apud autores habetur, nec dubito, quin haec comparandi methodus reddi generalior magnosque in contemplando usus habere possit. Finis tamen hujusmodi comparationis non est investigatio seriei quotientium, licet contenti ea esse cogamur quoties quantitates sunt incommensurabiles, sed potius investigatio communis mensurae; hac enim habita, duobus tantum numeris (loco seriei quotientium) res absolvitur, numeris scilicet secundum quos communis mensura metitur, tam unam quam alteram quantitatum comparandarum.

Communi igitur mensura habita, perfecte nota est ratio duarum rerum. Si (fig. 15) una A (exempli gratia) expressa sit per mensuram quinquies sumtam seu 5 pollices, altera B per mensuram ter sumtam seu tres pollices; qua ratione licet tertium quiddam extrinsecum assumtum sit, ipsa scilicet mensura, tamen (praeterquam quod ex comparatione duarum quantitatum per se inventa est) sciendum est, numeris istis semel habitis tertiam illam quantitatem seu mensuram posse eliminari, ita ut nulla amplius pollicis vel alterius mensurae mentione sit opus; quoniam enim supra ostendimus rationem duarum quantitatum ideo quaeri, ut una sola habita inveniri possit alia, ideo habebitur numerus quo exprimitur una quantitas, posito alteram sumi pro unitate. Itaque A continebit quinque tertias ipsius B, et contra B continebit tres quintas ipsius A, seu B erit ad A ut sunt tres quintae ad quinque quintas seu ad unitatem, et A erit ad B ut sunt quinque tertiae ad tres tertias seu ad unitatem. Patet etiam, quantitatem ipsius A seu numerum ejus indefinitum, divisum per quantitatem ipsius B seu numerum ejus indefinitum, idem exhibere quod numerus 5 divisus per numerum 3. Quaecunque enim denique unitas assumatur, sive pes sive pollex, ad numeros illos indefinitos definiendos, utique semper eadem numerorum provenientium ratio esse debet, quoniam perfectae duarum quantitatum expressiones eandem habent formam comparationis, quam habent ipsae quantitates, ut si A sit 5 pedum, et B trium pedum, utique ratio erit quae 5 ad 3. Sed si assumantur pollices, quorum duodecim ingrediunter pedem, erit A 60 pollicum, et B 36 pollicum; eadem autem est ratio 60 ad 36 quae 5 ad 3, et dividendo 60 per 36, idem prodit quod dividendo 5 per 3, nempe $1 + \frac{2}{3}$. Itaque patet, rationem duarum quantitatum A et B cognitam esse, si cognoscatur $\frac{A}{B}$ seu proveniens ex divisione A per B; et si duae rationes sint eaedem, etiam haec provenientia divisionis eadem esse. His omnibus enim forma comparationis duarum quantitatum cognoscitur. Unde patet etiam, Aequimultiplorum eandem esse rationem, nempe quinquies duodecim esse ad ter duodecim ut 5 ad 3.

Si vero nulla sit Mensura communis exacta duarum quantitatum, nihilominus eodem modo tractari poterunt; numeri enim reperiri poterunt, rationem earum sive exacte sive quam proxime exprimentes, licet illi numeri exacti sint incommensurabiles inter

se, adeoque vel alteruter vel etiam uterque sit incommensurabilis unitati. Quoniam enim numerus est homogeneum unitatis, quemadmodum linea recta lineae rectae, hinc aliqua recta sumta pro unitate, necesse est aliquem numerum respondere alteri rectae, qui erit surdus, si quidem duae quantitates sunt incommensurabiles. Numeri autem surdi exprimuntur per radices, tam puras quam affectas, variosque alios calculandi modos, quibus effici potest quantitas rationalis interventu surdae; itaque surdae determinantur per quantitates rationales quas efficiunt, sive per relationes quas ad rationales habent. Ita numerus qui per se ipsum multiplicatus exhibeat 2, neque integer est, neque fractus, ut supra ostendimus, sed ita scribitur: $\sqrt[2]{2}$ vel rq2, isque tum in lineis exhiberi tum etiam quam proxime per rationales exprimi potest. Ita si quantitas extrema et media ratione secanda sit, tunc pars ejus major $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ dimidia radix quadrata quinarii demta dimidia unitate, adeoque major a toto 1 subtrahatur, restabit minor $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ seu tres dimidiae demta dimidia radice quadrata

totum majorem major minorem

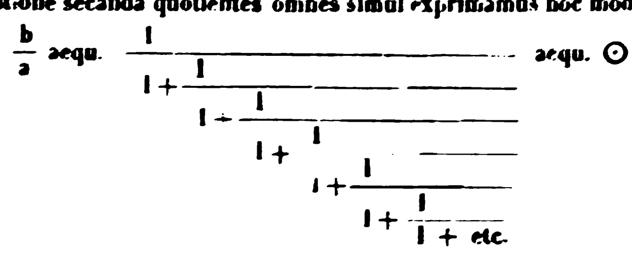
quinarii, debet enim esse 1 ad $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ ut $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$, seu 2 ad $\sqrt{5}-1$ ut $\sqrt{5}-1$ ad $3-\sqrt{5}$, seu $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ aequ. $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$ quod et verum est, nam aequimultiplorum eadem ratio, hinc $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ aequal. $\frac{2\frown\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1,\frown\sqrt{5}-1}$ seu $\frac{2\sqrt{5}-2}{6-2\sqrt{5}}$ seu $\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}$. Itaque quoniam totum extrema et media ratione secandum a est datum, alterutra autem partium est quaesita (inventa enim una habetur altera, quia est totius et alterius differentia), hinc si invenerimus, a posita unitate, valorem majoris b esse $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ seu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sive a esse ad b ut $\sqrt{5}-1$ est ad 2, nihil amplius quaerimus. Unde manifestum est, quando quaeritur ratio a ad b, et a est data, b quaesita, nihil aliud quaeri quam valorem seu numerum ipsius b, posito a esse unitatem, sive duos numeros (integros, fractos aut surdos nil refert) qui eandem habeant formam comparationis sive rationem quam habent a et b. Modum autem inveniendi hos numeros surdos suo loco tradenus, hoc uno tantum annotato, methodum quidem comparationis per se quae in continua divisione seu subtractione possibili residuorum consistit, utilem esse quidem ad inveniendas communes mensuras, adeoque et valores exactos terminorum

comparandorum quando sunt commensurabiles; sed quando sunt incommensurabiles, non nisi per maximas ambages, ducere posse ad numeros veros surdos, qui tamen ex conditionibus problematis alia ratione facile inveniuntur, quod in exemplo praesenti ostendam. Totum a (AB) est ad partem majorem b (BC) ut pars major b (BC) ad minorem a—b (AC); quoniam autem habitis quatuor proportionalibus terminis a, b, b, a—b, factum ex duobus mediis bb aequatur facto ex duobus extremis aa—ab, de quo suo loco. Habemus ergo proportionem transmutatam in aequationem aa—ab aequ. bb seu bb+ab aequ. aa, et quoniam a est cognita, b incognita, habemus bb quadratum ipsius incognitae b una cum ab facto ex ductu cognitae a in incognitam b, aequale ipsi aa quadrato cognitae, quae aequatio dicitur affecta; si enim solum b fuisset cognito aequale, aequatio fuisset simplex. Si quadratum ipsius b nempe bb (vel cubus b^3 aliave potentia) fuisset reperta aequalis cuidam cognitae, tunc aequatio esset quidem exaltata ad aliquem gradum, attamen pura, ut si fuisset bb (vel b^2) aequ. a, tunc extrahendo utrobique radicem quadratam habuissemus b aequ. $\sqrt{a}$, et ita jam inventus fuisset numerus surdus exprimens valorem ipsius incognitae b per cognitam a, adeoque b facta esset cognita. Sed quia hoc loco est bb+ab aequ. aa, arte perveniendum est ad extractionem radicis. Quaerenda est ergo cognita quantitas, quae ipsi incognitae bb+ab adjecta faciat formulam, ex qua extrahi possit radix; talis est $\frac{aa}{4}$ seu quarta pars ipsius aa (quae secundum regulam in Algebra praescriptam in omni hujusmodi exemplo facile invenitur) et habetur $bb+ab+\frac{aa}{4}$ aequ. $(aa+\frac{aa}{4}$ seu$)$ $\frac{5aa}{4}$; adjecta enim utrobique quantitate $\frac{aa}{4}$ manet aequalitas. Extrahendo ergo radicem quadratam ab utraque parte, fiet $b+\frac{1}{2}a$ aequ. $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, nam $b+\frac{1}{2}a$ multipl. per se ipsum dat $bb+ab+\frac{aa}{4}$, ut patet in schemate adjecto*) et $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$ multipl. per se ipsum dat $\frac{5aa}{4}$ (quia

*)
$$\begin{array}{r} b+\frac{1}{2}a \\ b+\frac{1}{2}a \\ \hline +\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}aa \\ +bb+\frac{1}{2}ab \qquad \\ \hline bb+ab\ +\frac{1}{4}aa \end{array}$$

$\frac{1}{2}a$ per $\frac{1}{2}a$ dat $\frac{1}{4}aa$, et $\sqrt{5}$ per $\sqrt{5}$ dat 5). Ita quantitas incognita b a quadrato depressa est ad simplicem formam seu primum gradum; quoniam ergo $b+\frac{1}{2}a$ aequ. $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, hinc utrobique auferendo $\frac{1}{2}a$, fiet b aequal. $\frac{1}{2}a\sqrt{5}-\frac{1}{2}a$ sive b est ad a ut $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$ est ad 1. Tantum ergo ad habendum valorem ipsius b ex data a quaeritur $\sqrt{5}$, quae sane in lineis accurate exhiberi potest. Sit enim triangulum rectangulum BAD (fig. 16), cujus latus minus BA sit 1, medium AD, 2, tunc maximum BD erit $\sqrt{5}$. Nam quadratum ipsius 1 seu BA est 1, ipsius AD seu 2 est 4; jam quadratum hypotenusae BD aequale est duobus laterum quadratis per inventum Pythagorae; ergo 1 + 4 seu 5 ipsa hypotenusa erit latus hujus quadrati seu $\sqrt{5}$. Si jam igitur recta AB seu 1 extrema et media ratione secanda sit, sumatur dimidium ipsius BD nempe BE, quod erit $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, et ab eo detrahatur EF (aequalis ipsi BG, dimidiae ipsius AB unitatis, adeoque $\frac{1}{2}$), restabit BF aequal. $\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}$, quae per calculum praecedentem erit major pars rectae AB proposito modo secandae. Sumta ergo BC aequal. BF, erit recta AB secta in duas partes BC, CA sic, ut minor CA sit ad majorem BC ut est major pars BC ad totam AB, quae constructio per calculum inventa consentit cum ea, quam exhibuit Euclides in undecima sexti juncta 30ma secundi Elementorum, ubi etiam triangulo rectangulo, cujus unum latus circa rectum alterius duplum est, utitur.

Quomodo autem aliae omnes quantitates vel rationales vel surdae lineis exhiberi possint, suo loco ostendetur: sed quando numeri quaeruntur, sciendum est eos exhiberi posse vel propemodum, nempe per appropinquationem, si inter appropinquandum alicubi subsistatur, vel exacte per seriem infinitam, si investigetur ipsa appropinquationum progressio. Cum enim hoc modo exprimantur omnes appropinquationes simul, manifestum est rem ipsam de qua agitur exacte exprimi, cum enim in singulis error fiat semper minor ac minor, adeo ut exhiberi possit minor data quavis quantitate, in omnibus tandem erit nullus. Ita in recta extrema et media ratione secanda quotientes omnes simul exprimamus hoc modo:



seu b aequ. $\odot$, posito a esse 1
BC AB

AC autem seu pars minor erit $1 - \odot$ seu $1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}$

Ex hac autem aequatione inter $\frac{b}{a}$ et seriem infinitam $\odot$ elici possunt appropinquationes semper accuratiores, prout longius progredimur. Nempe si ponatur $\frac{b}{a}$ aequ. $\frac{1}{1}$ posito a aequ. 1, fiet b aequ. 1, qui valor est justo major; proximum est ut, a existente 1, sit b aequ. $\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$ aequ. $\frac{1}{2}$, qui valor est justo minor; hinc b aequ.

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$ aequ. $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ aequ. $\frac{2}{3}$ justo major; inde b aequ.

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}$ aequ. $\frac{3}{5}$ justo minor; hinc b aequ.

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$ aequ. $\frac{5}{8}$ justo major, prodeuntibus ordine

numeris illis supra positis 2, 3, 5, 8, 13 etc. Unde cum $\frac{1}{1}$ sit major quam b et $\frac{1}{2}$ minor quam b, hinc sumendo alterutrum pro vero, error erit minor quam differentia inter $\frac{1}{1}$ et $\frac{1}{2}$ seu minor quam $\frac{1}{2}$, et cum $\frac{2}{3}$ sit major et $\frac{3}{5}$ minor quam b, error his assumtis erit minor quam $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$ seu quam $\frac{1}{15}$, et ita porro, et ob $\frac{5}{8}-\frac{8}{13}$ erit error minor quam $\frac{1}{104}$, et ita poterit esse minor dato quovis numero. Series autem ista

1 1 2 3 5 8 13 21 34

hanc habet proprietatem notabilem, quod terminus ultimus unitate minutus aequalis est omnibus praecedentibus praeter penultimum

(5 - 1 aequ. 1 + 1 + 2, et 8—1 aequ. 1 + 1 + 2 + 3, et 13—1 aequ. 1 + 1 + 2 + 3 + 5), et quod, ut in progressione geometrica factum ab extremis aequatur facto a mediis, ita si quatuor hujus termini sumantur ut 2, 3, 5, 8, factum ab extremis 2.8 nempe 16 et factum a mediis 3.5 nempe 15 differt unitate. Imo si tres sumantur 5, 8, 13, factum ab extremis $5 \frown 13$ seu 65 differt unitate a quadrato mediae $8 \frown 8$ seu 64.

V.

MATHESIS UNIVERSALIS.

Praefatio.

[Scopus operis tum ad promovendam ipsam Scientiam Mathematicam Generalem artemque in ea inveniendi, tum ad juvandos scientiae candidatos, ut filum quoddam habeant in labyrintho.]

Nisi in re tot jam ingeniis trita multa nova et ad perfectionem artis necessaria dicenda haberem, totiusque scientiae longe diversam a receptis notionibus ideam animo concepissem, nollem ab aliis bene dicta necquicquam retractare. Et sane constitueram initio solam tradere Scientiam infiniti, quae Matheseos Generalis pars est altior et ad naturam rerum penitius noscendam inprimis prodest, quod nulla ejus Elementa extarent egoque ipse novum in ea tractandi calculi genus protulissem approbatum insignibus Viris, quo pars quoque Geometriae Algebram transcendens facta est magis analytica: sed postea mecum ipse reputavi, ne communem quidem Logisticam, quae Algebrae nomine venit, a suis fontibus peti, neque aestimandi modum in universum satis nosci, unde saepe gravissimi errores sunt nati, qualis illorum est qui naturam virium motricium per gradus velocitatum ejusdem corporis metiuntur, ut suo loco constabit. Sed neque quantitatis aut relationis inter quantitates in universum, imo quod mirum videri queat, neque simplicissimae relationum speciei, hoc est ratio-

nis ac proportionis naturam satis explicatam haberi, atque ex his causis potissimum factum esse notabam, ut plerique Vietam et Cartesium exscribere contenti nec totius scientiae vim complexi, pomoeria ejus proferre non tentarint. Oportet enim etiam incognitarum regionum praejudicatam quandam notitiam haberi, ut in novas terras expeditiones fiant. Itaque qui supra veteres notiones mentem non attollunt neque in ulteriora prospiciunt, ne suspicione quidem novarum rerum ducuntur. Cui malo inprimis occurrunt illae Scientiarum delineationes, quibus etiam desiderata attinguntur, sed quibus abstinent autores qui videri volunt omnia praestitisse, quod in Cartesio non reprehenderem ob maxima Viri merita, nisi viderem magno Scientiarum detrimento hanc inanem fiduciam in magistrum progressus ingeniorum stitisse. Videbam etiam hujus studii candidatos fortuna magis quam methodo proficere, et cum nihil aliud hic tradi debeat, quam Logica Mathematica, id est ars judicandi atque inveniendi circa quantitates, a plerisque tamen non satis logice, id est cum ratione, tractari calculum algebraicum, quod perinde est atque in labyrintho sine filo versari. Neque enim arbitror satis explicari solere constantem modum Geometrica traducendi in calculum, aut vicissim a calculo redeundi ad constructiones; unde fit ut aestuent tirones nec satis habeant quo se vertant, et ad vulgaris Geometriae vitium redeant ut a casu pendere cogantur, magistris ipsis plerumque more artificum magis in consuetudine longae praxeos artem positam habentibus quam in regulis certis, quas tradere aliis possint. Praeterea considerabam tractatum quidem egregie fuisse, inde ab Euclide, de iis quae eandem habent rationem, sed novam latissimi usus doctrinam superesse de his quae eandem relationem habent. Naturam quoque serierum seu progressionum (quibus loca respondent in Geometria) magis fuisse libatam quam expositam. Ac ne quid nunc dicam de modo solvendi problemata in rationalibus aut in integris (quod magis ad arithmeticam spectare censetur), ubi hactenus fere per tentamenta processum est. Inter ipsius Algebrae desiderata semper habui Tabulas quasdam ac velut series Theorematum sive Canonum, qui si conditi haberentur semel in universum, magno ac taedioso calculandi atque semper in novis exemplis idem saxum volvendi onere nos levarent, praeterquam quod mirifice augerent scientiam et rationem darent multa praevidendi primo aspectu, quae nunc ipso calculi exitu sera sapientia discimus. Sed est in eam rem opus novis qui-

busdam ex Speciosa illa Generali repetitis artibus, quam et Combinatoriam vocare possis, non quantitatibus alligatam, sed in universum rerum formas seu qualitates tractantem, quando et quantitatum notitiam per qualitates ac similitudines ipsius Geometriae exemplo dirigi necesse est. Ipsa quoque Logica, hoc est generalissima Ars cogitandi, nova nobis subsidia suppeditare debet tum pro inventione universalium ex specialibus et inductione quadam scientifica, tum pro nova quadam Analysi gradaria, ubi vulgaris illa per saltum incedens difficultatem habet, ut alia taceam verae ac realis Logicae parum vulgo cognitae arcana. Quemadmodum autem Logistica vel Generalis de Magnitudine Scientia (cujus pars Algebra est) Speciosae Generali et ipsi postremo Logicae subordinata est, ita vicissim sub se habet Arithmeticam et Geometriam et Mechanicen et Scientias quae mistae Matheseos appellantur. Nam numeri definiti Arithmeticae sequuntur leges numerorum indefinitorum quos Algebra tractat et ipsos suos ex ea operationum canones petunt. Et in Geometria omnis puncti situs magnitudine quarundam rectarum determinatur. Et certis punctis definitis per rectas habentur Loca magis composita punctorum infinitorum eandem legem subeuntium, lineae et superficies, quibus figurae planae vel solidae terminantur, ac corpora denique ipsa. Vicissim locorum compositorum concursu simpliciora definiuntur.

Motus ipse quatenus a causae et potentiae consideratione abstrahitur, Geometricae est tractationis; nam lineae, imo et figurae omnes sunt motuum vestigia, et constituta lege motus, tempus, velocitatem, viam definire, rem purae Geometriae esse censeo. Sed Dynamicen quae tractat de Viribus motricibus corporumque conflictu, altius aliquid spirare, et sua quaedam principia petere comperi ex Metaphysica, cujus est dispicere de causis et de viribus atque actionibus substantiarum in universum, neque enim ista (quemadmodum res matheseos) imaginando consequare. Astronomiam nihil aliud esse quam situum et motuum repraesentationem manifestum est. Optica

[De usu hujus Scientiae, ut qui ejus praecepta teneat, ipse per se facilius invenire possit, quae in Geometria et Mechanica et Mathesi mista traduntur, paucis tantum privatis cujusque scientiae ad hanc subalternae principiis cognitis. Quod nunc magis locum habet, ex quo novum Calculi Algebram Transcendentis hoc primum libro explicati genus ipsa infiniti scientia subiit, quae partem hujus nostrae facit et ad

et Musica praeter physicas quasdam hy- majoris momenti proble-
potheses experimento comprobatas mera mata adhiberi debet.]

sunt Arithmeticae et Geometriae specimina. Et in universum naturae corporum quatenus cognoscitur, Mechanicas Leges subit, itaque physica, quatenus absolvit munus suum, redit ad Mechanicen; vicissim Mechanica tota ad Geometricas aequationes reducitur accedente propemodum solo illo ex Metaphysicis altiore principio quod nuper introduximus de aequalitate causae plenae integrique effectus. Geometria ipsa postremo ad calculum, hoc est ad nostram scientiam revocari potest, cujus praecepta praesentis operis materia erunt. Hujus igitur scientiae praeceptis cognitis, saltem quousque ea hactenus promota est, eousque asserere licet, unumquemque subordinatas illas scientias per se consequi posse, paucis tantum cujusque scientiae privatis principiis memoriae prius mandatis, ita ut magno numero propositionum onerare ingenium necesse non sit. Quae praestare cum hic ostendatur, non temere dicemus Mathesin universalem hoc loco tradi. Nam et in ipsa Geometria, qui pauca theoremata situs tenuerit et calculo recte uti sciverit, calculo consequetur omnia quae apud Euclidem et Apollonium et similes extant, idque partim jam tum ex Vietae et Cartesii inventis. Cum vero nec ista longe satis porrigantur, et praeterea Geometria quaedam sublimior quam nemo fere Veterum praeter Archimedem tractavit, hactenus calculi leges respuerit, imo a calculi autoribus diserte fuerit exclusa, quasi Mechanicum esset quicquid Algebram non patitur, nos huic errori (si quid judico) succurrentes novo calculi genere Scientiam infiniti instruximus, non per series tantum, sed et per summas differentiasque varii gradus, id est per quantitates conflatas et conflantia infinitis replicationibus continui elementa. Ita nunc tandem effecisse videmur, ut quicquid Geometria figuris exhibere potest, nos calculo vel algebraico vel certe nostro isto gradus aequationum algebraicarum omnes transcendente consequamur, ut jam demum asseri possit, totam Geometriam et quicquid in natura et arte leges Geometricas accepit, huic scientiae obsequi. Quod experientia ipsa confirmat, quando methodo nostra expedita sunt nuper quae prius summorum virorum conatus repulere.

MATHESEOS UNIVERSALIS

PARS PRIOR.

De Terminis incomplexis.

(1) **Mathesis universalis** est scientia de quantitate in universum, seu de ratione aestimandi, adeoque limites designandi, intra quos aliquid cadat. Et quoniam omnis creatura limites habet, hinc dici potest, ut Metaphysica est scientia rerum generalis, ita Mathesin universalem esse scientiam creaturarum generalem. Duasque habet partes: scientiam finiti (quae Algebrae nomine venit priorque exponetur), et scientiam infiniti, ubi interventu infiniti finitum determinatur.

(2) Quia autem omnis **quantitas** determinari potest per Numerum partium congruentium inter se seu repetitionem **mensurae**, hinc fit ut mathesis universalis simul sit scientia de Mensurae repetitione seu de Numero, unde et generali **calculi** nomine venire solet.

(3) Agitur autem tam de numero certo seu speciali quem tractat **Arithmetica**, quam de numero incerto et generali quem exponit **Logistica**, ut quidam vocant, quam aliqui speciosam, alii denique Algebram appellant. Nam a, b, c, y, x nihil aliud sunt in calculo quam Numeri, ut $a+b=x$ significat $2+3=5$ vel $1+7=8$, vel aliquid simile.

(4) Quodsi de lineis vel aliis rebus invicem addendis agatur, nihilominus tamen non nisi numerorum additio est, nam per lineas, quatenus in iis quantitas consideratur, intelligitur numerus aliquis mensurae veluti pedum. V. g. cum in unum addo a et b ad faciendum $a+b$ seu x, posito a esse lineam unius pedis et b duorum pedum, idem est dicere ex $a+b$ fieri x, quam dicere ex $1+2$ fieri 3 seu ex uno pede et duobus pedibus simul sumtis fieri tres pedes.

(5) Hinc patet, Arithmeticam et Algebram aut Logisticam παραλλήλως tractari posse, imo debere, cum eadem sit objecti natura eaedemque operationes, tantumque interesse quod in Arithmetica sunt numeri speciales, in Logistica vero Numeri generales vel indefiniti.

Et cum ii qui ad Algebram discendam accedunt, jam intelligere soleant Arithmeticam, hinc commode uti possumus praeceptis Arithmeticae ad Algebram translatis. Quemadmodum qui lin-

guam aliquam jam tenet, Grammatica ejus mutatis mutandis utiliter ad alias linguas, praesertim cognatas, discendas uti potest.

(6) Praeterea notandum est, omnes scientias a materia sensibili abstractas seu mere rationales habere aliquid analogum logicae, eoque magis quo magis sunt abstractae seu viciniores Logicae, ita ut quasi Logicae quaedam utentes, ut vulgo loquuntur, censeri possint. Quid enim aliud agunt, quam quod rationes generales inducunt in materiam?

Et quemadmodum multi Logicam illustrare tentaverunt similitudine computi ipseque Aristoteles in Analyticis Mathematico more locutus est, ita vicissim et multo quidem rectius Mathesis praesertim universalis, adeoque Arithmetica et Algebra tractari possunt per modum Logicae, tanquam si essent Logica Mathematica, ut ita in effectu coincidat Mathesis universalis sive Logistica et Logica Mathematicorum; unde et Logistica nostra nomine Analyseos Mathematicae passim venit.

(7) In Logica autem sunt Notiones, Propositiones, Argumentationes, Methodi. Idem est in Analysi Mathematica, ubi sunt quantitates, veritates de quantitatibus enuntiatae (aequationes, majoritates, minoritates, analogiae etc.), argumentationes (nempe operationes calculi) et denique methodi seu processus quibus utimur ad quaesitum investigandum.

(8) Porro ut Notiones in Logicis sunt vel Categorematicae vel Syncategorematicae, verb. gr. Homo aut equus est notio categorematica, sed particula et in termino isto: homo et equus, est syncategorematica; ita similiter in Mathesi universali notionibus categorematicis respondent quantitates seu Numeri quae quive designantur notis primariis: 1, 2, 3; a, b, x. Sed notionibus syncategorematicis respondent notae secundariae, et ut ita dicam, connotationes, veluti signa vincula aliaeve notae relationum inter quantitates.

(9) Signa κατ' ἐξοχὴν vocari solent + plus, et − minus, quae sunt notae additionis et subtractionis; ita $2+3$ facit 5, et $5-3$ facit 2; $a+b=c$, $c-b=a$.

(10) Notae multiplicationis sunt ⌒ vel punctum; interdum etiam simplex ascriptio. 2⌒3 vel 2.3 significat bis tria seu 6, ut ex a⌒b simplici ascriptione fit $ab=e$.

Notae divisionis $\frac{a}{b}$ vel $a:b$.

Sic $3\frown 5$ vel 3.5 mihi significant ter quinque seu 15. Et $15:3$ mihi significat 15 divis. per 3 seu 5.

(11) Nota comprehensionis seu vinculum, ut $\overline{a+b}.c$, significat $a+b$ multiplicari per c, seu fieri $ac+bc$; nam si scripsissemus $a+bc$ longe aliud prodiisset.

Pro vinculo praesertim repetito saepe utor commatibus, iisque repetitis; sic $a+b,:,c+d$ mihi significat $a+b$ dividi debere per $c+d$. Sic $\sqrt{},a+b,:,c+d,.,:,l+m$ mihi significat radicem ex fractione facta divisione ipsius $a+b$ per $c+d$, debere dividi per $l+m$. Quod et sic notare possem $\sqrt{a+b,:,c+d,:,l+m}$; vulgo vero sic notaretur $\sqrt{\dfrac{\sqrt{\dfrac{a+b}{c+d}}}{l+m}}$, quod inter alia incommoda nimis spatii in pagina occupat. Utor et interdum parenthesibus, verbi gratia $(a+b)c$, item $\sqrt{((a+b):(c+d)):(l+m)}$, qua ratione in valde compositis optime tolluntur aequivocationes. Sed et solis intervallis majoribus minoribusque designari posset, quaenam in unum complexum sint conjungenda, dictae tamen designationes sufficiunt.

(12) Est et nota potentiae, seu ductus in se ipsum; $\boxed{2}\overline{a+b}$ significat quadratum ipsius $a+b$, et $\boxed{3}\overline{a+b}$ significat ejus cubum, $\boxed{4}$ biquadratum, $\boxed{5}$ surdesolidum, $\boxed{6}$ quadratocubum, et ita porro, ubi 2, 3 etc. sunt exponentes. Quanquam et saepe sic solummodo scribo exponentem supra ponendo $\overline{a+b}^2$ vel $\overline{a+b}^3$. Quidam solent exponentem scribere non supra, sed simpliciter post quantitatem per potentias exaltandam, ex. gr. $a2$ idem ipsis est quod aa vel quod a^2; sed cum saepe in calculo numeri ipsi pro literis adhibeantur, nascitur hinc aequivocatio, ut alia taceam incommoda.

(13) Reciprocum ipsius potentiae est Radix, cujus nota est $\sqrt{}$, id est r cum productione, ut $\sqrt{ab}$, $\sqrt{aa+ab}$, id est radix quadrata educta ex ab, vel ex aa et ab. $\sqrt[3]{}$ est radix cubica, $\sqrt[4]{}$ est biquadritica, $\sqrt[5]{}$ surdesolida, $\sqrt[6]{}$ quadrato-cubica, et ita porro. Reciprocatio inter potentiam et radicem sic intelligitur in exemplo $\sqrt[2]{9}=3$ et vicissim $9=\boxed{2}\,3$ vel $9=3^2$ vel $9=3.3$.

(14) Nota aequalitatis solet esse $=$, ut $a=b$. Cartesius adhibet $\propto$, credo a litera initiali aequalitatis nempe æ.

(15) Nota majoritat[illegible], ut $5 \sqcap 3$ significat 5 esse majus quam 3.

Nota minoritatis [illegible] ut $3 \sqcup 5$ seu 3 esse minus quam 5.

(16) Nota differentiae a Cartesio et Schotenio adhiberi solet =, ut a=b significat ipsis differentiam inter a et b, sive excessum ejus quod inter haec duo est majus, cum scilicet ignoramus adhuc utrum sit majus. Verum deprehendi, non esse opus peculiari signo differentiae, sed id contineri sub signis ambiguitatis quae a me sunt uberius exculta.

Itaque differentia inter a et b nihil aliud est, quam alterum horum $+a-b$ vel $+b-a$ seu $-a+b$, unde a me scribi sic solet $\pm a \mp b$, modo intelligatur id quod majus est ex duobus affici signo +, alterum verum signo —.

Datur et ambiguitas major et quidem triplex, ut si sit $\ddagger a + b$, quod significat vel summam vel differentiam, cum scili-

+ —

— —

cet duas quantitates in unam componendam conjungendas constat, nec tamen adhuc determinatur utrum id sit faciendum per additionem an per subtractionem; et si per subtractionem, quodnam duorum sit subtrahendum ab altero.

Notae quoque peculiares rationis et proportionis adhiberi solent. Sic quidam solent per a ÷ b ÷÷ c ÷ d significare, eandem esse rationem seu proportionem ipsius a ad b, quae est ipsius c ad d. Sed ego deprehendi regulariter non esse opus in calculo peculiaribus signis pro rationibus et proportionibus, earumque analogiis seu proportionalitatibus, sed pro ratione sive proportione sufficere signum divisionis, et pro analogia seu proportionum coincidentia sufficere signum aequalitatis. Itaque rationem seu proportionem ipsius a ad ipsum b sic scribo: $a:b$ seu $\frac{a}{b}$, quasi de divisione ipsius a per b ageretur.

Et analogiam seu duarum proportionum aequalitatem sive convenientiam designo per aequalitatem duarum divisionum seu fractionum. Et cum designo, eandem esse rationem a ad b quae est c ad d, sufficit scribere $a:b = c:d$ seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Etsi enim in se et formaliter alia sit proportionis quam divisionis natura, attamen quia posito a ÷ b ÷÷ c ÷ d, semper est $a:b = c:d$, et vicissim hoc posito sequitur illud; hinc ne superfluas notas adhibeam, ipsam rationem et proportionem statim hoc modo in calculum traduco, praesertim cum infra appariturum sit, omnes Euclideas de Rationibus et

Proportionibus consequentias ex hoc notandi modo sponte nasci, nec opus esse peculiaribus regulis vel praeceptis.

Praeter notationem proportionis et rationis adhibeo etiam interdum notam Relationis in genere. Est enim proportio tantum relationis species, eaque simplicissima. Sed relationes adhuc variari possunt modis innumerabilibus, ex. gr. cum dato sinu recto et sinu verso detur radius, hinc intelligi potest relatio quaedam inter radium r, sinum s, et sinum versum v, quam sic designo $r;\tilde{s};v$, et si esset $r;\tilde{s};v$ eadem cum $m;\tilde{n};p$ seu $r;\tilde{s};v \sim m;\tilde{n};p$, id mihi significaret, etiam m, n, p se habere ut radium, sinum et sinum versum.

Unde praeter notam aequalitatis habeo et notam similitudinis $\sim$, qua et usus sum in exemplo proxime praecedente. Sic si sit $aa-bb=cc$ et $ll-mm$ nn, tunc dico esse $a;\tilde{b};c \sim l;\tilde{m};n$ seu relationem inter a, b, c eandem esse respective (seu eodem ordine servato) cum relatione inter l, m, n.

Habeo et notam coincidentiae ∞ seu identitatis. Exempli gratia sit $aax^2+2abx+bb \infty lx^2+mx+n$, hoc mihi non tantum significat aequalitatem inter has duas formulas (quemadmodum si scripsissem $aax^2+2abx+bb = lxx+mx+n$), sed significat etiam coincidentiam, adeoque aequalitatem singulorum terminorum, adeoque erit $l=aa$ et $m=2ab$ et $n=bb$. Itaque quod vulgo vocant comparationem aequationum, revera est identificatio quaedam seu coincidentia.

Quemadmodum etiam + est nota conjunctiva seu cumulationis et respondet τῷ et, ut $a+b$ id est $a+b$ simul, ita datur quoque nota disjunctiva seu alternationis quae respondet τῷ vel, sic $a\,\hat{v}\,b$ mihi significat a vel b. Idque et in calculo usum habet, nam si sit $xx+ab=\overline{a+b}x$, erit $x=a\,\hat{v}\,b$ seu x significabit vel a vel b, habebitque adeo valorem ambiguum. Ex. causa si sit $xx+6=5x$, potest x esse 2, sed tamen potest etiam x esse 3. Nam si x sit 2, tunc ex $xx+6=5x$ fiet $4+6=10$; et si x sit 3, tunc ex $xx+6=5x$ fit $9+6=15$. Plures autem incognitae hujus valores seu praesentis aequationis radices dari non possunt, ut suo loco patebit.

Hinc usum quoque habent signa ambigua, et suo loco patebit, ambiguitatem in calculo esse fontem irrationalitatis; itaque cum scribo $x=3+\sqrt{4}$, tunc id potest explicari tam per $3+\sqrt{4}$ seu $3+2$

seu 5, quam per $3-\sqrt{4}$ seu $3-2$ seu 1, adeoque erit $x=5 \vee 1$. Nam ut tollamus irrationalitatem, sit $x-3=\sqrt{4}$; ergo $xx-6x+9=4$ seu $xx-6x+5=0$ seu $xx+5=6x$, ubi patet satisfacere tam 5 quam 1. Nam si x valeat 5, fiet $25+5=30$; sin x valeat 1, fit $1+5=6$.

Introduxi et novum genus notandi pro calculo differentiali et summatorio. Sit enim series repraesentata per figuram adjectam (fig. 17) ubi abscissae AB, nempe A_1B, A_2B, A_3B etc. significant locum in serie seu numeros ordinales, sed ordinatae BC, uti ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$ etc. significant ipsos terminos seriei. Jam AB seu abscissam quamcunque generali appellatione vocemus x, et BC quamcunque seu ordinatam ipsi x respondentem vocemus y si placet, adeo, ut si x sit A_2B, respondens ei y futura sit ${}_2B_2C$. His positis jam porro possumus considerare incrementa quaedam seu differentias tam in abscissis proximis quam in ordinatis. Ex. g. differentia inter duas proximas abscissas A_1B et A_2B est ${}_1B_2B$ seu ${}_1C_2D$, et differentia inter duas proximas ordinatas ${}_1B_1C$ et ${}_2B_2C$ est ${}_2D_2C$. Similiterque differentia inter duas alias proximas abscissas A_3B et A_4B est ${}_3B_4B$ seu ${}_3C_4D$. Et differentia inter duas iis respondentes proximas ordinatas ${}_3B_3C$ et ${}_4B_4C$ est ${}_4D_4C$. Quemadmodum autem quamlibet abscissam velut A_1B, A_2B, A_3B, A_4B etc. generali appellatione vocavimus x, et quamlibet ordinatam velut ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$, ${}_4B_4C$ generali appellatione vocavimus y; ita quodlibet incrementum vel elementum abscissae (quo scilicet sequens supra praecedentem crescit) velut ${}_1B_2B$, ${}_2B_3B$, ${}_3B_4B$ generali appellatione vocabimus dx, id est differentiam duarum proximarum x; et similiter quodlibet elementum vel incrementum ordinatae (quo scilicet sequens supra praecedentem crescit) velut ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ generali appellatione vocabimus dy, id est differentiam duarum proximarum y.

Adhibuimus etiam notam pro summis; nam si quaelibet harum ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ vocetur v, summa omnium (id est ${}_1D_1C+{}_2D_2C+{}_3D_3C+{}_4D_4C$) id est ${}_4B_4C$ a me per compendium vocabitur $\int v$. Hinc patet, ut reciprocae sunt additio et subtractio, tum multiplicatio et divisio, itemque potentia et radix, ita et reciprocas inter se esse summas et differentias. Nam in schemate praecedenti quamlibet ex dictis ${}_1D_1C$, ${}_2D_2C$, ${}_3D_3C$, ${}_4D_4C$ vocavimus v, ita ut v sit DC; sed easdem etiam vocavimus dy, referendo ad ipsas y seu BC, quarum sunt incrementa. Habemus ergo $dy=v$

et vicissim $\int v = y$. Nam summae omnium v vel omnium DC, inde ab initio aequantur ultimae y (seu ${}_1D_1C + {}_2D_2C + {}_3D_3C + {}_4D_4C = {}_4(CB_4O)$; quia ergo $\int v = y$, et $v = dy$, fiet $\int dy = y$ seu summa differentiarum inter ipsas y reddit ipsum terminum y, prorsus ut in potentiis et radicibus $^{2}\overline{\sqrt[2]{3}} = 3$.

Cum vero ipsae DC seu v sive dy non minus progressionem vel incrementa aut decrementa differentiasque adeo suas habeant, quam ipsae y, hinc oriuntur differentiae differentiarum seu ddy. Imo dantur et differentiae tertiae, et ita porro, quoad usque est opus."

Reperi autem summatorium calculum imprimis pertinere ad figurarum quadraturas, differentialem vero ad tangentes vel directiones, et differentio-differentialem ad oscula seu flexiones; de quibus omnibus suo loco clariores notiones habebuntur.

Hactenus de Connotationibus seu notis secundariis quibus in calculo utimur; sed nunc ipsae quantitates notis istis vel primariis solis cum simplices sunt, vel primariis et secundariis simul designandae uberius a nobis exponi debent.

Quantitas designari potest litera, ut a, b, item numero vel vero, ut 3 (ternarius), vel fictitio, ut si 13 mihi non significet tredecim, sed potius quantitatem collocatam in formula prima 1, loco tertio 3, quam designo per 13. Unde patet, ne hoc quidem indifferens esse, quam notam simplicem primariam assumere velimus. Qua ratione ingentem Speciosae defectum suppleo, quod nempe assumtae vulgo notae, scilicet literae a, b etc. non satis significant ipsarum quantitatum inter se ordinem et relationem; ita in progressu calculi non apparent pulchrae illae harmoniae, legesque ac theoremata, quae primo statim aspectu designantur, si ordo quidam certus et regularis in notando servetur. Exempli causa si vulgari more $cx^3 + bx^2 + qx + r$ multiplicetur per $gx^2 + px + e$,

$$\text{productum erit} \left\{ \begin{array}{l} cgx^5 + bgx^4 + qgx^3 + rgx^2 \\ \quad + cpx^4 + bpx^3 + qpx^2 + rpx \\ \quad\quad + cex^3 + bex^2 + qex + re \end{array} \right\}$$

sed si $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13$ multiplicemus per $20x^2 + 21x + 22$, ubi nulla nota sine ratione assumta est, nihilque est in assumtis, quod non exprimatur et discriminetur in notis, etiam progressus egregie in producto apparebit. Nempe per notam dextram numeri distinguimus coefficientes formulae primae a coefficientibus formulae

secundae; per notam vero sinistram distinguimus sedem in quavis formula, seu cujusnam potentiae sit coefficiens; sic 21 intelligimus esse in formula secunda coefficientem ipsius x^1 seu x, et 12 intelligimus esse in formula prima coefficientem ipsius x^1.

Jam $10x^3 + 11x^2$ etc. in $20x^2 + 21x$ etc.

dat $10.20x^5 + 11.20x^4 + 12.20x^3 + 13.20xx$
$+ 10.21x^4 \quad 11.21x^3 \quad 12.21xx + 13.21x$
$10.22x^3 \quad 11.22xx \quad 12.22x + 13.22$;

ubi patet in producto esse omnes combinationes possibiles certa lege atque ordine factas. Nempe in quovis membro coefficientis producti est binio, seu combinatio duorum numerorum fictitiorum. In qualibet harum binionum notae sinistrae sunt eaedem et eodem modo collocatae, nempe 1 et 2 veluti 10.20, aut 11.20, aut 10.21, et ita porro. In omnibus binionibus seu membris coefficientis ejusdem potentiae ipsius x, summa notarum dextrarum conficit idem, nempe numerum qui additus exponenti potentiae dat exponentem summum 5. Veluti coefficiens ipsius x^2 constat ex tribus membris, $13.20 + 12.21 + 11.22$, ubi patet $3+0$, itemque $2+1$, itemque $1+2$ facere semper idem nempe numerum 3, qui additus ad 2 (exponentem ipsius x^2) possit facere 5. Unde patet etiam, quot possibilia sint membra cujuscunque coefficientis, tot scilicet quot modis numerus 3 ex binis inferioribus 0, 1, 2 componi potest, et quot cujusque compositionis sunt transpositiones possibiles, veluti $1+2$ et $2+1$ sunt una quidem compositio, sed variant transpositione. Patet etiam hinc, productum hic scribi posse sine calculo, theorematibus hujus modi semel constitutis. Exempli gratia pro termino x primum scribemus

13. et mox supplendo fiet	13.2 et denique absolvendo	$13.20x^2$
12.	12.2	12.21 ..
11.	11.2	11.22 ..
10.	10.2	10.23 ..

Et ita ex primo membro cujusque coefficientis dato (quod determinatur ab ipso potentiae ipsius x gradu) patet reliqua quoque cum sua serie determinari.

Et haec majoris adhuc usus sunt, cum tres vel plures formulae invicem duci debent; nam si adhibeamus notationem regularem et accuratam, non vero ut vulgo arbitrariam, saepe praevidere possumus quid sit proditurum; et semper certa quaedam theo-

remata apta eruimus, facileque etiam errores procavemus aut emendamus.

Hinc etiam prodit ignorata hactenus vel neglecta sub-ordinatio Algebrae ad artem Combinatoriam, seu Algebrae Speciosae ad Speciosam generalem, seu scientiae de formulis quantitatem significantibus ad doctrinam de formulis, seu ordinis, similitudinis, relationis etc. expressionibus in universum, vel scientiae generalis de quantitate ad scientiam generalem de qualitate, ut adeo speciosa nostra Mathematica nihil aliud sit quam specimen illustre Artis Combinatoriae seu speciosae generalis.

Unde patet quoque, quam imperfecta hactenus fuerit Algebra, cum ne modus quidem simplices terminos exprimendi bene fuerit constitutus, ut taceam tot alios in Connotationibus defectus hic suppletos, et alias supplendos. Quemadmodum et ostendam, Arithmeticae notas, quantum ad Theoriam, hactenus male fuisse constitutas, ita scilicet ut relatio numerorum inter se atque ordo non appaeruerit, eaque ratione factum est, ut magna verae Arithmeticae pars hactenus sit ignorata, quod in scientia maxime facili et maxime usuali mirum videri possit.

Quantitates quae notantur per literas vel numeros vel alias notas, sunt vel abstractae, vel concretae. Abstractae sunt numeri, vel etiam rationes, quas ipsas (quemadmodum supra dictum) ut numeros tractos concipio. Quantitates concretae possunt esse lineae, figurae, solida, tempora, motus, vires, soni, lux, et omnia denique, in quibus ejusdem mensurae repetitio intelligi potest; de quibus alias pluribus, ut applicatio Calculi generalis ad Geometriam, Dynamicen, Astronomiam, Physicam et alias scientias melius appareat.

Quantitates exprimuntur vel per notam simplicem, modo dicto, velut per a, b numerum; vel per plures notas inter se conjunctas, m o d u m f o r m a n d i quantitates designantes.

Prima formatio est per signum +, ut si ex a et b conjunctis per additionem seu simul sumtis fiat a + b, vel a + b + c, vel a + b + c + d. Fieri autem potest, ut quae hoc modo simul adduntur, habeant quandam relationem inter se, ex quibus simplicissima est, si coincidant; ut si a et b coincidant fit a + b idem quod a + a, vel idem quod 2a, et a + b + c idem quod a + a + a seu idem quod 3a. Ex quo etiam apparet, quomodo M u l t i p l i c a t i o sit additio quaedam repetita. Et porro, cum habemus 2a, vel 3a, vel generaliter ma, vel am, rursus considerare licebit, ipsum numerum m

posse aequalem esse numero a; et ex a in a fiet aa; unde jam nascitur Potentia, eodem in se multiplicato.

Habent autem potentiae suos gradus, nempe si a multiplicetur per a fit aa seu a^2 seu quadratum; si aa rursus multiplicetur per a, fit aaa seu a^3 seu cubus.

Tabula potentiarum: a^0 est unitas, a^1 seu a est latus seu quantitas, a^2 est quadratum, a^3 cubus, a^4 biquadratum, a^5 surdesolidum primum, a^6 (seu $a^{2\cdot3}$) quadrati-cubus, a^7 surdebisolidum seu surdesolidum secundum (nomine surdesolidi vocando omnem potentiam cujus exponens est numerus primitivus supra 3), a^8 seu $a^{2\cdot2\cdot2}$ triquadratum, a^9 seu $a^{3\cdot3}$ bicubus, a^{10} seu $a^{2\cdot5}$ quadrati-surdesolidum, a^{11} surdetrisolidum seu surdesolidum tertium, a^{12} seu $a^{2\cdot2\cdot3}$ biquadrati-cubus. Sic $a^{3\cdot3\cdot3}$ seu a^{27} erit tricubus, et $a^{5\cdot5}$ seu a^{25} erit bisurdesolidum; et a^{125} seu $a^{5\cdot5\cdot5}$ erit trisurdesolidum. Et in universum denominationes designant resolutionem exponentis in suos primitivos.

Quemadmodum porro potentiae nascuntur ex ductis invicem aequalibus, ita si diversae literae vel notae simplices ducantur, oriuntur quae vocare licet rectangula, quoniam in Geometria ab seu multiplicatio a per b repraesentatur optime per rectangulum planum (fig. 18); et abc, seu multiplicatio a per b et producti rursus per c repraesentatur per rectangulum solidum.

Imo etsi in Geometria non dentur nisi tres dimensiones, tamen in rerum natura dantur plures. Sint enim duo rectangula solida abc et lmn (fig. 19), prius ex auro, posterius ex argento, et pondus auri ad pondus argenti sit ut d ad p; patet pondus rectanguli solidi prioris ad pondus rectanguli solidi posterioris fore ut abcd ad lmnp, adeoque etsi spatia non sint nisi trium dimensionum, pondera tamen esse quatuor dimensionum. Quodsi impetus, motus, vires horumque varios gradus aut varias species adjungamus, possunt dimensiones multiplicari in infinitum.

Habemus ergo rectangula haec: birectangulum ab, trirectangulum abc, quadrirectangulum abcd, et ita porro.

Eadem exprimi possunt per combinationes. Nam ab est binio duorum, abc est ternio trium, abcd est quaternio quatuor talium: quae quidem combinatio, cum numerus combinandorum coincidit cum exponente combinationis, non nisi unica est. Aliae sunt plures, exempli causa, rerum trium a, b, c sunt biniones tres, nempe ab, ac, bc; rerum quatuor a, b, c, d sunt biniones sex,

nempe ab, ac, ad, bc, bd, cd; terniones quatuor abc, abd, acd, bcd; sed de his suo loco.

Cum vero potentiae simplices sint formae ex iisdem sive aequalibus invicem ductis, et rectangula seu combinationes simplices sint formae ex diversis invicem ductis, superest jam ut eas formas seu combinationes spectemus, in quibus partim sunt eaedem literae, partim diversae, quas compositas vocare licet.

Et hae quidem formae variant, pro gradibus: in primo gradu nihil aliud habemus quam unam formam, a vel b etc.

In secundo gradu sunt formae duae: quadratum et binio seu birectangulum aa et ab.

In tertio gradu sunt formae tres: a^3, a^2b, abc, nempe praeter cubum a^3, et trirectangulum vel ternionem abc, occurrit a^2b (vel quod quoad formam eodem redit ab^2) quod possis appellare quadrato-simplex.

In quarto gradu sunt formae: a^4 (biquadratum), a^3b (cubo simplex), a^2b^2 (bibinio), a^2bc (quadratobinum), abcd (quaternio).

In quinto gradu sunt formae: a^5 (surdesolidum), a^4b (biquadrato simplex), a^3b^2 (cuboquadratum), a^3bc (cubobinum), a^2b^2c (bibinio simplex), a^2bcd (quadratotrinum), abcde quinio.

In sexto gradu sunt formae: a^6 (quadraticubus), a^5b (surdesolido simplex), a^4b^2 (biquadratoquadratum), a^4bc (biquadratobinum), a^3b^3 (tribinio), a^3b^2c (cubo-quadrato simplex) a^3bcd (cuboternum), $a^2b^2c^2$ (biternio), a^2b^2cd (bibinobinum), a^2bcde (quadrato quaternum), abcdef (senio).

In septimo gradu sunt formae: a^7 (surdesolidum secundum); a^6b (quadratocubo-simplex), a^5b^2 (surdesolido quadratum), a^5bc (surdesolido binum), a^4b^3 (biquadrato cubus), a^4b^2c (biquadrato-quadrato simplex), a^4bcd (biquadrato ternum), a^3b^3c (tribino simplex), $a^3b^2c^2$ (cubobibinum), a^3b^2cd (cuboquadrato binum), a^3bcde (cubo quaternum), $a^2b^2c^2d$ biterno simplex), a^2b^2cde (bibino ternum), a^2bcdef (quadrato quinum) abcdefg (septenio). Atque ita porro ad gradum octavum, nonum et sequentes pergi posset, si esset opus; sed non est necesse his multum morari, etsi libare nonnihil prosit.

Notandum etiam, quadraticubum mihi significare a^6 seu $a^{2\cdot 3}$, nempe quia exponens hujus potentiae 6 est productus ex 2 exponente quadrati et 3 exponente cubi, ubi semper in denominando incipio a numero producente minore. Sed cubo-quadratus, cum

scilicet a majore incipio, longe aliud mihi designat, nempe formam productam ex cubo unius literae in quadratum alterius literae, ut a^3b^2, vel b^3a^2, vel quod idem est a^2b^3, ubi in denominando incipio ab altiore; quod observandum est ad aequivocationes evitandas. Itaque quadraticubo-quadratum mihi significabit a^6b^2, et quadraticubo-quadraticubus significat a^6b^6, quod etiam efferri potest sebinio, et quadraticubo-cuboquadratus significat $a^6b^3c^2$.

Ubi etiam notandum, quae sunt ejusdem literae connecti per genitivum, quae diversae per dativum; sic quadraticubus est a^6 seu $a^{2\cdot 3}$; nam revera est quadrati a^2 cubus, quia si a^2 ter in se cubice ducatur fit a^6; sed dativus significat transitum a litera in literam, ut cuboquadratus significat a^3b^2, seu cubum ab uno ductum in quadratum ab alio. Licet autem, observato hoc discrimine inter genitivum et dativum, minus sit necessarium observare quid sit praeponendum aut postponendum; nam quadraticubus seu cubus a quadrato idem est quod cubiquadratus seu quadratus a cubo; et quadrato cubus b^2a^3, id est ductum a quadrato alicujus literae b in cubum alterius literae a, idem est quod cubo quadratus a^3b^2, id est cubus alicujus literae a in quadratum alterius b; malo tamen majoris lucis causa praeter distinctionem genitivi et dativi adhibere distinctionem ordinis, ut in exprimendo exponente unius literae praeponam exponentis factores seu productores minores, sed ut in exprimendo combinationes potentiarum a diversis literis praeponam exponentem potentiae altioris.

Denique notandum est, quasdam formas servare legem justitiae, ita ut quaelibet in iis litera se habeat eodem modo, ut fit in rectangulis seu combinationibus simplicibus, nempe binionibus ab, ternionibus abc, quaternionibus abcd, et in harum potentiis seu bibinionibus a^2b^2, tribinionibus a^3b^3 etc., biternionibus $a^2b^2c^2$, triternionibus $a^3b^3c^3$ etc., biquaternionibus $a^2b^2c^2d^2$, triquaternionibus $a^3b^3c^3d^3$ etc., et ita porro.

Ceterae formae leges justitiae non observant nisi plures similes addantur inter se, ex. gr. quadrato simplex a^2b aliter tractat a quam b: si tamen in unum addantur $a^2b + ab^2$, corrigitur injustitia, et in formula hac composita ambae literae aequali jure utuntur.

Atque haec vel ideo praenotare operae pretium est, quoniam, ut suo loco patebit, justitia (quemadmodum et pietas) ad omnia utilis est, ut etiam in calculo Algebraico ejus simulacrum prosit.

Expositis jam formis simplicibus, considerandum nunc est, posse inde oriri formulas compositas ex. gr. $x+y$, vel x^2+y^2, vel x^3+x^2y, vel $x+y+xx+xy$, vel $2x+3y$, aliisque modis innumerabilibus. Duae autem sunt leges quae in hac compositione observari vel violari possunt: una est Lex Homogeneorum, quam tulit Vieta, altera est Lex Justitiae, quam ego introduxi.

Lex Homogeneorum est, ut quae in unum componuntur, sint ejusdem gradus, ex. gr. $x+y$, vel x^2+y^2, vel $xx+2xy$, vel $2xx+3yy$, posito 2 et 3 esse numeros, hi enim in lege Homogeneorum nihil mutant. Sed si in unum addantur diversi gradus quantitates, tunc violata intelligitur lex Homogeneorum, ut si fiat $x+y+2xx+3xy$.

Et quidem si de numeris vel quantitate mere abstracta agatur, impune lex homogeneorum violari potest; ex. causa $6+15+8=27$, ubi faciendo $2=a$, et $3=b$, et $5=c$ fiet $ab+bc+a^3=b^3$, quod verum est, etsi lex homogeneorum non observetur, seu etsi rectangula plana $ab+bc$ addantur cubo a^3.

Sed cum numeri applicantur rebus, hoc non licet, neque enim addi possunt in Geometria rectangula plana ab et bc ad cubum a^3, neque licet comparationem instituere inter rectangulum solidum spatiale seu simplex διάστημα trium dimensionum, et inter corpus aliquod grave, quod est quatuor dimensionum, ut paulo ante est explicatum.

Interim licet etiam in rebus ipsis recedere a lege homogeneorum, saltem in speciem, subintelligendo aliquam quantitatem pro unitate assumtam, ex. gr. $ab+bc+a^3=b^3$ significabit, 6 pedes cubicos una cum 15 pedibus cubicis et cubo duorum pedum simul aequari cubo trium pedum; seu unitatem 1 adhibendo $1ab+1bc+a^3=b^3$, id est rectangulum solidum 1ab seu ab (quia unitas non multiplicat) cujus altitudo unius pedis (1), latitudo duorum (a), longitudo trium (b) producunt sex pedes cubicos una cum rectangulo solido 1ac seu ac, cujus altitudo unius pedis (1), latitudo duorum 2(a) et longitudo 5(c) producunt 15 pedes cubicos, una cum a^3 cubo duorum pedum seu 8 pedibus cubicis aequari b^3 cubo trium pedum seu 27 pedibus cubicis.

Etsi autem Cartesius soleat non raro studio violare legem homogeneorum introductione unitatis, ego tamen ejus rei non magnum usum reperio, et malo cum Vieta, quoad commode licet, etiam in ipsis numeris legem homogeneorum sequi, quia ita sponte

naturae nascitur calculus, maximeque id consentit ordini rerum, erroresque etiam facilius evitantur, cum lex homogeneorum inter examina sit calculi.

Habeo et novam homogeneorum Legem a me introductam pro calculo differentiali et summatorio, ubi praeter potentias et formas paulo ante positas occurrunt differentiae. Ex. causa addx homogenea est cum dxdx, seu quadratum differentiae primi gradus homogeneum est cum rectangulo ex differentia secundi gradus ducta in quantitatem ordinariam facto. Et hanc in rem regulam assignavi generalem, sed cui hoc loco immorari nolo, quia ista profundiora nondum satis intelligi possunt initio hujus tractationis.

Porro lex justitiae etsi minus necessaria sit quam lex homogeneorum, tamen non minus est utilis; non tantum enim inservit ad calculi examen ulterius et exquisitius, erroresque alias facile irrepentes praecavet, sed etiam modum ostendit, id quod de una quantitate per calculum venati sumus, de alia statim scribendi sine calculo, ex principio similitudinis seu ejusdem relationis. Est autem lex justitiae vel communis omnibus literis calculi propositi, vel tantum quibusdam inter se, et aliis rursus inter se. Communis omnibus literis est in formula qualis $x^3 + y^3 + z^3 + 2x^2y + 2x^2z + 2xy^2 + 2xz^2 + 2y^2z + 2yz^2 + 5xyz$, ubi soleo magno calculi fructu compendiis uti in scribendo, nam hanc formulam breviter ita exprimo: $x^3 + 2x^2y + 5xyz$, ubi per x^3 intelligo omnes cubos ex literis x, y, z, per x^2y omnes quadrato simplices ex iisdem, et ita porro in aliis. Unde multa generalissima theoremata condi possunt, quae locum habent quantuscunque sit numerus literarum, ex. gr. cubus de $x + y + z + \omega$ etc. seu compendiose cubus ipsius x est $x^3 + 3x^2y + 6xyz$. Unde in specie explicando in quatuor literis cubus ab $x + y + z + \omega$ est

$x^3 +$	$3x^2y +$	$6xyz$
y^3	$3xy^2$	$6xy\omega$
z^3	$3x^2z$	$6xz\omega$
ω^3	$3xz^2$	$6yz\omega$
	$3x^2\omega$	
	$3x\omega^2$	
	$3y^2z$	
	$3yz^2$	
	$3y^2\omega$	
	$3y\omega^2$	
	$3z^2\omega$	
	$3z\omega^2$	

Unde si plures essent literae, verb. gr. sex, septem, decem etc., immensa orietur moles membrorum, quae tamen omnis hac brevi formula $\underline{|\,3\,|}\,x = x^3 + 3x^2y + 6xyz$ sufficienter exprimitur, beneficio justitiae inter literas observatae.

Interdum lex justitiae propria observatur inter literas quasdam, et rursus alia propria inter alias quasdam literas in calculo occurrentes, ut si sit, $\left.\begin{matrix}+a\\ b\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}+a\\ b\end{matrix}\right\} y^2 + abxy$, patet x et y servare justitiam inter se, item a et b etiam servare justitiam inter se, etsi a et x (v. gr.) inter se justitiam non servent.

Aequationes vero, ut id obiter addam, etsi non sit plane hujus loci, duobus modis justitiam servant, uno: si omnibus quantitatibus ab una parte positis et nihilo posito in altera, oritur formula observans justitiam, quae formula est nihilo aequalis; altero modo observatur justitia in aequatione, si quidem aequatione ad formulam redacta ambae literae non tractantur actu ipso eodem modo, quod tamen de una nunc factum est, fieri potest de altera, et vice versa, quod contingit simplice mutatione signorum. Ita si sit $xx + yy = 0$, inter x et y perfecte lex justitiae observatur; sed si sit $xx + x = yy + y$, tunc redacta aequatione ad formulam fit $\begin{matrix}+xx+x\\ -yy-y\end{matrix} = 0$, ubi aliter tractatur x quam y, revera tamen ambae literae pari jure utuntur lege justitiae non nisi in speciem violata, quoniam pari jure (mutatis signis) facere licet $\begin{matrix}+yy+y\\ -xx-x\end{matrix} = 0$, quemadmodum si ex priore $xx + yy = aa$ faciamus $xx = aa - yy$, lex justitiae etiam in speciem tantum violatur.

Caeterum etsi hactenus quantitates earumque formas simpliciores vel etiam formulas magis compositas tantum formaverimus explicate, seu actu ipso, possunt tamen et formari implicite seu indicative; nam saepe cum formulae sunt in se invicem ducendae, praesertim ubi sunt magis compositae, ductum illum non actu ipso peragimus (quod quomodo fieri debeat, pertinet ad explicationem operationum), sed tantum faciendum esse indicamus. Veluti si a idem sit quod $x+y$, et b idem sit quod $x-y$, erit ab idem quod $x+y$, $x-y$ seu $\overline{x+y}.\overline{x-y}$ seu $(x+y)(x-y)$. Imo si essent tres vel plures formulae, idem locum habet, ut si latera trianguli sint x, y, z, et a sit $+x+y-z$, et b sit $+x-y+z$, et ipa c sit $-x+y+z$, et f sit $+x+y+z$, ita ut tres priores sint excessus duorum laterum super tertium, quarta quantitas sit summa, reperietur, quartam radicis quadraticae ex quatuor invicem ductis seu $\frac{1}{4}\sqrt{abcf}$ dare aream trianguli ex datis tribus lateribus x, y, z, ut constat.

Hactenus non nisi additione, eaque aequalium, seu multiplicatione, eaque per aequalia seu potentia, et horum inter se combinationibus usi sumus, id est calculo directe progressivo, qui quidem semper succedit: nunc tempus est, ut admoneamus dari calculum regressivum, eumque non semper esse in potestate, et hic calculus est pro contrariis additionis, multiplicationis et excitationis potentiarum, nempe pro subtractione, divisione et radicum extractione. Scilicet quodvis licet addere cuivis, quidvis licet multiplicare per quodvis, et ab uno quoque datam potentiam excitare licet; sed non licet vicissim subtrahere quodvis a quovis, nec dividere quidvis per quodvis, nec extrahere quamvis radicem ex dato. Non licet, inquam, scilicet ut Numeri tales inde prodeant, quales hactenus tractavimus, integri scilicet, qui constent ex progrediente mensurae repetitione. Nam non licet subtrahere majus a minore, nec exacte dividere numeros multos v. g. primitivos, nec exacte extrahere radices, nisi ex certis numeris per multiplicationem in se invicem conflatis. Prodeunt tamen succedanea; nempe cum subtractio irrita est, numeri prodeunt negativi; cum divisio irrita est, numeri fracti; cum extractio irrita est, numeri surdi. Idemque est de quantitatibus, quod de numeris. Haec succedanea vere satisfaciunt et exacte, exhiberique etiam in natura actu ipso possunt.

Dantur et quantitates transcendentes, ipsis ut ita dicam surdis surdiores, quae tamen in Geometria et natura actu ipso exhibentur; sed de his suo loco clarius dicemus.

Dantur et quantitates inassignabiles, eaeque vel infinitae, vel infinite parvae seu infinitesimae, eaeque rursum varii gradus. Quae etsi per se non prosint, prosunt tamen non raro ad quantitates assignabiles per inassignabilium ambages inveniendas; et omnino in omni transcendentia intervenit aliqua consideratio infiniti aut infinitesimi.

Et generaliter, ut etiam initio notatum est, Mathesin universalem seu speciosam in duas partes dispesco, unam Algebraicam quae tractat de quantitate finita per finitas investigata, alteram transcendentem, quae tractat de quantitate finita quidem investiganda, sed interventu infinitarum, etsi postremo infinitae illae vel inassignabiles evanescant.

Itaque Matheseos universalis pars superior revera nihil aliud est quam Scientia infiniti, quatenus ad inveniendas finitas quantitates prodest. Unde merito visa est viris ingeniosis aliquid mirabilius, et ut sic dicam divinius in se habere.[1] Et cum inter potissima Matheseos universalis superioris instrumenta sit calculus differentialis a me introductus, de quo suo loco, saltem id nunc notabimus, differentiationem esse etiam operationem progressivam, adeoque semper succedentem, sed summationem esse operationem quandam regressivam quae non est semper in potestate.

Omnes tamen operationes regressivae seu coarctatae semper fieri possunt indicative, per notam scilicet suam propriam, etsi non semper explicate vel actu ipso. Sic a—b significat ab a debere subtrahi b. Similiter $\frac{a}{b}$, vel ut ego scribo, a:b significat a dividi debere per b. Et $\sqrt[2]{ab}$ significat radicem quadratam extrahi debere ex ab.

Utrum vero res per Calculum exacte fieri queat, an vero tantum organice per Geometriam et Naturam, tum demum apparebit, cum accedet literarum explicatio per numeros speciales. Ex. gr. si a sit 2 et b sit 8, ab erit 16, et succedet extractio, scilicet $\sqrt{ab}$ seu $\sqrt{16}$ idem est quod 4; sed si a sit 2 et b sit 3, ab erit 6, et $\sqrt{ab}$ erit idem quod $\sqrt{6}$, quo casu exacta extractio non succedit.

Interdum operatio explicata, ubi non prorsus succedit, saltem tamen proficit ad majorem simplicitatem. Sic si sit a—b, et ponatur a=b—c, patet a—b fore idem quod —c, nam fit a—b idem, quod b—c—b seu (b)—c(—b) seu —c, destructis scilicet destruendis quod circulis illis vel inclusionibus noto. Et soleo diversas destructiones diversis distincte notatis inclusionibus designare. Ut si sit a idem quod b—c, et l idem quod m—n, et proponatur a+l—b—m, ex hoc fiet (b)—c(+m)—n(—b)(—m), id est —c—n.

Idem est in divisione. Sit enim proposita fractio a:b seu $\frac{a}{b}$, ut vulgo designant; sit b=ac, fiet a:b = 1:c, seu a:b = a:ac, seu 1(a):(a)c seu = 1:c.

Sed et in extractionibus saepe per explicationem pervenitur si non ad sublationem omnimodam surdae per extractionem perfec-

tam, saltem ad surdam simpliciorem. V. gr. sit proposita radix $\sqrt{ab}$ et a sit 2 et b sit 6, tunc ab erit 12, et $\sqrt{ab}$ seu $\sqrt{12}$ idem erit quod $2\sqrt{3}$, quia 12 idem est quod 4.3 seu quod $\sqrt{4}$ in $\sqrt{3}$ seu quod $2\sqrt{3}$.

Quantitates negativae, cum a minori subtrahi debet majus, saepe oriuntur in calculo, et licet non videantur respondere ad quaestionem, reapse tamen respondent perfectissime, non tantum enim indicant, quaestionem fuisse male conceptam (etsi venia danda sit, quia praevideri non poterat), sed etiam quomodo fuerit concipienda et quid ad eam recte conceptam sit respondendum. Ex. causa quaeritur, quantum Titius habeat in bonis, subducto calculo eorum quae habet et quae debet; reperitur eum non modo nihil habere in bonis (nisi scilicet ipsum debitum, quod significat non habere, uti meritum sceleris), sed etiam habere minus quam nihil, id est acquisitionibus adhuc quibusdam opus ei fuisse ad nihil habendum. Itaque ostendit haec solutio, quaerendum fuisse non quid habeat (habet enim nihil), sed quid accipere eum oporteat, ut omnino liber intelligatur. Et patet, eum qui haeres ejus fiat sine inventarii beneficio, non lucrari, sed perdere tantam summam, quanta est signo — affecta. Itaque dum quis acquirit x seu a—b, reperitur autem postremo a—b seu x idem valere quod —c, apparet utique eum, qui x acquirit, revera perdere summam c. Unde vicissim patet, eum, si perdat x seu —c, lucrari, et judicem qui haeredi talem haereditatem x adimat, revera ipsi adjudicare summam c; atque adeo subtractionem quantitatis negativae esse additionem affirmativae ejusdem molis. Nempe quantitas x seu — c et quantitas +c habent eandem molem c, eritque —x idem quod c, id est $-\overline{-c} = +c$. Et hoc est quod vulgo dicitur, — in — facere +.

Similis quaestio in lineis fieri potest; v. gr. quaeritur quantum aliquis per horam progrediatur hinc versus Brunsvigam, si quovis quadrante horae progrediatur primum per passus 100 et mox durante adhuc eodem quadrante regrediatur per passus 150; dico absoluta hora progressum talis viatoris versus Brunsvigam fore passuum — 200, seu revera finita hora 200 passibus magis abfore a Brunsviga, quam inde aberat hora incepta, atque adeo non lucratum esse, sed sub progressus specie perdidisse. Et progressus iste poterit appellari falsus, cum revera sit regressus. Tales

errores, etsi non tam manifeste absurdi, quotidie contingunt in rebus humanis.

Numeri fracti habent Numeratorem et Denominatorem; et quidem si denominator sit unitas, numerus fractus revera est integer; sit enim fractus $a:b$ et sit $b=1$, fiet $a:b=a:1=a$. Idem contingere potest, si numerator possit exacte dividi per denominatorem, ut sit $a=bc$, fiet $a:b=bc:b=c$.

Unde patet, indicationes regressivas hoc habere, ut explicatione facta saepe possit evanescere signum regressivi, atque adeo sub fractis in speciem contineri integros, sub irrationalibus in speciem vel Radicalibus contineri posse et rationales; quemadmodum et suo loco patebit, sub transcendentibus in speciem contineri etiam posse ordinarias quantitates.

Porro omnis fractus vel purus est, vel integrum habet sub se latentem. Purus est, si numerator sit minor denominatore, ut $2:3$; sed integer admistus est, si numerator sit major denominatore, ut $11:3$, nam 3 detrahendo quoties fieri potest, patet detrahi posse ter, quia est quotiens, et restare 2 adeoque fieri $11:3 = 3+(2:3)$ seu $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$.

S u r d u s vel potius R a d i c a l i s seu radice affectus variat tum pro varietate extrahendae radicis, tum pro varietate eorum, ex quibus extrahenda est. Radix extrahenda est duplex, p u r a vel a f f e c t a. Pura est, cum potentia Radicis aequatur datae quantitati; affecta, cum formatum ex pluribus diversis radicis quaesitae potentiis tanquam membris, datae quantitati aequatur. Ex. causa si $x^2=6$ seu si quadratum ipsius x aequatur dato 6, fit $x=\sqrt[2]{6}$, quae est radix pura; idem est si sit $x^5=45$, fit enim $x=\sqrt[5]{45}$. Sed si sit $x^5+3x^2=45$, ita ut non soli surdesolido, sed propter ea triplo ipsius quadrati aequalis sit numerus 45, tunc extractio est non pura, sed affecta.

Et sciendum est, inventam rationem hactenus haberi omnes radices affectas aequationis quadraticae, cubicae et biquadraticae reducendi ad puras; sed hanc methodum non esse ulterius promotam ad aequationes surdesolidas et altiores, de quo suo loco.

Radix pura vel est quadratica vel cubica vel biquadratica vel surdesolida etc. adeoque variat tot modis quot variari possunt potentiae.

Quanquam, ut suo loco dicemus, radices sub potentiis, et

potentiae sub radicibus secundum certas considerationes comprehendi possunt, imo dantur sive potentiae sive Radices extraordinariae quae sub hactenus explicatis non continentur. Sed de his suo loco, nam pertinent ad Transcendentes.

Extractio fieri potest vel semel omnino vel per gradus. Ex. gr. extractio Radicis biquadraticae fieri potest vel extrahendo statim radicem biquadraticam, vel extrahendo primum radicem quadraticam, et ex residuo rursus radicem quadraticam. Ita interdum fit, ut succedat prior extractio radicis quadraticae, sed non posterior; v. gr. si debeat extrahi Radix biquadratica ex 4 seu si quaeratur $\sqrt[4]{4}$, idem est ac si quaeratur $\sqrt[2]{\sqrt[2]{4}}$, id est $\pm\sqrt[2]{2}$.

Radices (purae) variant ratione eorum, ex quibus sunt extrahendae, quae rursus vel sunt quantitates rationaliter expressae, vel quantitates radicales. Et radix quae sub vinculo suo continet plura membra, ex quibus unum ad minimum est radicale, dicitur universalis, ex. gr. $\sqrt{a+\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{(a+\sqrt{ab})}$.

Quantitates surdae, quae nullum continent radicem universalem, vel sunt simplices, quarum scilicet potentia aliqua (pura) est rationalis; vel sunt compositae, constantes ex membris duobus vel pluribus, quarum vel alterutrum est rationale vel ambo sunt irrationalia. De his sub nomine Apotomarum et similibus multum disseruit Euclides in libro decimo, sed quibus post hodiernos exprimendi modos immorari haud est necesse.

Illud notari sufficit, quantitatem potentia rationalem dici, cujus quadratum est rationale, verb. gr. $\sqrt{ab}$, nam ejus quadratum est ab, idque etiam in compositis locum habet. $\sqrt[2]{a+\sqrt{aa-bb}}+\sqrt[2]{a-\sqrt{aa-bb}}$ est quantitas potentia rationalis, nam ejus quadratum est $+a+\sqrt{aa-bb}+a-\sqrt{aa-bb}+2\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}$ in $\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$; jam $\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}$ in $\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$ est $\sqrt{bb}$ seu $\pm b$; ergo fit, hoc quadratum esse $+a+\sqrt{aa-bb}+a-\sqrt{aa-bb}\pm 2b$ seu $2a\pm 2b$. Unde $\sqrt{2a\pm 2b}$ idem est quod erat $\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}+\sqrt{a-\sqrt{aa-bb}}$; sed hoc obiter.

Caeterum ne quis putet, omnes quantitates radicales fortasse aliqua nobis incognita hactenus ratione posse fieri rationales, sciendum, Euclidem demonstrasse (quemadmodum et alias vel ex calculo haberi potest) quod multae quantitates sunt incommensurabiles inter se adeoque rationem inter has quantitates exprimi per

Numerum qui dicitur surdus, id est qui est incommensurabilis unitati. Fractus vero est unitati commensurabilis. Quod ita patet: sit fractus quicunque, ut 3 : 5; dividatur unitas in partes 5, patet unam quintam partem unitatis esse mensuram communem tam fractionis $\frac{3}{5}$, quam unitatis, nam $\frac{1}{5}$ in unitate constat contineri quinquies, in $\frac{3}{5}$ contineri ter. Caeterum quomodo continuatis operationibus per integros accedi possit ad fractos, et per rationales ad surdos, suo loco patebit.

Ex irrationalibus oriuntur quantitates impossibiles seu imaginariae, quarum mira est natura, et tamen non contemnenda utilitas; etsi enim ipsae per se aliquid impossibile significent, tamen non tantum ostendunt fontem impossibilitatis, et quomodo quaestio corrigi potuerit, ne esset impossibilis, sed etiam interventu ipsarum exprimi possunt quantitates reales.

Itaque quemadmodum saepe licet liberare formulam a signo — seu quantitate negativa, et a quantitate fracta, aut a surda; ita licet interdum calculum liberare ab imaginaria, idque vel operatione depressiva vel operatione regressiva, seu evolutiva, quod est desideratum, vel saltem operatione involutiva seu progressiva, quod tamen et ipsum suum usum habet, et aliquando ad evolutionem conducere potest. Sed haec tunc erunt explicanda, cum de operationibus agetur.

Nunc tantum nonnulla praelibare oportet, ut variae quantitatum species intelligantur.

Quantitates imaginariae oriuntur, cum radices quadraticae, vel involventes quadraticas extrahendae sunt ex quantitatibus negativis, ex. gr. $\sqrt[2]{-1}$, $\sqrt[4]{-1}$ (seu $\sqrt[2]{\sqrt[2]{-1}}$), $\sqrt[8]{-1}$ (seu $\sqrt[8]{\sqrt[2]{-1}}$), ad quas reduci possunt caeterae. Nam $\sqrt[2]{-2}$ idem est quod $\sqrt[2]{2}$ multipl. per $\sqrt[2]{-1}$.

Hae expressiones id habent mirabile, quod in calculo nihil involvunt absurdi vel contradictorii, et tamen exhiberi non possunt in natura rerum seu in concretis. Quomodo autem significent quaestionem male esse constitutam, apparet in exemplis, ubi facta debita mutatione in datis, evanescunt imaginariae. Nempe res ostendit, nos quaesiisse punctum in aliqua linea, quod tamen quaerendum erat extra ipsam, vel linea aliter erat assumenda. Res exemplo patebit: Datus sit (fig. 20) circulus ABC, quem tangat recta AE, ex cujus rectae puncto aliquo F educatur normaliter recta

FG occurrens circulo in punctis H et L, patet in casu quo F incidit in φ, ita ut fiat AF vel Aφ aequalis radio circuli, duo puncta occursus H et L coincidere in unicum punctum λ, et ex sectione fieri contactum. Sed si F adhuc magis removeatur ab A, ut si ponatur in (F), tunc ductam (F)(G) nullo modo posse occurrere circulo. Unde $\varphi\lambda$ est omnium FH maxima, et omnium FL minima. His positis, aliquis Analyticus curiosus merito quaerat, quid factura sit natura rerum, ut calculantem eludat, qui sumens AF radio majorem, nihilominus quaerat punctum occursus cum dato circulo, quod punctum tamen est impossibile. Sane idem plane instituitur calculus, sive AF sit major sive minor radio; imo calculus fieri potest generalis; quomodo ergo discemus impossibilitatem? cum nunquam quicquam hic in calculo assumatur, ut adeo prodire possit per se et sua natura absurdum. Sciendum igitur, naturam nihil aliud habuisse, quod inquisitioni impossibili imponeret, quam imaginarias quantitates seu radices ex negativis.

Res clarius patebit, si digressione non inutili ipsum calculum instituamus. Centrum circuli sit K. Jam AF sit x, FH vel FL sit y. Radius KA vel FM vel Kλ vel KH vel KL sit r, et HL bisecetur in medio M, patet esse KM aeq. AF seu x et HM quadrat. — KA quadrat. — KM quadrat. seu HM qu. $=rr-xx$ seu $HM=\sqrt{rr-xx}$, et $FL=FM$ (seu r) $+LM$ seu HM. Ergo FL seu $y=r+\sqrt{rr-xx}$, seu generaliter $y=r\pm\sqrt{rr-xx}$, ut scilicet diversa puncta H et L uno eodemque calculo ambiguo designentur, quanquam suffecerit scribere $y=r+\sqrt{rr-xx}$, quoniam omnis radix per se ambigua est, de quo suo loco. Hinc si $rr-xx$ sit $=0$, fit $y=r$ et evanescit irrationalitas adeoque et ambiguitas; et patet in casu cessantis ambiguitatis seu coincidentis utriusque puncti H et L, ipsam AF seu x coincidere cum r (eo ipso dum $rr-xx=0$ seu $xx=rr$) adeoque et y seu $\varphi\lambda$ fieri aequalem ipsi radio r seu AK. Sed si x vel AF ponatur major quam radius r vel AK, tunc $rr-xx$ est quantitas negativa, quippe residuum post detractionem majoris xx a minore rr. Hic ergo fuit modus, quo natura indicare potuit, y in eo casu quo x est majus quam r, esse impossibile.

Unde discimus, quaestionem non esse bene constitutam, et vel debere circulum ABC sive radium ejus r assumi majorem, vel eodem manente circulo, ipsam x vel AF assumendam minorem, ut quaesitum obtineri possit. Et nisi darentur tales quantitates imaginariae in calculo, impossibile foret institui calculos generales,

seu valores reperiri possibilibus et impossibilibus communes, qui sola differunt explicatione literarum.

Superest, ut nonnihil addam de quantitate inassignabili, sive ea sit infinite parva, sive infinita, saltem ut aliqua de illis notitia habeatur; caetera enim suo loco explicabuntur. Recta TC (fig. 21) curvam AC(C) secet in duobus punctis C et (C), ex quibus demittantur ad axem AB perpendiculares CB et (C)(B). Jam ex C in (B)(C) agatur normalis CD, patet CD esse differentiam abscissarum AB et A(B); similiterque D(C) esse differentiam ordinatarum BC et (B)(C). Et si recta TC axi AB occurrat in T, patet triangula TBC et CD(C) esse similia. Sed in casu contactus, cum recta TC curvam AC(C) non secat sed tangit, seu cum puncta C et (C) coincidant vel quod eodem redit, infinite parvo (sive infinitesimo) distant intervallo, patet triangulum CD(C) fieri inassignabile, constans ex lateribus infinite parvis, et CD esse elementum abscissae et D(C) esse elementum ordinatae, et C(C), quemadmodum et suo loco patebit, esse elementum curvae; adeoque Triangulum hoc inassignabile CD(C) simile esse Triangulo assignabili seu ordinario TBC, imo ope hujus Trianguli inassignabilis seu interventu rationis inter quantitates inassignabiles CD et D(C) (quam noster calculus differentialis exhibet per quantitates ordinarias seu assignabiles) inveniri rationem inter quantitates assignabiles TB et BC, adeoque modum ducendi tangentem TC.

Caeterum non tantum quantitatis infinite parvae seu infinitesimae, sed etiam quantitatis infinitae usus est in calculo. Ex. causa constat ex opticis, cum radii diversi veniunt ex eodem puncto, idque punctum ponitur infinite vel inassignabiliter vel ut subinde loqui soleo, incomparabiliter abesse, radios fieri parallelos. Unde radii ex sole venientes finguntur paralleli, et directiones gravium etsi ad idem terrae centrum tendant, tamen ob magnam hujus centri distantiam, pro parallelis habentur, quasi sol aut centrum infinite abessent.

Sed quia mirabitur aliquis, quomodo in calculo assumtis meris quantitatibus finitis, prodire tamen possit aliqua quantitas infinita, sciendum est $\frac{1}{0}$ seu $1:0$ esse quantitatem infinitam, adeoque unitatem esse mediam proportionalem inter nihilum vel quasi et infinitum, adeoque si quantitas aliqua ordinaria dividatur per nihilum, quotientem esse infinitum. Talis autem divisio in calculo contingere potest, quod exemplo ostendam. Sit (fig. 22) ang[redacted]

rectus KAH, cujus crura utcunque producta intelligantur et in uno ejus latere sumatur recta AH. Descripta sit curva LC talis naturae, ut quocunque ejus puncto sumto, ut C, atque inde ad rectam AH demissa perpendiculari CB, fiat semper rectangulum ABC (seu sub AB et BC) aequale eidem constanti quadrato ab AH, quam curvam ex Conicis constat esse Hyperbolam. Jam AH vocetur a, et HB vocetur x, fiet AB = a—x, et BC vocetur y. Ergo ex dicta curvae proprietate, cum sit AB in BC aequ. AH quadr. seu $\overline{a-x}y=aa$, utique fiet $y=aa:,a-x$ seu valor ipsius y sive BC oritur, si aa dividatur per a—x. Sed quando B incidit in A, ita ut AB evanescat seu fiat aequalis nihilo, fiet $a=x$, seu $AH=HB$, ergo $a-x=0$. Ergo in eo casu fiet $y=aa:0$ seu $\frac{aa}{0}$, ergo y est quantitas infinita, adeoque recta normalis ad ipsam AH educta ex A versus Hyperbolam est infinita, et licet continue ad eam accedat, nullum tamen punctum assignari potest, quo ei occurrat, ideoque solet dici Asymptota, quae res multis incomprehensibilis visa est, integrisque olim libris materiam dedit. Sed haec ideo tantum paucis libare placuit, ut infinitae magnitudinis designatio per finitas, ususque hujus designationis intelligeretur.

Superesset transcendentium finitarum uberior explicatio; sed hanc rem in locum convenientiorem rejicere maluimus, ut tandem tractationi de Notione simplici Analyseos Mathematicae, variisque generibus numerorum sive Quantitatum Matheseos universalis tractationi subjectarum, variisque connotationibus quantitates afficientibus, tanquam jacto jam fundamento, finem imponamus.*)

---

*) Am Schlusse des Concepts hat Leibniz hinzugefügt: De Enuntiationibus, Argumentationibus et Methodis postea dicemus.

VI.

PRIMA CALCULI MAGNITUDINUM ELEMENTA DEMONSTRATA IN ADDITIONE ET SUBTRACTIONE, USUQUE PRO IPSIS SIGNORUM + ET —.

(1) **Magnitudo** est quod in re exprimitur per numerum partium determinatarum.

Scholium. Ex. gr. orgyiae (quantum homo brachia extendere potest) magnitudo censetur exprimi numero sex pedum, vel (quia pes 12 pollicum est) per numerum 72 pollicum; Ulnae vel cubiti magnitudo per numerum unius et dimidii pedis, vel per unum pedem et sex pollices.

(2) a, b et similes notae significant numeros rerum exprimentes, qui scilicet ipsis debent assignari, posito aliquam esse rem, cui unitas assignetur, quam **Mensuram** appellamus.

Scholium. Sit pes p, pollex π, orgyia a, cubitus c, p erit 12π, a erit 6p vel 72π, c erit $1p+\frac{1}{2}p$ vel $\frac{3}{2}p$ vel $1p+6\pi$ vel 18π. Hinc si p (pes) sit mensura vel si ei assignetur unitas, a erit 6, c erit $\frac{3}{2}$, π erit $\frac{1}{12}$; sin π (pollex) sit mensura vel unitas, p erit 12, c erit 18, a erit 72. Si l sit latus quadrati, diagonalis d erit ut $l\sqrt{2}$, vel si l sit 1, d erit $\sqrt{2}$.

Homogenea inter se sunt, quorum magnitudines eadem mensura pro unitate sumta per numeros exprimi possunt.

(3) **Aequalia** sunt quorum unum alteri substitui potest salva magnitudine. Et ita designatur $a=b$, id est ipsi a ubique substitui potest b in magnitudinum calculo, et talis enuntiatio dicitur **aequatio**, velut in numeris $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, in lineis pes = 12 pollices vel $p=12\pi$.

(4) **Axioma.** $a=a$.

(5) **Theorema.** Si $a=b$, sequitur esse $b=a$.

Nam quia $a=b$ (ex hypothesi), ergo pro a (per 3) substitui potest b. Substituatur ergo b loco priore ipsius a in aequatione $a=a$ (vera per axioma 3), fiet $b=a$. Quod erat demonst.

(6) **Theorema.** Si $a=b$ et $b=c$, erit $a=c$, vel ut vulgo enuntiant: quae sunt aequalia uni tertio, aequalia sunt inter se.

Nam quia $a=b$ (ex hypothesi priore), poterit in ea substitu-

(per 3) pro b ipsi aequale (ex hyp. posteriore) c, et ex $a=b$ fiet $a=c$. Q. E. D.

Additio.

(7) Definitio. Si pluribus magnitudinibus simpliciter positis, ut a, b, ex hoc ipso fiat nova ipsis homogenea, ut m, operatio dicetur Additio, nova aequatio dicetur summa et repraesentatio erit talis $+a+b=+m$. Et + vel plus erit signum additionis, id est simplicis positionis. Idem est in pluribus, ut si $+a+b+c=m$.

Scholium. Res scilicet redit ad simplicem additionem numerorum, per quos ob eandem rem pro unitate positam magnitudines exprimuntur.

(8) Theorema. $+a+b=+b+a$.

Patet ex praecedenti, quia ibi nihil refert, quo ordine collocentur; sufficit unum cum alio poni.

(9) Explicatio. Signum + omni notae magnitudinis sine signo sumtae praefigi potest, aut praefixum intelligi. Sed initio saepe omitti solet, itaque $a=+a$ et $a+b=+a+b$. Hinc et $++a=+a$, ut si ponatur $f=+a$, fiet $a=+a=f$ (ex hypoth.) $=+f=++a$.

(10) Explicatio. $+0+a=a$, seu 0 est signum nihili, quod nihil addit.

(11) Theorema. Si aequalibus addas aequalia, fiunt aequalia, seu si sit $a=l$ et $b=m$, erit $a+b=l+m$.

Nam $a+b=a+b$ (per 3), itaque in altero $a+b$ pro a ponendo l (ex hyp. priore) et pro b ponendo m (ex hyp. posteriore) quod licet (per 2), utique ex $a+b=a+b$ fiet $a+b=l+m$. Q. E. D.

Subtractio.

(12) Ab a subtrahere b significat in magnitudine, in qua ponitur a, sumere aequalem ipsi b, eamque tollere, idque indicatur scribendo: $a-b$ vel $+a-b$. Hinc si in magnitudine, in qua est a, nihil aliud esse intelligatur quam b, restat nihil, adeoque $+b-b=0$. Et — (signum denotans minus vel subtractionem) significat id quod positum fuit vel ei aequale, seu uno verbo ejus quantitatem positam rursus tollendo, perinde esse quoad magnitudinem sublatam ac si ponendo eam et rursus tollendo actum esset nihil. Si quid aliud adest, residuum appellatur.

(13) **Theorema.** Si ab aequalibus auferas aequalia, residua sunt aequalia, seu si sit $a=l$ et $b=m$, erit $a-b=l-m$.

Nam $a-b=a-b$ (per 3), in posteriore pro a ponatur l (ex hyp. 1.) et pro b ponatur m (ex hyp. 2.), ergo ex $a-b=a-b$ fiet $a-b=l-m$. Q. E. D.

(14) **Theorema.** Si a quantitatibus duabus auferas aequalia, et residua sint aequalia, ipsae quantitates sunt aequales, seu si sit $a-b=l-m$, et $b=m$, erit $a=l$.

Nam si aequalibus $a-b=$ (ex hyp. 1) $l-m$ addas aequalia (ex hyp. 2.) b et m, nempe priori b, posteriori m, fient (per 11) aequalia $a-b+b=l-m+m$, id est (per 12) $a=l$. Q. E. D.

(15) **Theorema.** Si ab aequalibus auferas duas quantitates, et residua sint aequalia, erunt quantitates aequales, seu si sit $a=l$ et $a-b=l-m$, erit $b=m$.

Nam $a-b=l-m$ (per hyp. 2.), ergo addendo utrobique aequalia $b+m$ et $b+m$, fient (per 11) aequalia $a-b+b+m=l-m+b+m$, ergo (per 12 junct. 8) $a+m=l+b$, a quibus aequalibus si aequalia a et l (per hyp. 1.) auferantur, fient (per 13) residua aequalia $m=b$. Q. E. D.

(16) **Theorema.** Si $a=b+e$, erit $a-b=e$.

Nam ab utroque aequalium auferendo b fient aequalia $a-b=b+e-b$, id est (per 12) $a-b=e$. Q. E. D.

(17) **Theorema.** Si $a=-b$, erit $b=-a$.

Nam quia $a=-b$ (ex hyp.), ergo addendo aequalibus istis aequalia b et b (per 3) fient (per 11) aequalia $a+b=-b+b$, ergo (per 12) $a+b=0$ seu (per 16) $b=0-a$ seu (per 10) $b=-a$. Q. E. D.

(18) **Theorema.** $-a-\overline{-a}=0$.

Nam $-a$ designetur per f seu sit $-a=f$. Jam $f-f=0$ (per 3), ergo pro f ponendo aequale ipsi (ex hyp.) $-a$, fiet $-a-\overline{-a}=0$. Q. E. D.

(19) **Theorema.** $--a=+a$.

Nam $-a--a=0$ (per 18) et $0=-a+a$ (per 12), ergo (per 6) $-a--a=-a+a$, unde utrobique addendo a fient (per 11) aequalia $+a-a--a=-a+a+a$, et proinde (per 12) $0--a=0+a$ seu (per 10) $--a=+a$. Q. E. D.

(20) **Theorema.** $-+a=-a$ aut $+-a=-a$.

Patet ex 9.

(21) **Theorema.** In omni aequatione licet membrum abjicere ab una parte et signo contrario affectum ponere in altera.

Sit $f+a-b=h$, dico fore $f=h-a+b$. Nam in aequatione (ex hyp. vera) $f+a-b=h$ addatur utrobique $-a+b$, fiet inde $f+a-b-a+b=h-a+b$, id est (per 12) $f=h-a+b$. Q. E. D.

(22) **Explicatio.** Quod de formula sub vinculo comprehensa significatur, intelligendum est de singulis membris vinculo inclusis, ut $-(+a-b)$ vel $-\overline{+a-b}$ significat $-(+a)-(-b)$ seu (per 9) $-a--b$, id est (per 19) $-a+b$.

(23) **Theorema.** Addenda ascribuntur signis retentis, seu $f+(a-b) =$ (per 22) $f+a-b$.

Nam $f+(a-b)=f+a+-b=$ (per 20) $f+a-b$.

(24) **Theorema.** Subtrahenda ascribuntur signis mutatis, $+$ in $-$, et $-$ in $+$, seu $f-(a-b)=f-a+b$.

Nam $f-(a-b) =$ (per 21) $f-a--b=$ (per 19) $f-a+b$. Q. E. D.

Aliter: Sit $a-b=e$, ajo esse $-e=-a+b$ seu $f-e=f-a+b$. Nam $+e-e=+a-b-a+b$ (per 12), ergo ab aequalibus tollendo aequalia, illinc $+e$, hinc $+a-b$, restabunt (per 18) aequalia $-e$ et $-a+b$. Q. E. D.

Applicatio calculi ad res, ubi de toto, parte, majore, minore, positivo et privativo.

(25) Explicatio. Si explicando notas formulae per res ipsas, verbi gratia per lineas rectas sibi addendas vel subtrahendas, evanescat tandem subtractio vel signum $-$, ita ut semper destruendo id quod est signo $-$ affectum (verb. gr. $-b$) per aequalis molis signo $+$ affectum (nempe $+b$), tandem nihil aliud remaneat in formula vel ei aequivalente se, ex. gr. linea, quam quod sit affectum signo $+$: tunc tota formula dicitur designare quantitatem positivam; sin contra postremo signum $+$ evanescat, remanente $-$, tunc formula denotat quantitatem privativam seu nihilo minorem, hoc est talem, ut ad ipsam addenda sit ipsius moles, quo fiat nihil. Exempli causa si esset formula $f+a-b$, et esset $f+a=e+b$, et hae literae omnes forent quantitates positivae, quae explicatae per res, nullum in ultima resolutione deprehenderetur continere signum $-$, patet $f+a-b$ significare $+e$. Nam in hac formula pro $f+a$ substituendo $e+b$, fiet $e+b-b$, id est e. Contrarium esset, si in ultima resolutione nul-

lum remaneret signum $+$, ut si esset formula $f+a-d$, et esset $d=f+a+g$, tunc $f+a-d$ significabit $-g$. Nam pro $-d$ in formula $f+a-d$ substituendo valorem fiet $f+a-f-a-g$, id est $-g$. Hinc patet, quando duae quantitates signis contrariis affectae conjunguntur, semper alterutrum signorum penitus posse tolli per explicationem unius quantitatis, quatenus continet alteram quantitatem (vid. 12). Patet etiam, ut formula $f+a-d$ (quae quantitatem privativam $-g$ significat) fiat nihil, addi debere g (seu $+g$, ejusdem molis cum $-g$, sed affectum contrario signo) seu esse $f+a-d+g=0$, quia $f+a-d=-g$; jam $-g+g=0$ vel resolutione resumta $f+a-d=f+a-f-a-g$, ergo $f+a-d+g=f+a-f-a-g+g$, id est 0.

Scholium. Inspiciantur figurae duae, ubi in priore (fig. 23) progressus fit per lineam rectam f, et huic in directum adjectam rectam a, regressus autem (per puncta designatus) ab extremo adjectae a, in eadem recta totali $f+a$ fit per rectam b: ita in recta $f+a$ remanet e, adeoque est $f+a-b=+e$. In posteriore (fig. 24) progressus fit ut ante, sed regressus in eadem $f+a$ fit per ipsam rectam d majorem quam $f+a$, et excedentem quantitate g. Unde talis progressus est falsus sive putatitius, et qui sic progredi se putat, revera regressus est quantitate seu mole g, et est $f+a-d=-g$. Itaque signum $+$ designat progressum, signum $-$ regressum, et quod in lineis, idem in aliis augmentis et decrementis intelligi potest, velut in accepto et expenso.

(26) Definitio. Si sit $a+b=f$ et sint ipsorum a, b, f quantitates positivae, dicetur f totum et a, b dicentur partes. Idemque est, si sint plura, ut $a+b+c=f$. Requiritur igitur, ut quantitates sibi addi adimive possint, simulque ut sint positivae.

(27) Definitio. Minus est, quod aequale est parti alterius nempe majoris, verb. gr. sit $f=a+b$ et $g=a$, dicetur f majus, et g minus, et scribetur f ⌝ g et g ⊓ f.

Scholium. Caeterum cautio in definitione totius et partis expressa, adeoque etiam ad majus minusque pertinens, nempe ut a, b, f etc. sint hoc loco quantitates positivae, necessaria est, alioqui si fiat $a+b=m$, non sequitur m esse majus quam a vel b, aut haec esse partes ipsius m, etsi sint membra formulae aequalis ipsi m; nam fieri potest, ut b (verbi gratia) sit revera quantitas negativa aequalis ipsi $-d$, posito d esse positivam, et tunc a

existente positiva pro $a+b=m$ fieret $a-d=m$. Unde patet, a fore majus quam m; tantum abest, ut possit esse ejus pars.

(28) **Theorema.** Pars est minor toto, vel totum est majus sua parte.

Sit $a+b=f$, erit a minus quam f. Nam a aequale est ipsa a (per 3); jam quod aequale ipsi a est minus quam $a+b$ seu quam f (per 27), ergo a est minus quam f. Q. E. D.

(29) **Definitio.** Homogenea vel **comparabilia** sunt, quorum unius quantitas ab alterius quantitate semel aut saepius subtrahi potest, ut subtractum relinquat nihil aut aliquid se minus.

(30) **Theorema.** Duo homogenea tunc sunt aequalia, si alterum altero nec minus sit nec majus.

Nam homogenea sunt (ex hyp.), ergo (per 29) quantitas unius eorum ab alterius quantitate semel subtracta aut relinquit nihil, quo facto erunt aequalia (per 12), aut relinquit aliquid (se rursus minus vel majus), et tunc parti ejus, a quo subtractio facta est, aequale erit (vid. 12) adeoque (per 27) erit minus. Q. E. D.

(31) **Theorema.** Majus majore est majus minore, seu si $a \sqcap b$ et $b \sqcap c$, erit $a \sqcap c$.

Nam quia $a \sqcap b$ (hyp. 1), erit (per 27) $a=b+l$, et quia (hyp. 2) $b \sqcap c$, erit (per 27) $b=c+m$, qui valor ipsius b substituatur (per 3) loco ipsius b in aequatione inventa $a=b+l$, et fiet inde $a=c+m+l$, ergo (per 27) $a \sqcap c$. Q. E. D.

(32) **Problema.** Invenire b **medium arithmeticum** inter a et c, id est ita ut b tanto sit majore a minus quanto est minore c majus.

Constructio. Addantur in unum a et c, et summae dimidium erit b quaesitum.

Nam quia (ex hyp. constructionis) b est dimidium ipsius $a+c$, erit duplum b aequale duobus dimidiis, hoc est toti $a+c$, seu $a+c$ erit aequale duplo b, sive fiet $a+c=b+b$, ergo (per 21) $a-b=b-c$, id est erunt **differentiae** extremorum a medio b aequales, sive **excessus** a super b aequatur excessui b super c. Q. E. D.

VII.

CONSPECTUS CALCULI.

(1)	Numeri simplices	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	Literae	0	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l
	Lineae	N	NA	NB	NC	ND	NE	NF	NG	NH	NK	NL
		A	AB	AC	AD	FL	EL	DL	CL	BL	AL	
		B	BC	BD	etc.							
		etc.	etc.	CE	GL							
		L	KL	etc.								
				HL								
(3)	Scala	N	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L

(4) Totum: e, 5, NE. Partes: NB, BE; b, c; 2, 3.

(5) Totum est aequale omnibus partibus, d aequ. b+c; 5 aequ. 2+3; NE aequ. NB+BE.

(6) Majus una, d ⌈ c, 5 majus quam 3.

(7) Pars minor toto, c ⌉ d, 3 minus quam 5.

(8) Additio simplex: si ad 2 addas 3, fiet 2+3 sive 5; b+c sive e; 2a+3a aequ. 5a; NB+BE aequ. NE; sive si ab N progrediaris in B et a B progrediaris in E, progressus eris ab N in E, cadet autem punctum B inter N et E.

(9) Signum +, plus, initio omitti solet, 2+3 aequ. +2+3.

(10) Subtractio simplex: si ab e subtrahas b, fit e—b sive c; 5—2 sive 3; NE—EB aequ. NB; sive si ab N progressus sis in E, et ab E regressus in B (et cadet B inter N et E), progressus eris ab N in B.

(11) Si aequalibus g | 7, et c+d | 3+4 addas (auferas) aequalia e | 5, et b+c | 2+3, fient aequalia. g+e aequ. c+d+b+c seu g+e aequ. b+2c+d. 7+5 aequ. 2+2.3+4 seu aequ. 2+6+4 (g—e aequ. c+d—b—c aequ. +d—b, 7—5 aequ. 4—2)

(12) Nihil, 0, nec addit nec minuit: AN±N aequ. AN; 1+0 aequ. 1—0 aequ. 1; et contra, quod nec addit nec minuit, est nihil. Item si a+n aequ. a—n, tunc n erit 0. Item 0+0 aequ. 0. Et si n+n aequ. n, tunc n erit 0.

(13) Si aequalium unum ab altero subtrahatur, restat nihil, et contra, ut a—a aequ. 0; 3—3 aequ. 0; NC—CN aequ. N;

sive si ab N progressus sis in C et a C regressus in N, progressus erit nullus; c — a — b (aequ. c — c) aequ. 0. Et contra, si c — a — b aequ. 0, erit c aequ. a + b.

(14) Si majus subtrahatur a minore, restat minus nihilo, ut + b — c (aequ. $\underbrace{+b-b}_{0}$ — a) aequ. 0 — a vel aequ. — a, seu 2 — 3 est — 1. Si tibi debeantur 2, et tu vicissim debeas 3, compensatione facta debebis 1. Si in bonis habeas 200 et debeas 300, tunc patrimonium tuum erit minus nihilo seu 0 — 100, et 100 acquirere debebis, antequam liber fias nihilque purum habere incipias. Si ab A duos facias passus antrorsum versus L seu si progressus sis AC, et a C tres facias passus retrorsum CN, progressus tuus ab A versus L erit revera regressus ab A in N uno passu, + AC — CN aequ. — AN, cadet autem punctum A inter C et N.

(15) Multiplicatio est additio aequalium, ut b + b + b est 3b. Numerus repetendus b est multiplicandus, numerus repetitionum 3 est multiplicans, productum 3b seu f | 6, vel quia 3 est c, loco 3b scribitur cb | f vel 2⌢3 sive 2.3 | 6. Eodem modo in tribus literis $\underbrace{bc}_{f}$ e | 2. 3. 5 | f e | 6. 5 | 30.

(16) In additione et subtractione vel multiplicatione ordo nihil facit, ut + b + a aequ. + a + b, b — a aequ. a — b, bc aequ. cb, 2⌢3 idem quod 3⌢2, bis tria idem quod ter duo.

(17) Dimensionis in dimensionem ductus seu quantitatis, exempli causa latitudinis AB (fig. 25) applicatio ad quamlibet partem longitudinis BE, est realis exhibitio multiplicationis mentalis, et quidem si angulus ubique sit idem, tunc prodit rectangulum planum NBEP, vel compendio NBE (sive NB⌢BE) aut etiam NE. Cumque longitudo BE sit 3 pedum linearium, et NE duorum, itaque si ducas ter pedem linearem in bis pedem linearem, ter quidem duces in bis fit 6, et pedem linearem ducendo in pedem linearem fit pes superficialis, nempe quadratus NR. Itaque rectangulum NBE erit 6 pedum quadratorum. 3p in 2p dat 6pp, quodsi 3p aequ. c et 2p aequ. b, fiet 6pp aequ. bc. Itaque hoc rectangulum dicitur esse duarum dimensionum, ex latitudine b in longitudinem c. Si jam altitudo NQ (fig. 26). 4p vel d ducatur eodem modo in rectangulum NBEP seu 6pp vel bc, fit (12ppp vel) $12p^3$ vel bcd, id est rectangulum solidum EPNQ sive BPQ constans 12 pedibus cubicis; cuilibet enim pedi quadrato NR insistit columna NRQ

ex quatuor pedibus cubicis. Itaque hoc rectangulum solidum bcd est trium dimensionum. Neque hoc tantum in lineis, sed et in aliis applicationibus rei unius in quamlibet partem alterius locum habet. Ut si bonitas intrinseca seu pretiositas rei ducatur in quantitatem mercium seu bonitatem extrinsecam inde fit rei valor seu pretium, quod est duarum dimensionum, ut in argento puro vel mixto apparet, eadem enim bonitas intrinseca, sive idem mixturae vel alligationis gradus spectatur in qualibet particula. Idem est in aliis rebus dividuis in partes similes ejusdem pretiositatis cum toto, ubi duplo major quantitas est duplo pretiosior, unde ICti has res vocant quantitates. Secus vero est in illis quas ICti vocant species, qualis est equus, imo et adamans, qui physice quidem semilaris est, at non civiliter, quoniam si rumpatur, partes omnes simul tanti non sunt, quanti erat totum. Quod secus est in argento, vino, frumenti acervo. Itaque in his duplex ista aestimatio quantitatis et pretiositatis conjungenda est, non per additionem, sed per multiplicationem. Exempli causa, si auri bonitas intrinseca seu pretiositas sit duodecupla bonitatis argenti, tunc librae auri pretium duodecuplum erit pretii librae argenti, sed trium librarum auri pretium erit pretii librae argenti ter duodecuplum, ducta pretiositate in quantitatem.

(17) Quando quantitates, quae in se invicem ducuntur, sunt aequales, oriuntur P o t e s t a t e s.

a^0	a^1 (vel a)	a^2 (vel aa)	a^3 (vel a^2a)	a^4	a^5	a^6
1	1	1	1	1	1	1
b^0	b^1	b^2	b^3	b^4	b^5	b^6
1	2	4	8	16	32	64
l^0	l^1	ll	l^3	l^4	l^5	l^6
1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Unitas	Radix Latus	Quadratum	Cubus	Biquadratum seu quadrati quadratum	Surde-solidum	Quadrati-cubus
Gradus						
Nullus,	Primus,	Secundus,	Tertius,	Quartus,	Quintus,	Sextus etc.

(18) l^bl^c (seu l^b in l^c vel $l^{b}\frown l^{c}$) aequ. $l^{\underline{b+c}}$ aequ. l^e, seu l^2l^3 aequ. l^5, seu 100 in 1000 dat 100.000, et 4 in 8 dat 32. Numeri autem qui literae superscribuntur, sunt i n d i c e s seu e x p o n e n t e s graduum. Uti vero l^{2+3} significat l^2l^3 seu l^5, ita $l^{2\cdot 3}$ seu l^6 significat l^2 cubice seu ter in se multiplicatum seu $l^2l^2l^2$, vel l^3 quadratice sive bis in se multiplicatum l^3l^3. Itaque additio

exponentium significat multiplicationem potestatum, multiplicatio exponentis per alium exponentem significat potestatem potestatis. Ita 1^{2+3} est quadratum in cubum, at $1^{2\cdot3}$ est quadraticubus seu cubi quadratum.

(19) Quadrat. dupli lateris non est duplum prioris, sed		quadruplum
tripli	triplum	noncuplum
quadrupli	quadruplum	sedecuplum
etc.	etc.	etc.

Ita (fig. 27) quadratum super recta AB est quadruplum quadrati super recta NH. Quadratum ab AN continet novies quadratum a tertia ipsius AN parte AΨ. Et $\boxed{2}$ GH aequ. 16 $\boxed{2}$ Gφ seu quadr. HM aequ. 16 quadr. $\varphi\Sigma$, quia HG aequ. 4Gφ. Sit Gφ pes seu p, et GH sit 4p sive d, $\varphi\Sigma$ erit pp et HM erit dd aequ. 4p 4p seu 16pp sive 16 pedum quadratorum. Hinc si quis aream HM sternere velit lapidibus quadraticis longitudine AB, quos ponamus esse bipedales, tantum quarta parte lapidum indigebit quos opus haberet, si vellet pedales longitudine AN. Unum enim quadratum bipedale A$\varDelta$ tantum spatii occupat, quantum quatuor pedes quadrati TN, NH, HM, MT. Itaque canalis, cujus capacitas sive lumen vel sectio per medium sit A$\varDelta$, duplo crassior quam AG quadruplo plus aquae continebit.

(20) Cubi dupli lateris est octuplus, tripli 27plus, quadrupli 64plus etc. Inspiciatur (fig. 28) cubus ABCDEF vel (compendiosius) ACF, nempe super latere AB, et sit alius cubus GHIKLM vel GIM a latere GH dimidio ipsius AB; patet cubum majorem continere octo cubos tales qualis est minor, nempe cuilibet quatuor quadratorum baseos A$\varDelta$ insistent duo, ipsi GD insistent GHIKLM et QIΩDYL, super TM duo TGQLVF, SQXYEV, super NH duo NBOIQS et POCΩXQ, super AG duo ANPQST et RPZXWS. Ita eodem modo si cuilibet quadratillo quadrati AG imponas tres cubulos, habebis 27 cubulos implentes cubum majorem ab AG.

(21) Dimensionum natura hactenus non satis intellecta est, nam licet in spatio per se considerato non dentur nisi tres dimensiones, in corpore tamen dantur multo plures. Etsi enim in solis figuris supra solidum ascendi non possit, non tamen altiores Potestates sive res quatuor aut quinque aut plurium dimensionum imaginariae sunt, ut vulgo putant, quod sic ostendo. Cum dimensio sit realis exhibitio multiplicationis (per superiora), hinc quoties nova quantitas accedit, quae cuilibet prioris parti inest vel appli-

catur, nova accedit dimensio. Sint duo cubi: ACF aureus, cujus latus sit b | 2, eritque ejus moles b^3 sive 8, et GIM argenteus, cujus latus sit a | 1, eritque moles ejus seu contentum a^3 | 1. Sit jam auri gravitas specifica etiam ut b, argenti ut a, id est quia b duplo majus quam a, seu a est 1 et b est 2, et aurum paulo minus quam duplo gravis est argento paris molis seu spatii; ideo ponamus nunc quidem gravitatem specificam auri esse duplam specificae argenti, ergo ducendo b in b^3 gravitatem specificam auri in cubi aurei molem (cuilibet enim particulae haec gravitas inest) fiet b^4 seu 16 pro pondere cubi aurei, at a (gravi. specifica argenti) in a^3 (cubi argentei molem) dabit a^4 seu 1 pondus cubi hujus argenti; habemus ergo duo quadrati-quadrata realia, facta ex quatuor dimensionibus: longitudine, latitudine, altitudine, gravitate specifica. Et iisdem positis si accedat quinta dimensio, nempe impetus, quem labendo acquirerent, ut si aureus labatur duplo tempore diutius argenteo, percussio (quae est quinque dimensionum) ab aureo cubo erit b^5, 32, ab argenteo a^5, 1, et habemus duo surdesolida realia. Et quia motuum proportiones pro arbitrio assumi possunt, manifestum est est ascendi in infinitum.

(22) Unitas non multiplicat in numeris, 1.1 seu 1⌢1 est 1, 1⌢2 seu 1.2 est 2, 1b est b. Multiplicat tamen in rebus ipsis seu attollit dimensiones, quando per Unitatem intelligitur aliqua Mensura pro Unitate assumta, ut pes; nam 1p in 1p dat 1pp seu pp sive pedem quadratum. Ita si a sit 1, tunc a^2 erit 1, sed si 1 significet unum pedem, tunc a erit unus pes linearis, a^2 unus pes quadratus, a^3 unus pes cubus. Itaque unitas subintellecta supplet numerum dimensionum, ut (in fig. 25 supra) rectang. NBE aequ. bc aequ. 2.3 seu 6, intellige 6 unitatum quadratarum seu $6a^2$. Jam 6 aequ. h, ergo bc aequ. h, subintellige bc aequ. ha seu NB⌢BE | 2.3 aequ. NS⌢ST | 6⌢1, linea enim h sive NS rectangulo bc aequalis esse non potest, nisi haec linea NS ducatur in unitatem ST.

(23) Itaque quando calculi non de numeris abstractis, sed de rebus ipsis intelliguntur, servanda est lex homogeneorum quam vocant, id est ea quae comparantur ac sibi adduntur vel auferuntur, debent habere eundem numerum dimensionum, ut b^2 et bc, item b^3, b^2c, bcd, neque enim linea superficiei, superficiesve spatio tridimenso, nec spatium vacuum ponderi corporis, nec pon-

dus mortuum percussioni comparari potest. Et quando non est idem dimensionum numerus, subintelligenda est unitas a, ut si comparentur b^4 et c^2d, hujus loco sumi potest ac^2d. Saepe tamen unitas dissimulatur.

(24) Quantitas ex pluribus dimensionibus formata a me dici solet forma. Sunt autem hae

Grad. I. a.
Grad. II. a^2, ab.
Grad. III. a^3, a^2b, abc.
Grad. IV. a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc, abcd.
etc.

ita b^3c^2e sive $2^3 3^2 5$ significat 8.9.5 seu 360. Et utilissima quidem haec est resolutio numerorum derivativorum in primitivos seu eos, qui in alios (praeter se ipsum atque unitatem) hoc modo resolvi non possunt, ut 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19 etc. Caeteri ex his fiunt, ut 4 est 2^2, et 6 est 2.3, et 8 est 2^3, et 9 est 3^2, est 10 et 2.5, et 12 est $2^2.3$, et 14 est 2.7, et 15 est 3.5, et 16 est 2^4, et 18 est $3^2.2$.

(25) Nihil in multiplicatione facit nihil, seu 0 aequ. 0^2 aequ. 0^3 aequ. 0.a aequ. 0b vel b0. Nam centies nihil est nihil, et nullies centum seu nunquam 100 est etiam nihil. Hinc si scribatur na^2b, et sit n aequ. 0, erit na^2b aequ. 0. Item 0b aequ. 0c, nec tamen ideo b aequ. c. Item quia af—bc aequ. 0 (1.6 —2.3), erit etiam baf—b^2c aequ. 0 (seu 2.1.6—2^2.3, id est 12—12).

(26) Si tamen 0 significet rem non quidem nullam, sed infinite parvam, sive finitis nullo modo comparabilem, eaque ducatur in rem infinitam, inde fieri potest quantitas ordinaria seu finita. Infinitum ita designo ∞, eritque 0∞ aequ. 1. Sed hoc intelligendum ex exemplis, ubi consideratio haec utilissima reperietur, quae suo loco afferemus.

(27) b^0 aequ. 1. Nam $b^0 \frown b^c$ (per 18) aequ. b^{0+c}, id est (per 12) aequ. b^c et hoc (per 22) aequ. $1 \frown b^c$. Habemus ergo $b^0 \frown b^c$ aequ. $1 \frown b^c$, ergo (per 29) b^0 aequ. 1. Hinc corollarium b^0 aequ. 1, ergo et c^0 aequ. 1, ergo b^0 aequ. c^0, nec tamen ideo b aequ. c, licet enim alioqui quae eodem modo tractata exhibent aequalia, sint aequalia, tamen per 0 tractari est non tractari.

(28) 1 aequ. 1^0 aequ. 1^1 aequ. 1^2 aequ. 1^3 etc. adeoque 1^y aequ. 1, et, si a aequ. 1, erit a^y aequ. 1 aequ. a^s; et contra si a^y

aequ. 1, et y diversus est ab unitate vel si a^y aequ. a^z et y ac z diversi sunt inter se, tunc erit a aequ. 1.

(29) Aequalium aequimultipla aequalia sunt, et e converso. Sit f aequ. 6, dico esse fd aequ. 6d. Nam f - 6 aequ. 0 (per 13), ergo fd—6d aequ. 0 (per 25), ergo fd aequ. 6d (per 13), quod erat demonstrandum. Eodem modo demonstratur et conversa, scilicet quorum aequimultipla aequalia sunt, ea ipsámet aequalia sunt. Idem ex axiomate illo generali patet, quod aequalia f et 6, eodem modo tractata, nempe per d multiplicata, exhibent aequalia, nempe fd et 6d.

(30) $++$ est $+$ seu $+1^{\frown}+1$ aequ. $+1$, vel ponere ponens est ponere sive efficere, ut habeas quod alioqui habiturus non esses. Ita qui parientem tibi donat, partum donat; qui tibi jus centum nummorum donat, qui exigi possunt cum voles, is tibi centum nummos donat seu $+\overline{+100}$ aequ. $++100$ aequ. $+100$. Hinc $+1^{\frown}+b$ aequ. $+b$, nam $+b$ aequ. $+1^{\frown}b$ (per 22), ergo $+1^{\frown}+b$ aequ. $+1^{\frown}+1^{\frown}b$, at $+1^{\frown}+1$ aequ. $+1$ hic, ergo $+1^{\frown}+1^{\frown}b$ aequ. $+1^{\frown}b$; at $+1^{\frown}b$ aequ. $+b$ (per 22), ergo $+1^{\frown}+b$ aequ. $+b$. Hinc $+b^{\frown}+c$ aequ. $+bc$. Nam $+b$ aequ. $+1^{\frown}b$, et $+c$ aequ. $+1^{\frown}c$ (per 22), itaque $+b^{\frown}+c$ aequ. $+1^{\frown}b^{\frown}+1^{\frown}c$, et (quia per 16 in multiplicando transponere licet) aequ. $+1^{\frown}+1^{\frown}b^{\frown}c$; jam $b^{\frown}c$ est bc (per 15) et $+1^{\frown}+1$ est $+1$ hic: ergo fit $+1^{\frown}+1^{\frown}b^{\frown}c$ aequ. $+1^{\frown}bc$, id est (per 22) $+bc$. Haec consideratio signi cum adjuncta unitate, sumendo $+$ quasi $+1$, suo tempore usum habebit: proprie etiam non potest $+$ duci in $+$, non enim est quantitas, sed $+1$ in $+1$.

(31) $+-$ est $-$ seu $+1^{\frown}-1$ aequ. -1, seu ponere tollens est tollere seu efficere, ut non habeas quod alioqui habiturus esses, ut si tibi donem animal prorsus nullius pretii ea conditione, ut retineas pascasque, donum meum potius poena erit tanto major quanto voracius erit animal. Ita si in te transferam obligationem qua teneor, seu ut vulgo loquuntur debitum passivum centum nummorum, utique hoc ipso centum nummi patrimonio tuo decedunt. Itaque $-1^{\frown}-b$ aequ. $-b$ et $-c^{\frown}-b$ aequ. cb, ut in praecedenti, seu ademtio duorum nummorum ter posita est ademtio sex nummorum.

(32) $-+$ est $-$ seu $-1^{\frown}+1$ aequ. -1. Patet ex praecedenti, nam transpositio licita per 16 [illegible] est. Tollere ponens est tollere, ut si jus centum nummorum securè ex[illegible]

adimam, centum nummos ademi seu $-1\frown+100$ est -100; item $-2\frown+3$ est -6, seu si tibi jus trium nummorum bis adimam, sex nummos ademi.

(33) — — est +, seu $-1\frown-1$ aequ. $+1$, seu tollere tollens est ponere, ut si tibi adimam animal illud inutile et vorax, quod sub conditione alendi recepisti, teque illo onere liberem, tantum donasse videbor, quantum damni illud animal alioqui daturum adhuc fuisset. Et, si obligationem centum nummorum quos alteri debes, tibi ademtam recipiam in me, utique centum nummos tibi dedi. Itaque $-1\frown-b$ est $+b$ et per transpositionem $-b\frown-1$ est $+b$ et (per 29) $-b\frown\underbrace{-1\frown c}_{-c}$ aequ. $\underbrace{+b\frown c}_{+bc}$, ergo $-b\frown-c$ aequ. $+bc$, id est si duae res | b | tibi adimantur, quarum unaquaeque alioqui tres nummos | c | tibi ademtura fuisset, reapse sex nummos ea ratione acquisivisti sive nunc hoc modo habes, quos alioqui non esses habiturus.

(34) Divisio est subtractio aequalium. Ut autem in multiplicatione, dato numero rerum repetendarum et repetitionum, quaeritur numerus rerum in universum seu factus, ita in divisione, dato facto sive numero rerum seu dividendo, quaeritur numerus repetitionum alterius rei seu divisoris; is numerus dicitur quotiens. Ita in multiplicatione tres nummi (qui est numerus multiplicandus seu repetendus) bis (qui est multiplicator seu nummerus repetitionum) sumti dant 6 (numerum productum), in divisione vero ipsius 6 per 3, is qui antea erat productus, nunc iterum est resolvendus, id est quaeritur quoties ex tribus nummis repetitis factus sit; et respondetur esse bis repetitos ac proinde tres nummos in sex nummis bis contineri, adeoque bis a sex nummis subtrahi posse. Is ergo numerus repetitionum, hoc loco binarius, qui in multiplicatione est datus, in divisione est quaesitus et dicitur q u o t i e n s, numerus vero repetite subtrahendus, hoc loco ternarius, dicitur divisor. Idem est si binarius sit divisor, id est subtrahendus quoties fieri potest, et reperietur ipsum ter subtrahi posse. Hinc patet etiam, divisione dividendum dividi in tot aequales partes, quot sunt in divisore unitates, ut sex dividitur per 3 in tres partes aequales, nempe tres binarios, quemadmodum in multiplicatione productus sex componitur ex aequalibus partibus, nempe tribus binariis vel duobus ternariis. Itaque uti $2\frown3$ vel 2.3 aequ. 6, ita $6\smile2$ vel $\frac{6}{2}$ aequ. 3, et

$6 \smile 3$ vel $\frac{6}{3}$ aequ. 2; in literis bc aequ. f, ergo $\frac{f}{b}$ aequ. c vel $\frac{f}{c}$ aequ. b.

(35) $bc \smile c$ vel $\frac{bc}{c}$, item $\frac{b}{c} \frown c$ vel $\frac{bc}{c}$ aequ. b, id est si qua res multiplicetur simul et dividatur per idem, multiplicatio et divisio se mutuo tollent, manebit res prior. Exempli gratia tertia pars tripli est simplum. Itaque quivis multiplicatione productus, ut bce (sive $2 \frown 3 \frown 5$) vel fe (sive $6 \frown 5$) vel $l \frown c$ ($10 \frown 3$) vel $\overline{l+e} \frown b$ (sive $15 \frown 2$) eosdem habet divisores quot factores, nempe bce, 30, dividi potest per 2 et 3 et 5; b et c et e jungendo 2 et 3 per 6 vel f vel bc; jungendo 2 et 5 per 10 vel l vel be; jungendo 3 et 5 per 15 vel l+e vel ce. Patet etiam hinc, quotientem et divisorem reciprocari seu ex quotiente fieri posse divisorem et tunc ex divisore fieri quotientem; $\frac{6}{2}$ aequ. 3 et $\frac{6}{3}$ aequ. 2; item b divisorem, divisores be esse divisorem dividendi bce. Hinc et divisor quotientis est divisor dividendi, quia et quotiens est divisor, $36 \smile 3$ aequ. 12; jam 12 dividi potest per 4, ergo et 36, quia 36 dividi potest per 12, et 12 per 4.

(36) Hinc $\frac{b^2}{b}$ aequ. b aequ. $\frac{b^3}{b^2}$ aequ. $\frac{b^4}{b^3}$ etc.; item $\frac{b^3}{b}$ aequ. b^2 aequ. $\frac{b^4}{b^2}$ aequ. $\frac{b^6}{b^4}$; et generaliter $\frac{b^z}{b^y}$ aequ. b^{z-y} (per artic. 18 et 35). Exempli gratia $\frac{2^6}{2^4}$ aequ. 2^{6-4} aequ. 2^2 seu $\frac{64}{16}$ aequ. 4. Eodem modo $\frac{cb}{b}$ aequ. c seu cb^0, et $\frac{cb^2}{b}$ aequ. cb seu cb^1, et $\frac{cb^3}{b}$ aequ. cb^2 etc. Itaque quando divisor, ut b, in dividendo, ut cb^2, continetur, tunc destruitur, et invenitur quotiens cb simplicior dividendo cb^2. Hinc $\frac{6}{3}$ aequ. 2, quia $\frac{6}{3}$ aequ. $\frac{bc}{c}$ aequ. b.

(37) $\frac{0}{b}$ aequ. 0. Nam $\frac{0}{b}$ aequ. $\frac{0b}{b}$ (quia 0b aequ. 0 per artic. 25) et $\frac{0b}{b}$ aequ. 0 per artic. 35. Hinc 0 dividi potest per 2, item per 3 etc., nam dimidium nihil est nihil, et tertia pars nihili est nihil. Itaque 0 est par, et est ternalis, et quaternalis, et quinalis, et ita porro.

(38) $\frac{b}{b}$ aequ. 1, sive $\frac{3}{3}$ aequ. 1, seu omnis numerus per se ipsum divisus quotientem exhibet unitatem. Nam omnis numerus non nisi semel a se ipso subtrahi potest. Idem calculo ita constat. b aequ. $1 \frown b$ (per 22), ergo $\frac{b}{b}$ aequ. $\frac{1 \frown b}{b}$ (per axioma generale, quod aequalia eodem modo tractata exhibent aequalia); jam $1 \frown \frac{b}{b}$ aequ. 1 (quia in $\frac{b}{b}$ per artic. 35 duo $\frac{b}{b}$ se mutuo tollunt), ergo $\frac{b}{b}$ aequ. 1. Idem aliter: Quantitatum $\frac{b}{b}$ et 1 aequimultipla per b, nempe $\frac{b}{b} \frown b$ (id est b per 35) et $1 \frown b$ (id est b per 22) aequalia sunt, ergo (per 29 conversam) ipsae quantitates sunt aequales.

(39) $\frac{b}{1}$ aequ. b, seu unitas dividendo non mutat. Nam $\frac{b}{1}$ aequ. $\frac{b}{1} \frown 1$ (per 22) et $\frac{b}{1} \frown 1$ aequ. b (per 35).

(40) Articulus 38 et 39 ita conjungi possunt breviterque probari. b aequ. $b \frown 1$ (per 22), at omnis multiplicatione productus ut $b \frown 1$ habet (per 35) eosdem divisores, quos factores seu generatores hoc loco b et 1.

(41) Si numerus aliquis integer habeatur expressus per formam unicam constantem ex meris primitivis, tunc omnes divisores invenientur modo sequenti. Sit numerus 360 expressus per formam unicam (nam si expressus sit per formulam compositam ex pluribus terminis, res non procedit) b^3c^2e sive $2^3 3^2 5$, ubi ingredientes b, c, e sive 2, 3, 5 sunt meri primitivi, nam 5 exempli causa non dividi potest nisi per unitatem et se ipsum, ergo 360 dividi potest ante omnia per 1, hinc primo per b (2) et c (3) et e (5); secundo per formas secundi gradus in forma data contentas: b^2 (4), c^2 (9), bc (6), be (10), ce (15); tertio per formas tertii gradus: b^3 (8), b^2c (12), b^2e (20), bc^2 (18), bce (30); quarto per formas quarti gradus: b^3c (24), b^2c^2 (36), b^2ce (60), bc^2e (90); quinto per formas quinti gradus: b^3c^2 (72), b^3ce (120), b^2c^2e (180); sexto forma proposita dividitur per unam formam sexti gradus, nempe per se ipsam b^3c^2e.

(42) Hinc si modus exprimendi numerum datum per primi-

tivos non habeatur, potest numerus datus ad primitivos reduci hoc modo. Ponamus ignorari quod 360 sit b^3c^2e vel $2^3 3^2 5$, hoc ita inveniemus. Percurramus ordine omnes primitivos, quoad opus erit; et quidem omnis numerus dividi potest per 1. Post 1 sequitur 2; dividatur ergo 360 per 2, fit 180, nempe 360‿2 aequ. 180 (seu b^3c^2e‿b aequ. b^2c^2e). Similiter 180‿2 aequ. 90 (b^2c^2e‿b aequ. bc^2e), 90‿2 aequ. 45 (bc^2e‿b aequ. c^2e). At 45 si dividatur per 2, manet residuum, itaque hoc ad scopum nostrum non procedit (nec c^2e‿b procedit ad scopum nostrum). Ergo procedatur a 2 ad proximum primitivum 3, et fiet 45‿3 aequ. 15 (c^2e‿c aequ. ce), 15‿3 aequ. 5 (ce‿c aequ. e). Jam 5 non amplius sine residuo dividi potest per 3, nam si 3 detrahas a 5, restat 2, a quo 3 amplius detrahi non potest. Ergo ulterior divisio per 3 non procedit. Proximus primitivorum post 3 est 5. Hoc si dividatur 5, quod paulo ante provenerat, fiet 5‿5 aequ. 1 (e‿e aequ. 1), unitas autem amplius dividi non potest. Habemus ergo, 360 dividi posse per 2 quidem ter seu per cubum ipsius 2 sive per 2^3, per 3 vero bis seu per quadratum ipsius 3, ac denique per 5 semel, unde fit 360 aequ. $2^3 3^2 5^1$ seu $b^3c^2e^1$. Si quis vero in tali inquisitione occurreret primitivus inapplicabilis seu per quem divisio exacte fieri non possit, is transsilietur sumeturque sequens. Hac methodo etiam apparebit, an numerus aliquis sit ipsemet omnino primitivus, id est per alium praeter unitatem et se ipsum dividi non possit. Nam tentetur, an dividi possit per omnes ordine primitivos, donec perveniatur ad primitivos, per quos dividendo fiant quotientes (neglecto residuo) minores divisore, ut 19 dividatur per 2, prodit (neglecto residuo) 9, et 19‿3 dat 6, et 19‿5 dat 3, ergo ultra pergi opus non est, quia 3 quotiens minor est quam 5 primitivus divisor. Ratio est, quia si per primitivum altiorem, ut 7, procederet divisio, tunc quotiens cum minor sit quam 7, deberet vel esse primitivus minor quam 7, vel certe si non est primitivus, debebit divisibilis esse per primitivum minorem se ipso, adeoque minorem quam 7. Jam si quotiens est exacte divisibilis per aliquem primitivum minorem quam 7, etiam dividendus erit divisibilis per divisorem minorem quam 7 (per artic. 35) contra hypothesin; tentavimus enim jam per omnes. Ergo per primitivum altiorem, ut 7, non potest dividi dividendus, adeoque inutilis est tentatio ulterior. Dantur autem varia compendia pro agnoscendis numeris primitivis, sed ea non sunt hujus loci.

(43) Ex pluribus ejusdem numeri divisoribus seu factoribus illi qui simul eum faciunt, dicantur **confactores**, ut exempli gratia 12 seu 1+b aequ. b^2c aequ. dc aequ. bf. Sunt ergo confactores primo modo b, b, c, secundo d, c (vel b^2, c), tertio bf (seu b, bc). Possunt et dici **condivisores**.

(44) Si numerus divisibilis sit per primitivum aliquem, tunc aliquis confactorum ejus per eandem primitivum divisibilis erit, ut si 2.6 seu 12 divisibilis est per 3, dico vel 2 vel 6 debere divisibilem esse per 3. Nam si resolvatur numerus 2.6 secundum artic. 42, ut habeatur modus exprimendi eum per primitivos factores, necesse est ut inter eos etiam compareat 3; resolvendo autem hoc modo debet vel 2 vel 6 resolvi vel ambo, itaque 3 debet latere vel in uno vel in utroque, partim enim in uno, partim in altero latere non potest, quia ipsemet est primitivus sive resolvi in plures factores non potest. Et itaque cum 2 non sit divisibilis per 3, neque adeo in 3 resolvi possit, necesse est 6 in 3 resolvi posse; est enim 6 aequ. 2.3, et fiet 12 aequ. 2.2.3 seu $2^2.3$. Si vero divisor non sit primitivus, id necesse non est, ex. gr. 12 seu 2.6 dividi potest per 4, et tamen neque 2 neque 6 per 4 dividi potest: sed ipsum 4 resolvendo in primitivos, fiet 2.2, itaque 4 partim continetur in 2, partim in 6 hoc modo $\frac{2\,.\,6}{2\,.\,2}$, nam unum 2 continetur in uno confactore (2), alterum in altero confactore (6).

(45) Hinc si potentia sit divisibilis per aliquem primitivum, latus erit divisibile per eundem, ex. gr. 6^3 sive 216 dividi potest per 3, ergo cum ejus confactores sint 6, 6, 6, ideo unus ex ipsis, nempe (cum sint aequales assumti) ipsum latus 6 etiam dividi poterit per 3.

(46) Numerus divisibilis per plures primitivos divisibilis est per factum ex omnibus. Ut si numerus 30 divisibilis sit per 2 et 3, necessario divisibilis erit per 6. Necesse est ut enim in resolutione secundum modum artic. 42 appareant ambo, itaque comparebit 2, 3, nempe 30 est 2.3.5.

(47) Si plura aequimultipla additione vel subtractione conjunguntur, compositum cum ipsis aequimultiplum erit, vel quod idem est si plures quantitates divisibiles per eundem numerum conjungantur in eandem formulam, composita formula erit divisibilis per eundem, ex. gr. si conjungantur 6 et 9, ambo divisibiles per 3, compositum 15 erit etiam divisibile per 3. bc+cc (seu

$\overline{b+cc}$ seu ec) utique divisibile est per c, fiet enim $\frac{bc+cc}{c}$ aequ. b+c aequ. e. Similiter: 15 - 9 (seu 6) dividi poterit per 3, quia tam 15, quam 9 dividi potest per 3. Ita ec—c^2 (seu $\frac{e—cc}{b}$ seu bc) dividi potest per c, fiet enim $\frac{ec—cc}{c}$ aequ. e—c aequ. b, sive $\frac{ec}{c}$ erit integer, et $\frac{cc}{c}$ est integer, ergo $\frac{ec-cc}{c}$ est integer, quae omnia patent ex artic. 35, nam c supra et infra se mutuo tollunt.

(48) Hinc si tota formula divisibilis sit per aliquem numerum et pars per eundem, reliqua pars etiam per eum divisibilis erit. Ita sit 12 aequu. l+b, is numerus 12 totus dividi potest per b sive per 2 (per hypothesin) et pars ejus b dividi etiam potest per b (per artic. 38), ajo alteram partem l etiam per b dividi posse. Nam 12 divisib. per b [sive $\frac{12}{b}$ est integer], item b divisibilis per b [seu $\frac{b}{b}$ est integer, ergo $\frac{12}{b}-\frac{b}{b}$, erit $\frac{12—b}{b}$ etiam integer] seu 12– b erit exacte divisibilis per b, per artic. 47. Jam 12—b (12—2) est aequ. l (10) (quia 12 aequ. l+b, ergo subtrahendo utrobique b fit 12—b aequ. $\frac{l+b—b}{0}$ aequ. l). Ergo si 12—b divisib. per b, etiam aequalis ei l per b divisibilis erit, quod ostendendum erat. Similiter sit 24 aequ. 3l—f (3.10—6), $\frac{24}{3}$ aequ. 8 seu $\frac{24}{3}$ est integer, ergo et $\frac{3l}{3}$ est integer, nempe l, ergo et $\frac{f}{3}$ est integer, seu quia tota formula 3l—f seu 24 dividi potest per 3, et 3l etiam, sequitur et f dividi posse per 3, nam quia 24 aequ. 3l – f, ergo 24+f (aequ. 3l—f+f) aequ. 3l, ergo (24) + f (—24) aequ. 3l—24; jam 3l divisib. per 3, et 24 etiam, ergo per artic. 47 composita formula 3l—24 seu f divisib. per 3. Hae propositiones sunt principium divisionum, quae in numeris compositis per partes peraguntur.

Hinc e converso, si una pars formulae per aliquam quantitatem vel numerum sit divisibilis, altera vero pars integrans (seu reliquum totam formulam absolvens) per eum divisibilis non sit, tunc ipsa formula per eum divisibilis non erit. Ita 19 non potest

dividi per 3, nam discerpi potest in duas partes 18 et 1 (quia 18+1 aequ. 19) quarum una 18 dividi potest per 3, altera vero 1 minime.

(49) Duo numeri integri per eundem divisibiles dicuntur habere communem Mensuram, id est communem divisorem, ut bc et cc sive 6 et 9 communem habent divisorem c sive 3. Si vero nullum habeant communem divisorem, dicuntur esse primi inter se. Divisor autem exactus merito dicitur mensura, ut 2 est mensura numeri 6, quia aliquoties (nempe ter) repetitus numerus numerum 6 exacte metitur, nullumque residuum relinquit. Ideo 6 et 4 dicuntur habere communem mensuram 2.

(50) Si numerus divisibilis sit per alium, aliquis confactorum numeri dividendi habebit communem mensuram cum divisore. Ita numerus 60 dividi potest per 15, ergo aliquis ex duobus ejus confactoribus vel condivisoribus, nempe 2,30, communem habebit divisorem cum 15. Nam 2.30 resolvi poterit ad modum artic. 41 et 42 ut divisores omnes appareant, nempe inter caeteros etiam 3.5 seu 15. Jam 2 nec in 3 nec in 5 resolvi potest, ergo necesse est 30 ita resolvi posse; itaque 30 et 15 habent communem divisorem 3, imo et communem divisorem 5, quin imo 30 et 15 habebunt communem divisorem 15, nam 30 per 15 dat 2, et 15 per 15 dat 1. Scilicet 60 est 2.30 vel 2.2.3.5 sive 2^2.3.5. Similiter quia 60 dividi potest per 3 (fit enim 60_3 aequ. 20), necesse est unum saltem ex duobus confactoribus 2 et 30 habere communem divisorem cum 3, et vero 2 non habet, ideo necesse est, ut 3 et 30 sint condivisibiles, quod et verum est, nam tam 3 quam 30 dividi possunt per eundem 3. Ita quia 3⁀20 aequ. 60 et 60 dividi potest per 30, patet hoc loco non alterutrum tantum, sed utrumque tam 3 quam 20 ipsi 30 condivisibilem, nam 3 et 30 dividi possunt per 3, et 20 et 30 dividi possunt per 10. Et generaliter ista patent ex habita forma qua numerus 60 per primitivos exprimitur, ut 60 aequ. 2^2.3.5 seu 2.2.3.5, quomodocunque enim conjungantur isti factores simplicissimi 2.2.3.5 in confactores compositos, nempe in duos confactores 12 (id est 2.2.3) et 5, item 20 (2.2.5) et 3, item 30(2.3.5) et 2, item 4 (2.2) et 15 (3.5), item 6 (2.3) et 10(2.5), et in tres 4 (2.2) 3 et 5, item 6 (2.3) 2 et 5, item 10 (2.5) 2 et 3, item 15 (3.5) et 2 et 2, et denique in quatuor 2.3.4.5; patet quemlibet factorem vel esse primitivorum unum, vel ex parte eorum invicem ductorum fieri; adeoque

divisores ejus esse partem divisorum numeri seu latere in confactoribus simul sumtis, et quidem vel totum in uno confactorum, vel pro parte in uno, pro parte in altero.

(51) Hinc si potentia sit divisibilis per aliquem numerum, necesse est latus et divisorem habere mensuram communem, ut si $b^2c^2d^2$, nullus potest assumi divisor, qui non contineat aliquam ex literis b vel c vel d, itaque habebit literam cum latere bcd communem.

(52) Numerus divisibilis per plures primos inter se, divisibilis est per factum ex omnibus, ut numerus divisibilis per 5 et 6 et 7, divisibilis est per 210 seu 5.6.7. Nam divisibilis est per 5 et per 6, sed quia 5 nihil continet commune cum 6, nihil contribuit ad hoc, ut numerus sit divisibilis per 6; ideo alterum ab altero separatum est, et si divisus sit per 5, adhuc dividi poterit per 6; idemque est de 7. Itaque numerus divisibilis per 5 et 6 et 7 necessario erit 5.6.7. Sed secus est in numero divisibili per 4 et 6, exempl. gr. 36; is enim non est necessario divisibilis per 24, sed solum per $\overbrace{2.\underbrace{3.3}_{6}}^{4}$ seu per 12, quia 2 est communis mensura numerorum 4 et 6.

(53) Si a numero aliquo diminuendo 21 subtrahatur numerus ut 15, et residuum 6 habeat communem divisorem cum subtracto 15, tunc subtractus 15 habebit eundem communem divisorem cum diminuendo 21. Nam in literis, sit 21—ce aequ. cb, ergo 21 aequ. cb + ce, ergo 21 id est cb + ce habet divisorem c, eundem quem habet ce.

(54) Si a numero aliquo dividendo 56 subtrahatur divisor 12, quoties fieri potest, et sit residuus 8, tunc 4 maxima communis mensura divisoris 12 et residui 8 erit maxima communis mensura divisoris 12 et dividendi 56. In literis, sit divisor x et quotiens 4 (quoties scilicet x subtrahi potest a dividendo), residuus h, dividendus 56, utique erit 56 aequ. 4x + h. Ponamus jam x et h habere maximum communem divisorem d, et esse x aequ. cd, et h aequ. bd, fiet 56 aequ. 4cd + bd. Jam duorum numerorum 4cd + bd et cd maximus communis divisor est d, quoniam si major aliquis sumatur divisor ipsius 4cd, nempe m, is non erit divisor ipsius bd (alioqui 4cd et bd haberent communem divisorem m majorem quam d contra hypothesin, posuimus enim d esse

maximum); at omnis divisor ipsius 4cd, qui non est divisor ipsius bd, non potest esse divisor ipsius 4cd+bd per artic. 48. Ergo m non est divisor ipsius 4cd+bd seu ipsius dividendi 56, ergo non datur communis divisor dividendi 4cd+bd (seu 56) et divisoris cd, qui sit major quam d.

(55) Hinc si dividendus dividatur per divisorem, et divisor per residuum, et residuum primum seu divisor secundus per residuum secundum seu divisorem tertium, et ita quousque libuerit, tunc maxima mensura communis ultimi divisoris et ultimi residui erit maxima mensura communis primi divisoris et primi dividendi. Nam quia divisor et residuum divisionis praecedentis fiunt dividendus et divisor sequentis, et per praecedentem communis mensura divisoris et residui est communis mensura dividendi et divisoris, ergo communis mensura divisoris et residui divisionis ultimae est communis mensura dividendi et divisoris divisionis ultimae, ergo divisoris et residui divisionis penultimae, ergo dividendi et divisoris divisionis penultimae, ergo rursus divisoris et residui divisionis antepenultimae, ergo dividendi et divisoris divisionis antepenultimae, et ita porro procedetur usque ad dividendum et divisorem divisionis primae.

(56) Hinc habetur modus inveniendi duorum numerorum integrorum maximam communem mensuram, si quam habent. Dividatur dividendus per divisorem, divisor per residuum, idque continuetur, donec nullum sit residuum, et ultimus divisor erit maxima communis mensura quaesita. Ultimus enim divisor, cum nullum residuum relinquat, erit divisor exactus, omnis autem divisor exactus est maxima mensura communis sui ipsius et dividendi (est enim divisor dividendi, et quilibet numerus est maximus divisor sui ipsius seu quo non datur major sui, ergo nec datur major communis). Ergo ultimus divisor est maxima communis mensura ultimi divisoris et ultimi dividendi, ergo et residui (qui est ultimus divisor) et divisoris divisionis penultimae (qui est ultimae dividendus), ergo per praecedentem omnium divisorum et residuorum, itemque omnium dividendorum et divisorum divisionum praecedentium, adeoque et primae; dividendus autem et divisor divisionis primae sunt numeri dati, quorum communis divisor quaeritur. Semper autem habetur denique ultimus divisor exactus; quoniam residuus est semper integer semperque decrescit, tandem vel invenitur divisor exactus, qui est

maxima mensura communis quaesita, nec opus est ultra pergi, vel devenitur ad unitatem, infra quam descendi non potest, nam nec datur integer minor unitate, et unitas semper ist divisor exactus. Quando autem pergendum est usque ad unitatem, tunc signum est, duos numeros nullam habere communem mensuram nisi unitatem, seu esse primos inter se. Utrumque exemplis declarabo. Sint duo numeri 56 et 12, quorum quaeritur mensura communis; 56 aequ. 4.12+8 (erit 56 dividendus, 12 divisor, 4 quotiens, 8 residuus), 12 aequ. 1.8+4 (erit 12 dividendus, 8 divisor, 1 quotiens, 4 residuus), 8 aequ. 2.4 (erit 8 dividendus, 4 divisor, 2 quotiens, residuus 0). Ergo maxima communis mensura 56 et 12 est 4, seu $56 \smile 4$ dat 14, et $12 \smile 4$ dat 3. At 14 et 3 amplius divisorem communem non habent. At 120 et 49 esse primos inter se sic discemus: 120 aequ. 2.49+22, 49 aequ. 2.22+5, 22 aequ. 4.5+2, 5 aequ. 2.2+1, ergo ultimus residuus est 1, adeoque nulla alia datur mensura communis.

Unusquisque numerus dividi potest per unitatem, secundus quisque per 2, tertius quisque per 3, quartus quisque per 4, et ita porro, incipiendo numerationem ab 0. Ita 0, 3, 6, 9 etc. sunt divisibiles per 3.

Hinc sequitur, productum ex duobus numeris continuis, ut 0.1, vel 1.2, vel 2.3, vel 3.4 etc. esse numerum parem seu divisibilem per 2; et productum ex tribus continuis esse numerum divisibilem per 3, ut 4.5.6 sive 120, vel 5.6.7 sive 210, vel 6.7.8 sive 336; semper enim unus inter eos est ternalis seu divisibilis per 3. Ita productus ex quinque continuis, ut 12.13.14.15.16, semper est divisibilis per 5; nam unus quinalis semper inest, quia quintus quisque est unus ex quinque continuis, nunquam enim intervallorum eorum inter duos quinales plures quam quatuor numeri interpositi esse possunt.

Hinc sequitur, productum ex tribus continuis dividi posse per 6, ut $120 \smile 6$ aequ. 20 et $210 \smile 6$ aequ. 35, quia productum ex tribus continuis est etiam productum ex duobus continuis, ergo dividi potest per 2, idemque quia est ex tribus, dividi potest per 3. Similiter productum ex quatuor continuis dividi potest per 2.3.4 seu per 24, ita $8 \frown 9 \frown 10 \frown 11$ seu 7920 dividi potest per 24. Et ita porro. Unde sumto quocunque numero ut y, cujus continui sunt $\overline{y+1}$ et $\overline{y+2}$ et $y+3$ etc. productus ex omnibus, nempe $y \frown \overline{y+1} \frown \overline{y+2} \frown y+3$ etc. dividi potest exacte per $1 \frown 2 \frown 3 \frown 4$ etc. Itaque

$\frac{y.\overline{y+1}}{1.2}$, item $\frac{y.\overline{y+1}.\overline{y+2}}{1.2.3}$, item $\frac{y.\overline{y+1}.\overline{y+2}.\overline{y+3}}{1.2.3.4}$, et ita porro, sunt numeri integri, modo y sit integer. Hinc innumerae consequentiae elegantes duci possunt; exempli causa, quia $\frac{y.\overline{y+1}}{1.2}$ vel $\frac{yy+y}{2}$ est integer, erit $yy+y$ numerus par, a quo si auferatur $2y$, qui est etiam par, residuus $yy-y$ erit par. Itaque si a numero quadrato auferatur latus, residuus erit par, ut 9—3 est 6, idque etiam ex eo patet, quod fit ex duobus sola unitate differentibus seu continuis $y-1$ et y. Similiter $y.\frown\overline{y+1}.\frown\overline{y+2}$ seu $y^3+3yy+2y$ est ternalis seu divisibilis per 3, ergo auferendo ternalem $3yy-3y$ restabit y^3-y, qui etiam erit divisibilis per 3. Itaque cubus latere minutus semper est ternalis sive exacte divisibilis per 3, modo scilicet latus y sit numerus integer. Imo y^3-y est senalis seu divisibilis per 6, fit enim ex tribus continuis seu sola unitate differentibus $\overline{y-1}.y.\overline{y+1}$. Eodem modo $y-2.\frown y-1\frown y.\frown y+1.\frown y+2$ seu $y^2-4\frown y^2-1\frown y$ seu y^5-5y^3+4y divisibilis per 1.2.3.4.5 seu per 120 adeoque et per 30, a quo si auferatur $5y^3-5y$ divisibilis per 30 (nam y^3-y per 6), restabit y^5-y divisibilis per 30. Hinc sequitur, si y neque per 2 neque per 3 neque per 5 dividi possit, tunc y^4-1 etiam dividi posse per 30. Sunt enim numeri y^5-y duo confactores y et y^4-1; jam si y dividi non potest per primitivos 2 et 3 et 5, necesse est per artic. 44 alterum confactorem y^4-1 dividi posse et per 2 et per 3 et per 5, qui cum sint primitivi, necesse est per 46. y^4-1 dividi posse per 2.3.5 seu per 30.

VIII.

DE PRIMITIVIS ET DIVISORIBUS EX TABULA COMBINATORIA.

Combinationum formulae: y^0, $\frac{y}{1}$, $\frac{y.y-1}{1.2}$, $\frac{y-y-1\,.\,y-2}{1.2.3}$, $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$

Numeri rerum	Nomina indices: Nullio 0	Unio 1	Binio 2	Ternio 3	Quaternio 4	Combinationum summae	seu Potentiae binarii
	Combinationes singulae						
Nihil 0	1					1	2^0 Nullatum
Unitas 1	1	1				2	2^1 Radix
Binarius 2	1	2	1			4	2^2 Quadrat.
Ternarius 3	1	3*	3**	1		8	2^3 Cubus
Quaternar. 4	1	4*	6*	4**	1	16	2^4 Biquadr.

Itaque 3* significat tres esse uniones ternarii, item 3** denotat tres esse biniones ejusdem ternarii, et 6* indicat sex esse biniones quaternarii. Sint enim res quatuor a, b, c, d, erunt earum biniones sex, nempe ab, ac, ad, bc, bd, cd. 4* significat quatuor rerum esse quatuor uniones, nempe a, b, c, d, et 4** significat quatuor esse terniones quatuor rerum, scilicet abc, abd, acd, bcd.

Numeri hujus Tabulae hanc habent proprietatem, ut duae combinationes alicujus numeri (ut binarii) sibi proximae (ut 2 et 1, quarum illa est unio, haec binio binarii) simul sumtae constituunt (3**) combinationem Numeri proxime majoris (ternarii) combinationum priorum (binionis et unionis) majori (nempe binioni) similem (sive erit 3** sive 2+1 binio ternarii, erit unio binarii + binio binarii).

Habent etiam hanc proprietatem Numeri hujus Tabulae, ut combinatio quaelibet (ut binio $\frac{y.y-1}{1.2}$) multiplicata per (y—2) nu-

merum rerum (y) indice (2) minutum, et divisa per (3) indicem (2) unitate auctum exhibeat $\left(\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}\right)$ combinationem proxime majorem ejusdem numeri.

His proprietatibus demonstrandis nunc quidem supersedebimus, sunt enim satis ab aliis demonstratae, sed ex illis ducemus novas, circa Numerorum divisibilitates. Prima autem haec est:

Factus ex nummeris continuis (seu sola unitate differentibus) *quotcunque* (ut y.y 1.y—2) *dividi potest per factum ex totidem continuis incipientibus ab Unitate* (1.2.3). Nam $\frac{y.y-1}{1.2}$ vel $\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}$ etc. est numerus combinationis Rerum; est ergo numerus integer. At si numerus aliquis integer exprimatur per modum fractionis, ut $\frac{y.y-1.y-2}{1.2.3}$, necesse est ejus Numeratorem y.y—1.y—2 dividi posse per denominatorem 1.2.3 seu 6.

Corollarium. Hinc quilibet *Numerus factus ex continuis dividi potest per numerum quemvis, qui non est major numero continuorum*; ita y.y—1.y—2.y—3.y—4.y—5 dividi potest per 2, item per 3, item per 4, item per 5, item per 6.

Ex his duci possent innumera theoremata circa potentiarum vel aliarum formularum divisibilitates, verbi gratia: y.y—1 sive yy—y bifidus seu divisibilis per 2. Ergo omnis Numerus quadratus latere minutus est bifidus. Etiam omnis quadratus latere auctus est bifidus. Et *omnis quadrato-quadratus suo quadrato minutus est quadrifidus seu dividi potest per quaternarium*, imo per *duodenarium*. Sed haec nunc persequi non placet. Ne quis autem dubitet an regulae uniusmodi sint universales seu verificentur etiam cum latus est unitas, scire debet, Nullitatem seu Nihil esse numerum exacte divisibilem per quemlibet numerum; itaque etiam Unitatis quadrato-quadratus ipsius unitatis quadrato minutus, nempe 1—1 sive 0, divisibilis erit per 12, nam $\frac{0}{12}$ est 0; sed de his alias.

Si Numerus rerum sit primitivus, combinatio ejus quaelibet per ipsum dividi potest, demta prima

et ultima. Sit combinatio v. g. quaternio $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ et sit y Numerus rerum primitivus ex. g. 5, ajo eam dividi posse per 5. Cum enim y sit primitivus, nullum habebit divisorem praeter se ipsum, ideo nihil confert ad divisibilitatem, nisi in combinatione ultima, ubi ipse est inter divisores, sive si $y-1.y-2.y-3$ non sit divisibilis per 1.2.3.4, multiplicatus per y non fiet divisibilis (quia primitivus numerum multiplicans non reddit eum ex nondivisibili divisibilem nisi per se ipsum), at multiplicatus per y, dans $y.y-1.y-2.y-3$, est divisibilis per 1.2.3.4 ex hypothesi, ergo $y-1.y-2.y-3$ est divisibilis per 1.2.3.4, sive $\frac{y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ est integer. Is autem prodit, si combinatio proposita $\frac{y.y-1.y-2.y-3}{1.2.3.4}$ dividatur per suum numerum rerum y. Ergo ea divisione prodit integer, et proinde combinatio quaevis (excepta ultima) quae sic exprimitur, id est quaevis praeter y^0 seu nullionem sive primam, est per suum numerum rerum exacte divisibilis, si numerus rerum sit primitivus; ita 7.21.35.35 21.7 combinationes septenarii sunt divisibiles per 7.

Generalius: Quaelibet combinatio, exceptis duabus extremis, divisibilis est per aliquem divisorem sui numeri rerum, sive communem habet cum numero rerum divisorem, et ideo nunquam (exceptis duabus pene extremis, quae coincidunt cum ipso numero rerum) potest esse primitivus. Sit combinatio $y.y-1.y-2.y-3.y-4 _ 1.2.3.4.5$, quae fit ex $y-1.y-2.y-3\ y-4 _ 1.2.3.4$ quae est combinatio proxime praecedens numeri proxime minoris quam vocabimus C ducta in $\frac{y}{5}$; est ergo combinatio proposita $\frac{Cy}{5}$, C existente integro. Quodsi jam index 5 coincidit cum Cy seu cum combinatio est ultima, tunc non potest dividi $\frac{Cy}{5}$ per y; sed et ratiocinatio non procedit cum combinatio proposita est prima seu minima, nec datur C. In ceteris casibus debet vel C dividi per 5, quo casu erit $\frac{C}{5}$ integer, ac proinde $\frac{Cy}{5}$ erit divisibilis per y, nam dabit $\frac{C}{5}$ integrum; vel C non

potest dividi per 5, tunc si 5 est primitivus, debet y dividi per 5, et $\frac{y}{5}$ erit divisor aliquis ipsius y integer, per quem poterit dividi $\frac{Cy}{5}$, sin esset derivativus, ut $\frac{Cy}{6}$, tunc combinatio proposita $\frac{Cy}{6}$ poterit dividi per aliquem ipsius 6 divisorem. Nam C, quod non potest dividi per 6, vel poterit dividi per aliquem ipsius 6 divisorem, ut 2, tunc poterit neccssario y dividi per alium ipsius 6 condivisorem, nempe 3, ut $\frac{Cy}{6}$ fiat integer, ergo restabit alius divisor ipsius y hac divisione per 6 non sublatus, per quem dividi poterit combinatio $\frac{Cy}{6}$; vel C non potest omnino dividi per ullum ipsius 6 divisorem, et tunc necesse est y vel cum 6 coincidere, quod fit in casu ultimae combinationis jam excluso, vel y dividi posse per 6, restabitque divisor aliquis ipsius y per quem dividetur $\frac{Cy}{5}$. Generaliter ergo omnis combinatio exceptis duabus extremis dividi potest per aliquem divisorem ipsius y, si non per ipsummet y.

Si combinatio proxime praecedens (C) numeri proxime praecedentis divisibilis est per indicem combinationis datae (6), tunc combinatio proposita $\left(\frac{Cy}{6}\right)$ dividi non potest per numerum rerum (y), sin illa non est divisibilis per indicem, tunc haec est divisibilis per suum numerum rerum. Est ergo nota reciproca. Demonstratio patet ex praecedenti demonstratione, ubi eam satis attigimus. Sed ut breviter tamen repetamus: Si $\frac{C}{6}$ est integer, utique $\frac{C}{6}$ y dividi potest per y; sin $\frac{C}{6}$ non est integer, nec $\frac{Cy}{6}$ dividi potest per y. Est enim $\frac{C}{6}$ quotiens divisionis per y factus.

Si combinatio aliqua (C) per suum indicem (4) unitate auctum (5) et ita primitivum dividi potest, tunc ejus numerus rerum (y—1) unitate auctus (nempe y) per hunc primitivum dividi non potest. Et, si ille non potest, tunc hic potest. Est ergo reciproca. Hoc ita

demonstratur: Si $\frac{y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4}$ sive C est divisibilis per 5 seu indicem 4 unitate auctum, et 5 est primitivus, necesse est aliquem ex ipsis factoribus Numeratoris, nempe vel y—1, vel y—2, vel y—3, vel y—4, esse divisibilem per 5; et contra. Ratio: quia cum sit primitivus, non potest unus factorum dividi per unum divisorem ipsius 5, alius per alium, ut in se invicem ducti faciant aliquod divisibile per ipsum 5. Jam si aliquis ex his multiplicatoribus est divisibilis per 5, necesse est numerum, qui minus quam indice unitate aucto seu quinario a quolibet eorum distat, non esse divisibilem per 5. At y distat a quolibet eorum minus quam 5, nam a maxime remoto y—4 distat quaternario. Ergo si aliquis ex his multiplicatoribus divisibilis per 5, tunc y non est divisibilis per 5. Contra si nullus ex his multiplicatoribus est divisibilis per 5, tunc cum sint pauciores unitate quam 5, necesse est proximum ipsis, nempe y, esse divisibilem per 5, quod autem de multiplicatoribus omnibus, et de ipsa combinatione in casu divisoris primitivi verum est. Habemus ergo ostensum, quod proposueramus.

Cum numerus rerum (y) per indicem combinationis primitivum (5) dividi non potest, tunc solum et semper combinatio $\left(\frac{y.y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4.5}\right)$ per ipsum numerum rerum dividi potest. Nam cum numerus rerum y per indicem combinationis primitivum 5 dividi non potest, tunc solum et semper numerus rerum praecedens y—1 unitate auctus, id est y, per indicem combinationis praecedentis 4, unitate auctum, primitivum 5 dividi non potest. Cum numerus praecedens y—1 per combinationis suae indicem 4 unitate auctum 4+1 primitivum dividi non potest, tunc solum et semper combinatio illa $\frac{y-1.y-2.y-3.y-4}{1.2.3.4}$ sive C per indicem suum unitate auctum 4+1 primitivum dividi potest, per propositionem praecedentem convertibilem. Est autem combinatio illa C proxime praecedens numeri proxime praecedentis. Jam cum combinatio proxime praecedens C numeri proxime praecedentis y—1 per indicem suum unitate auctum, seu per indicem combinationis propositae 5 dividi potest, tunc solum et semper ipsa combinatio proposita per suum numerum rerum y dividi potest, per propositio-

nem ante praecedentem convertibilem. Ergo cum numerus rerum etc. Q. E. D.

Ex hac propositione patet, solos Numeros Rerum primitivos habere hanc proprietatem, ut quaelibet eorum combinatio per ipsos dividi possit, seu attributum hoc supra de ipsis demonstratum esse convertibile. Nam inter indices combinationum numeri rerum est quilibet numerus ipso minor, ut inter indices quinarii sunt quaternio, ternio, binio, unio (nullionem autem primarii et ipsam ultimam, hoc loco quinionem, in his propositionibus semper exclusimus). Ergo si Numerus rerum est derivativus seu per aliquem primitivum divisibilis, dabitur aliqua ejus combinatio, cujus index erit ille ipse primitivus, sed illa combinatio non est per suum numerum divisibilis, per prop. praecedentem. Ergo omnis Numerus derivativus habet combinationem, quam non dividit.

Antequam pergamus, propositiones quaedam constituendae sunt de modo cognoscendi, quot in data serie continuorum contineantur numeri divisibiles per datum.

Numeri continui quotcunque incipientes cum unitate, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in eorum maximi per datum divisi quotiente sunt unitates, ut 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13 continent numeros trifidos seu per ternarium divisibiles quatuor, quia 13 divisus per 3 dat neglecto residuo quotientem 4. Hoc ita demonstro: Si maximus 13 dividatur per ternarium sive per 3, prodit quotiens 4. Ergo ternarius 4 vicibus sumtis seu quadritrifidus non est major quam 13; et continue minuendo quotiente, et ternarius 3 vicibus seu tertrifidus et ternarius 2 vicibus seu bitrifidus, et ternarius 1 vice seu unitrifidus, multo minus sunt majores quam 13. Qui sunt omnes trifidi possibiles non majores quam 13, tot scilicet quot in quotiente 4 erant unitates. Hi autem omnes continentur in numeris omnibus ab unitate usque ad 13 simul sumtis, quia numeri continui incipientes ab unitate continent omnes numeros maximo non majores. Ergo tot continent trifidos, quot in maximi per 3 divisi quotiente sunt unitates.

Numeri continui quotcunque, quorum minimus est proxime major numero divisibili per datum, tot continent Numeros divisibiles per datum, quot totidem numeri continui incipientes cum unitate; ita

B 7.8.9.10.11.12.13 tot continent trifidos quot
A 1.2.3 . 4 . 5 . 6 . 7. Nam quilibet priorum seriei ex majoribus constantis vocetur B, quilibet respondens seriei minorum vocetur A, patet fore B aequa. A+6. Nempe 7 est 1+6 et 8 est 2+6, et generaliter B quilibet est A senario numero scilicet trifido auctus; ergo B non est trifidus, nisi et A sit trifidus, et contra.

Numeri continui quotcunque, quorum minimus est proxime major numero divisibili per datum, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in quotiente numeri ipsorum per datum divisi unitates. Patet ex duabus propositionibus praecedentibus. Nam numeri continui 7.8.9.10.11.12.13, quorum minimus est proxime major trifido, continent tot trifidos, quot totidem continui incipientes ab unitate 1.2.3.4.5.6.7 per praecedentem, hi vero tot quot eorum maximi 7 per 3 divisi quotiens 2 continet unitates. Maximus autem 7 est numerus omnium 1.2.3.4.5.6 7, ac proinde et omnium 7.8.9.10.11.12.13. Ergo numeri continui 7.8.9.10.11.12.13 tot continent trifidos, quot sunt unitates in quotiente 2 numeri multitudinis eorum 7 divisi per 3.

Numeri continui, quorum minimus est divisibilis per datum, tot continent numeros divisibiles per datum, quot in numeri eorum unitate minuti et deinde per datum divisi quotiente unitate aucto sunt unitates.

Sint numeri continui octo quorum minimus 6 est trifidus, 6.7.8.9.10.11.12.13; omittatur minimus, supererunt septem 7.8.9.10. 11.12.13, in quibus numerus trifidorum est quotiens numeri 7 divisi per 3, at numeri initio positi octo unum praeterea trifidum habent, nempe minimum 6. Ergo si sint continui trifidi quotcunque ut 6.7 etc. 13, nempe octo, numerus eorum unitate minuatur, fiet 7; is dividatur per 3, quotiens erit 2. Huic adjectus 1, dabit 3 numerum trifidorum quaesitum.

Regula generalis investigandi Numerum Numerorum per datum divisibilium, qui in serie data Numerorum continuorum comprehenduntur: Numerus maximus dividatur perdatum, quotiens residuo neglecto servetur, et numerus minimus proxime inferior etiam dividatur per datum ac quotiens residuo neglecto iterum annotetur; subtrahatur quo-

tiens minor a majori, residuum erit numerus divisibilium quaesitus.

**Sit series continuorum data A 8.9.10.11.12.13;
compleatur retrorsum
usque ad unitatem, fiet series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13;
adjecta erit series continuorum ab
unitate seu series complens C 1.2.3.4.5.6.7; quaeruntur omnes trifidi seriei A. Hi erunt omnes trifidi seriei B (tot quot sunt unitates in quotiente numeri maximi 13 per 3 divisi) demtis omnibus trifidis seriei C, qui sunt tot quot unitates in numero maximo seriei C, nempe 7, per 3 diviso, qui numerus 7 minimo seriei A, nempe 8, proxime inferior est. Ergo omnes trifidi seriei A erunt $\frac{13}{3}$ | 4 seu 4 demto $\frac{7}{3}$ seu 2, seu 4—2 id est 2.**

Si Numerus maximus seriei continuorum est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior est etiam divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data aequivalet numero terminorum diviso per datum, eritque illa divisio exacta.

Sit series data A 7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series complens C 1.2.3.4.5.6,
numerus maximus seriei datae 15 est trifidus, ejus minimo 7 proxime inferior 6 est etiam trifidus. Dico numerum trifidorum seriei A aequivalere numero terminorum seriei A, nempe 9, diviso per 3 eamque divisionem esse exactam. Nam numerus trifidorum seriei A aequivalet numero trifidorum seriei B, demto numero trifidorum seriei C. Trifidorum autem seriei B numerus est $\frac{15}{3}$ exactus, et trifidorum seriei C est $\frac{6}{3}$ exactus; ergo numerus trifidorum seriei A erit $\frac{15-6}{3}$ exactus; at 15—6 est numerus terminorum seriei A, ergo numerus terminorum seriei A divisus per 3 dat exacte quaesitum.

Si numerus maximus seriei continuorum est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior non est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data, quotientem numeri terminorum per datum divisi excedit unitate.

Sit series data A 8.9.10.11.12.13.14.15
et series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15
et series complens C 1.2.3.4.5.6.7,
dico numerum trifidorum seriei A esse $\frac{8}{3}$ (neglecto residuo) + 1 id est 3. Nam trifidi seriei A sunt $\frac{15}{3}$ id est 5, demto $\frac{7}{3}$ neglecto quotiente seu 2. 15 sit exacte divisibilis per 3, non vero 7. Hinc fit, ut detrahendum sit unitate minus, quam fuisset si successisset divisio, itaque non tantum est $\frac{8}{3}$ neglecto residuo, seu $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}$ neglecto residuo, sed praeterea 1, quia in $\frac{15}{3}$ ob exactam divisionem nil negligitur, sed negligitur tantum in detrahendo. Clarius: trifidi seriei A sunt $\frac{15}{3}-[\frac{7}{3}-\frac{1}{3}]$ seu demtis $\frac{7}{3}$ neglecto residuo $\frac{1}{3}$ seu $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}$. Jam $\frac{15}{3}-\frac{7}{3}+\frac{1}{3}$ est $\frac{8}{3}$ $\frac{2}{3}+1$, et $\frac{8}{3}-\frac{2}{3}+1$ est $\frac{8}{3}$ neglecto residuo + 1. Ergo trifidi seriei A sunt $\frac{8}{3}$ neglecto residuo + 1, seu numerus terminorum seriei A, qui est 8, divisus per 3, neglecto residuo, et addito 1.

Si numerus maximus seriei continuorum non est divisibilis per datum, et numerus minimo proxime inferior est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data quotientem numeri terminorum per datum divisum aequat.
Sit series data A 7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
complens C 1.2.3.4.5.6,
dico numerum trifidorum seriei A esse $\frac{10}{3}$. Est enim $\frac{16}{3}$ neglecto residuo, demto $\frac{6}{3}$ exacto.

Si numerus maximus seriei continuorum non est divisibilis per datum et numerus minimo proxime inferior itidem non est divisibilis per datum, numerus tamen seriei est divisibilis per datum, tunc numerus divisibilium per datum in serie data quotientem numeri terminorum per datum divisum aequat.
Sit series data A 5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16
series completa B 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 11.12.13.14.15.16
complens C 1.2.3.4
16—4 est numerus terminorum seriei A, et $\frac{16}{3}$ neglecto residuo, demto $\frac{4}{3}$ neglecto residuo, est aequ. $\frac{16-4}{3}$ neglecto residuo, nam $\frac{16}{3}$ neglecto residuo est $\frac{16}{3}-\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3}$ neglecto residuo est $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$, et

$\frac{16}{3}$ negl. resid. — $\frac{4}{3}$ negl. resid. est $\frac{16}{3} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ seu $\frac{16-4}{3}$. Quod semper ita contingere ostendam: Sit y—x aequ. bl, sitque y aequ. al + m et x aequ. cl + n, erit y—x aequ. al—cl+m—n aequ. bl. Est autem m $\sqcap$ l, ergo m—n non est divisibilis per l, ergo + m—n est 0, seu m aequ. n. Semper ergo duo residua se destruent, seu si duorum numerorum differentia est per datum divisibilis, et neuter numerorum est per datum divisibilis, residua sunt aequalia.

Si nec numerus maximus seriei continuorum, nec numerus minimo proxime inferior, nec numerus terminorum seriei per datum exacte dividi possint, recurrendum est ad regulam generalem, quam esse deprehendi hanc: **Si serie continuorum datis, maximus et minimo proxime inferior (x) per datum (l) dividantur, sitque residuus posterior (n) major (non major) priore (m), numerus divisibilium per datum in serie comprehensorum erit unitate superior (aequalis) quotienti numeri terminorum (y—x) divisi per datum (l).**

Sit y numerus terminorum seriei completae seu maximus seriei datae, et x numerus terminorum seriei complentis seu minimo seriei datae proxime inferior, et y—x numerus terminorum seriei datae, et sit y aequ. al + m, x aequ. bl + n, positis a, b quotientibus, m, n residuis. Numerus orthotomorum (ex. gr. trifidorum) seriei completae $\frac{y}{l}$ neglecto residuo sit a, seu $\frac{y}{l} - \frac{m}{l}$: Numerus orthotomorum seriei complentis $\frac{x}{l}$ neglecto residuo sit b seu $\frac{x}{l} - \frac{n}{l}$. Quorum differentia erit $\frac{y}{l} - \frac{x}{l} + \frac{n}{l} - \frac{m}{l}$ seu $\frac{y-x}{l} + \frac{n-m}{l}$, qui est numerus orthotomorum seriei datae. Ergo $\frac{y-x}{l}$ aequ. $a - b + \frac{m-n}{l}$, et quoniam m $\sqcap$ l, ergo si y—x dividatur per l, erit a—b quotiens et m—n residuus, posito m esse majorem quam n. Ergo $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo erit aequ. a—b, ac proinde Numerus Terminorum seriei datae y—x per l datum divisus neglecto residuo, erit a—b seu erit numerus orthotomorum, idem

est, si sit m—n aequ. 0, quia tunc nullum est residuum. Sin contra sit n major quam m, tunc erit $\frac{y-x}{l} + \frac{n-m}{l}$ aequ. a—b, eritque a—b major quam $\frac{y-x}{l}$, ergo et major quam $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo, qui tamen excessus ipsius a—b super $\frac{y-x}{l}$ est minor unitate, quia n $\sqcap$ l, ergo et n—m $\sqcap$ l, ergo $\frac{n-m}{l} \sqcap 1$. Ergo et excessus ejus super $\frac{y-x}{l}$ neglecto residuo, est minor duabus unitatibus; componitur enim ex $\frac{n-m}{l}$ minore quam 1 et ipso residuo ipsius $\frac{y-x}{l}$ etiam minore quam 1. Excessus autem integri a—b super integrum comprehensum in $\frac{y-x}{l}$ seu quotientem numeri terminorum per datum divisi, cum sit aliquis et tamen minor binario, erit 1. Ergo conclusum habemus: Si n residuus numeri x minimo datae seriei continuorum proxime minoris, divisi per datum l est major quam m, residuus numeri y maximi seriei continuorum datae, tunc a—b numerus divisibilium per datum l comprehensorum in seriei data est unitate major quam $\frac{y-x}{l}$ integer (neglecto residuo) quotiens numeri terminorum seriei per datum l divisi; sin vero residuus ille n hoc m non major, sed vel minor vel aequalis, tunc a—m numerus divisibilium per datum in serie data comprehensorum est quotienti numeri terminorum seriei per datum diviso, neglecto residuo, aequalis.

Ex praecedenti propositione apparet etiam, si residuus minimo inferioris in serie data continuorum per datum divisi est major quam residuus maximi divisi per eundem, fore numerum per datum divisibilium in serie data continuorum comprehensorum majorem numero per datum eundem divisibilium comprehensorum in serie totidem continuorum incipientium cum unitate; alioqui vero fore semper aequalem, nunquam vero minorem. Patet, inquam, ex praecedenti, quia is numerus divisibilium comprehensorum in serie totidem incipientium ab uni-

tate, idem est cum quotiente ipsius numeri terminorum per datum diviso.

Si series continuorum incipiat a numero divisibili per datum, et numerus continuorum non sit divisibilis per datum, erit numerus divisibilium per datum in serie comprehensorum unitate major quotiente numeri terminorum per datum divisi, seu numero divisibilium per datum, qui in serie totidem continuorum cum unitate incipientium comprehenduntur.

Sit series 6.7.8.9.10.11.12.13, cujus minimus est trifidus, utique proxime minor 5, divisus per ternarium, relinquet maximum residuum possibilem, nempe 3 — 1. Ergo numerus maximus seriei 13 divisus per 3 relinquet residuum, qui non potest esse major quam prior, erit ergo vel minor vel aequalis. Si aequalis, tunc duobus residuis m et n se destruentibus erit $\frac{y-x}{l}$ aequ. a—b integro, seu numerus terminorum y—x erit exacte divisibilis per l; et contra, si sit exacte divisibilis per l, tunc $\frac{m-n}{l}$ utique destrui debet, ergo m et n aequales. Quando vero numerus terminorum non est exacte divisibilis per n, ut hoc loco, tunc residui m et n non sunt aequales; est autem n seu 3 — 1 maximus, qui esse potest, ergo m est minor. Hoc autem posito utique numerus divisibilium per datum l comprehensorum in serie data, erit unitate major quotiente numeri terminorum divisi per l, seu numero comprehensibilium in totidem continuis incipientibus ab unitate.

Factus ex numeris continuis quotcunque dividi potest per factum ex totidem continuis incipientibus ab unitate seu $\frac{5.6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6.7.8}$ est integer. Nam numerator continet totidem ad minimum bifidos, totidem trifidos, totidem quadrifidos etc., quot nominator, per propositionem antepraecedentem. Ergo numerator fit ad minimum ex 2 toties in se ducto, 3 toties in se ducto, 4 toties in se ducto, quoties nominator ex illis fit, seu omnes potentiae binarii, ternarii etc. vel alterius primitivi, quae in se invicem ductae constituunt nominatorem, eae in se invicem ductae cum aliis tamen praeterea in ipsos ductis constituunt et numeratorem.

Si factus ex continuis quotcunque divisus per totidem continuos incipientes cum unitate, adhuc dividi potest per proxime majorem divisoribus derivativum, necesse est ut dividi possit praeter priores per quemlibet novi divisoris divisorem. Ut si $\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}$ dividi potest per 6, debet dividi posse et per 2 et per 3. Ergo vel habebit numerator plures bifidos quam nominator, si nempe 5—1 divis. per 2 reliquisset majus residuum, quam 9 divis. per 2, quod non est; vel habebit numerator magis bifidos, nempe 8, cubum in numeratore loco quadrati 4 in nominatore. Quoniam autem methodum habemus sciendi, an plures bifidi vel trifidi vel alii quicunque insint numeratori, quam nominatori, superest ut investigemus etiam an pluries. Ubi considerandum, divisibilium per dignitates numeri seriem seu ordinem investigari utile futurum esse. Binarii dignitatum hic est ordo:

2.4.6.8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.30.32.34.36.38.40.42.44.46.48
divisib. per
2.4.2.8. 2. 4. 2.16. 2. 4. 2. 8. 2. 4. 2.32. 2. 4. 2. 8. 2. 4. 2.16

3:6.9.12.15.18.21.24.27.30.33.36.39.42.45.48.51.54.57.60.63.66.69.72.75.78.81
divisib. per
3.3.9. 3. 3. 9. 3. 3.27. 3. 3. 9. 3. 3. 9. 3. 3.27. 3. 3. 9. 3. 3. 9. 3. 3.81

Sed haec alias prosequemur. Nunc considerandum, si $\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}$ dividi potest per 6, adeoque per 2, necessario altiorem potentiam ipsius 2 confici ex bifidis numeratoris, quam nominatoris. Et quia non sunt plures bifidi in numeratore, quam nominatore, videndum, an non sint plures quadrifidi in numeratore quam in nominatore, quod sciri eadem methodo potest, qua id in bifidis scivimus.

IX.

EXERCITIUM AD PROMOVENDAM SCIENTIAM NUMERORUM.

(1) Proponitur problema *in rationalibus Numeris*: dato numero a, exhibere numerum x, qui faciat, ut $x + \frac{a}{x}$ sit quadratus, aut ostendere impossibilitatem. Is quadratus sit yy, et fiet $xx + a = xyy$.

(2) Si x et y sint *integri*, etiam a est integer, nam ex aequatione praecedenti est $a = xyy - xx$. Itaque cum a aequetur integro, erit integer.

(3) Si a et y sint integri, etiam x est integer. Esto enim x fractus $z : w$ cujus numerator sit z et denominator w, fractione ad minimos terminos reducta, seu ita ut z et w sint primi inter se. Ita ex aequatione articuli 1 fiet $zz + aww = zwyy$, seu $zz : w = zyy - aw$. Ergo $zz : w$ est integer, quod est impossibile, cum z et w sint primi inter se, nisi w sit 1 seu nisi x sit integer. Hic ex supposito fracto concluditur non fractus.

(4) Sed licet a et x sint integri, nihil prohibet saepe y esse fractum, ut mox patebit.

(5) Si numeri omnes requirantur integri, necesse est, ad hoc ut problema succedat, a esse bc, confactoribus b et c existentibus integris, talibus ut $b + c$ sit quadratus, ipse scilicet yy, alter autem horum confactorum velut b erit x. Quia enim $a = xyy - xx$ per artic. 1, ideo positis a et y adeoque (per artic. 3) et x integris, erit a divisibilis per x. Posito ergo $a = bc$ et $b = x$, fiet $bc = byy - bb$ seu $b + c = yy$, ut asserebatur. Exempli causa si a sit 14, ubi $b = 2$ et $c = 7$ et $2 + 7 = 9$, potest esse $x = 2$, nam $2 + \frac{14}{2} = 9$. Potest etiam esse $x = 7$, nam $7 + \frac{14}{7} = 9$. Nec refert utrum alterutér horum b et c aequetur unitati, alter vero ipsi a. Verb. gratia a sit 15, quia ergo $15 + 1 =$ quadrato 16, ideo potest x esse 1; nam $1 + \frac{15}{1} = 16$; potest etiam x esse 15, nam $15 + \frac{15}{15} = 16$.

(6) *Si numeri omnes requirantur integri, habetur solutio*, id est, quaesitum quodvis possibile vel impossibilitas. Cum enim dato numero a integro bini haberi possint ejus confactores quoties dari possunt, patet an et quinam confactores possint componere quadratum. Horum jam quilibet potest esse x

quaesitus, summa autem confactorum erit quadratus ipse yy. Quodsi tales confactores non dentur, problema erit impossibile, per artic. praecedentem, et quando $a+1$ est quadratus, ideo cum 1 et a sint confactores ipsius a, x potest esse 1, item a.

(7) Si omnes numeri requirantur integri, non alius primitivus potest esse a, quam 3. Est enim a primitivus, ergo bini confactores non possunt esse alii, quam a et 1. Ergo (per artic. 5) $a+1=yy$ seu $a=yy-1=y+1$, $y-1$. Ergo (major) $y+1$ est a, et (minor) $y-1$ est 1. Ergo $y=2$. Ergo $y+1$ seu a est $=3$. Et x erit 1 vel 3, nam $1+\frac{3}{1}=4$ et $3+\frac{3}{3}=4$.

(8) Si omnes numeri requirantur integri, et postulentur a et x primi inter se, necesse est, ad hoc ut problema sit possibile, datum a unitate auctum facere quadratum, qui quadratus erit yy, sed x erit 1. Neque enim numerorum primorum inter se unus, nisi sit unitas, alterius factor esse potest; primos autem inter se vocamus, qui non aliam habent communem mensuram quam unitatem.

(9) Si soli a et x requirantur integri, datus scilicet et quaesitus, nec referat, utrum resultans yy sit integer vel non; et y sit $v:w$ fractione ad minimos terminos redacta, et proinde v et w sint integri primi inter se, w abeunte in 1 eo casu, quo y est integer; ponaturque $a=bc$ et $x=bz$, ipso b existente maxima mensura ipsorum a et z et abeunte in 1 eo casu, quo a et x sint primi inter se: his positis dico fore $x=bww$. Nam in aequatione articuli 1, pro x substituendo bz et pro y substituendo $v:w$, fiet $bbzzww+bcww=bzvv$ seu fiet $bzzww+cww=zvv$ seu $bzz+c=zvv:ww$, itaque $zvv:ww$ est integer, cum sit aequalis integro $bzz+c$. Hinc cum zvv dividi possit per ww, sed vv et ww non possint habere communem mensuram (ex hypothesi), necesse est ut z dividi possit per ww. Rursus (eodem argumento) quia $cww:z$ est integer, seu cww dividi potest per z, z autem et c sunt primi inter se (alioqui b non esset maxima communis mensura ipsorum bc et bz contra hypoth.), necesse est ww dividi posse per z. Hinc cum paulo ante ostensum sit etiam z dividi posse per ww, consequens est z et ww esse numeros inter se aequales, et proinde cum posuerimus x esse bz, fiet $x=bww$.

(10) Iisdem positis necesse est, cc esse majorem quam $4bww$. Nam ex aequatione articuli praecedentis pro z ponendo ww fiet $bw^4+c=vv$, seu $c=vv-bw^4$ seu $c=v+ww\sqrt{b}$, $v-ww\sqrt{b}$. Jam in integris productum ex duobus unitate majoribus est majus pro-

ducente quovis. Ergo c est major quam $v+ww\sqrt{b}$, itemque c est major quam $v-ww\sqrt{b}$. Ergo et c est major quam horum differentia, quae est $2ww\sqrt{b}$, seu cc major est quam $4bw^4$. Excipitur casus, quo excessus ipsius v seu ipsius $\sqrt{(bw^4+c)}$ super $ww\sqrt{b}$ est minor unitate.

(11) Iisdem positis et posito praeterea a et x esse integros primos inter se, x est quadratus nempe ww, nam cum x sit bww per praecedentem artic., eo casu b abit in 1.

(12) Iisdem positis, si a et x sint integri primi inter se, habebit a duos confactores d et e, quorum differentia erit duplum quadrati et is quadratus erit x. Veluti si a sit 33 et x sit 4, et d sit 3 et e sit 11, erit $11-3=8=2.4=2x$ et $4+\frac{33}{4}=\frac{49}{4}$. Nam ex aequatione articuli 9, ubi erat $bzzww+cww=zvv$, pro z ponendo ww (per artic. 9) et pro b ponendo 1 (ex hyp. articuli praesentis et praecedentis) et pro c ponendo a (nam cum sit $bc=a$, faciendo $b=1$ fit $c=a$) prodibit $w^4+a=vv$ seu $a=vv-w^4=v+ww$, $v-ww$. Sunt ergo duo confactores ipsius a, quorum unus minor, nempe d, sit $v-ww$, alter major, nempe e, sit $v+ww$, et fiet $e-d=2ww$, ipso ww existente x, per praeced.

(13) Si ipsorum a et x maxima communis mensura b sit quadratus $\beta\beta$, tunc c (quotiens ex a divis. per b) habebit binos confactores d et e, quorum differentia divisa per β, radicem quadraticam ipsius b, dabit duplum quadrati, qui quadratus multiplicatus per b, dabit x.

Exempli causa sit a, 729, potest x esse 36, horum maxima communis mensura b est $9=\beta\beta$. Nam $729:9=81=c=de=3.27$, et $e-d$ $(=27-3)$ $=24$ et $24:\beta=24:3=8=2.4=2ww$, et $ww=4$, et $bww=36=x$. Et fiet $36+\frac{729}{36}=\frac{225}{4}$. Nam ex aequatione articuli 9 pro z ponendo ww, et pro b ponendo $\beta\beta$ fit $c=vv-\beta\beta w^4=v+\beta ww$, $v-\beta ww$. Ergo c habebit binos confactores $d=v-\beta ww$, et $e=v+\beta ww$, et $e-d$ erit $=2\beta ww$. Ergo $e-d,:\beta=2ww$ et $e-d,:2\beta,,b=bww=x$. Casus articuli 10 vel 11 sub hoc etiam articulo continetur, cum b adeoque et β est 1.

(14) Si a datus et x quaesitus requirantur rationales integri in aequatione $x+\frac{a}{x}=yy$, nec referat utrum y sit integer an fractus, invenire numerum x quoties est possibilis, aut invenire impossibilitatem, idque per tentationes numero definitas. Primum dispici potest, an

a habeat binos confactores, quorum summa sit quadratus, et habebitur aliqua solutio per artic. 5. Deinde dispici potest, an a divisus exacte per quadratum (qui etiam potest, esse 1) det numerum habentem binos confactores d et e, quorum differentia divisa per radicem dicti quadrati, det duplum novi quadrati. Ita enim habebitur aliqua solutio per artic. 13. Sed generaliter ut omnis solutio possibilis aut impossibilitas inveniatur, quaerantur bini quivis confactores ipsius a, qui vocentur b et c, et pro quibusvis b et c sumatur integer w talis, ut sit $4bw^4$ minor quam cc per artic. 10, tenteturque an x possit esse bww per artic. 9, et cum res succedit, ut hoc modo fiat $x+\frac{a}{x}$ vel quod idem est $bww+\frac{c}{ww}$ vel quod eodem redit bw^4+c aequalis quadrato rationali integro, tunc et non aliter habetur quaesitum. Quodsi nullus w inter limites praescriptos det x succedentem, problema pro numero dato a impossibile est.

Ut melius intelligatur praxis hujus solutionis, subjiciemus aliquot exempla. Cum nempe numerus a datus est integer, et x quaesitus requiritur integer, a datus sit 19, quaeritur an sit aptus ut inveniri possit x integer pro aequatione $x+\frac{19}{x}=yy$.

	b	19	1
	c	1	19
	cc	1	361
w,1	$4bw^4$	76	4
	$x = bww$	19 succed.	1 non succedit.
w,2	$4bw^4$	. . . .	64
	$x = bww$	. . . .	4 non succedit.
w,3	$4bw^4$	. . . .	324
	$x = bww$	. . . .	9 succedit.
w,4	$4bw^4$	. . . .	1024 justo major.

Nempe a posito 19, b est 19 vel 1, et c est 1 vel 19; itaque cc est 1 vel 361. Jam cum b est 19 et c est 1, tunc posito w, 1, fit $4bw^4=76$, qui numerus est justo major, id est major quam cc seu quam 1. Ergo pro b, 19 et c, 1 frustra tentatur major w, nam sic $4bw^4$ fiet adhuc majus excedens. Pergamus ergo ad b, 1 et c, 19, erit cc, 361. Hinc si w sit 1, fiet $4bw^4=4$, qui numerus minor est quam 361. Ergo tentetur, an $x=bww=1$ succedat; sed non succedit, quia $1+19=20$, qui non est quadratus. Eodem modo res non succedit, cum w sumitur 2, etsi enim $4bw^4$ fiat 64, minor quam 361, tamen $x=bww=4$ non suc-

cedit. Sed si sumatur w, 3, tunc $4bw^4$ erit 324 minor quam 361, et $x=bww$ erit 9. Jam $9+\frac{19}{9}=\frac{100}{9}$, qui est quadratus. Ergo hic casus succedit. Sed posito $w=4$ fit $4bw^4$, 1024 justo major seu major quam 361. Ergo frustra assumitur w adhuc major quam 4, et quia non dantur alii b et c (confactores ipsius 19) quam b, 19 et c, 1, vel b, 1 et c, 19, alia solutio haberi nequit.

Sumamus aliud exemplum: postuletur x integer, posito a esse 39, seu quaeritur $x+\frac{39}{x}=yy$.

	b	39	13	3	1
	c	1	3	13	39
	cc	1	9	169	1521
w,1	$4bw^4$	justo maj.	justo maj.	12	4
	$x=bww$	. . .	. . .	3 succ.	1 non succedit
w,2	$4bw^4$	. . .	. . .	192 just. maj.	64
	$x=bww$	. . .	. . .	. . .	4 non succedit
w,3	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	324
	$x=4bw$	. . .	. . .	. . .	9 non succedit
w,4	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	1024
	$x=bw^4$	. . .	. . .	. . .	16 non succedit
w,5	$4bw^4$	. . .	. . .	. . .	2500 justo maj.

itaque non aliter problema succedit, quam si x sit 3, ubi fit $3+\frac{39}{3}$ seu $3+13=16$.

Postuletur denique x integer, posito a esse 42, seu quaeritur $x+\frac{42}{x}=yy$. Et schema operationis erit tale:

	b	42	21	14	7	6	3	2	1
	c	1	2	3	6	7	14	21	42
	cc	1	4	9	36	49	196	441	1764
w,1	$4bw^4$	j.m.	j.m.	j.m.	28	24	12	8	4
	$x=bww$	.	.	.	7n.s.	6n.s.	3 n.s.	2n.s.	1 n. s.
w,2	$4bw^4$	.	.	.	j. m.	j. m.	192	128	64
	$x=bww$	.	.	.	.	.	12 s.n.	8 n.s.	4 n. s.
w,3	$4bw^4$	.	.	.	.	.	j. m.	j. m.	324
	$x=bww$	.	.	.	.	.	.	.	9 n. s.
w,4	$4bw^4$	.	.	.	.	.	.	.	1024
	$x=bww$	.	.	.	.	.	.	.	16 n. s.
w,5	$4bw^4$	.	.	.	.	.	.	.	justo maj.

Anmerkung. Das Format des Buches gestattete es nicht, das vorstehende Schema genau nach dem Ms. abzudrucken; es mussten, um Raum zu gewinnen, die Worte justo maj. mit j. m. und non succedit mit n. s. wiedergegeben werden.

Itaque cum a est 42 et x requiritur integer, problematis solutionem non succedere ostensum est.

Superest ut solvendi problematis modum quaeramus, cum a datus est fractus, x autem est integer; item cum a est integer, x autem permissus est fractus; ac denique cum a est fractus et x etiam permissus est fractus. Sed haec nunc persequi non vacat. Tantum paucis annotare placet, posito a integro, x autem fracto, positisque integris b, c, q, u, v fore $a=bc$, $x=buu:qq$, $q=v:qu$ et $bu^4+cq^4=vv$, ita tamen ut b possit esse unitas, sed q erit numerus integer unitate major. Erunt autem c et u, b et q, u et q, v et u, primi inter se. Et numeri fracti x et y, ad minimos terminos fractionum reducti, non quidem habent communem denominatorem, habent tamen denominatores, quorum est communis divisor. Numeratores autem ipsius x et ipsius y non possunt habere communem divisorem, nisi si quem habent communem cum ipso a. Itaque dato numero integro $a=bc$, ut haberi possit $x+\frac{a}{x}=yy$, quaeruntur integri u et q, primi inter se, et u primus cum c, et q primus cum b, tales, ut fiat bu^4+cq^4 aequalis quadrato cuidam vv, nec problema solvi potest, quia u et q quales diximus inveniantur. Sufficeret autem inveniri per tentationes numero definitas, ut supra articulo 14.

X.

OBSERVATION NOUVELLE DE LA MANIÈRE D'ESSAYER SI UN NOMBRE EST PRIMITIF.

(Aus einem Briefe Leibnizens an den Herausgeber des Journals des Savans. Février 1678.)

J'ai fait quelques observations sur les nombres primitifs, qui sont de conséquence, à mon avis, pour la perfection de la science des nombres, dont on appelle primitifs ceux qui ne peuvent être

divisés, ni produits par multiplication, au lieu que tous les autres peuvent être produits et divisés par ceux-ci. Si leur progression était bien connue, elle servirait à nous decouvrir le mystère des nombres en général: mais elle a paru si bizarre jusques ici, qu'on n'en a pû trouver aucune marque ni proprieté affirmative; et tout ce qu'on en sçait, c'est qu'ils sont indivisibles: encore est-il malaisé de le reconnaitre dans les grands nombres, sans en faire l'essai par une multitude d'autres, ce qui est étrangement prolixe. Je crois avoir trouvé le vrai chemin pour pénetrer dans leur nature: mais n'ayant pas eu encore le loisir de l'achever, je vous donnerai ici une proprieté positive, qui me parait curieuse et utile quoiqu'elle ne soit pas réciproque; car au moins tous les nombres qui ne l'ont pas, seront exclus d'abord. Voici cette proprieté. Tout nombre primitif au dessus de cinq étant diminué ou de 1 ou de 5 disjontivement, est divisible par 6. Par exemple, 7 moins 1 est 6, 11 moins 5 et 6, 13 m. 1 est 12, 17 m. 5 est 12, 19 m. 1 est 18, 37 m. 1 est 36, 101 m. 5 est 96, 103 m. 1 est 102, qui divisé par 6 donne 17, 10007 m. 5 divisé par 6 donne 1667, 510511 m. 1 divisé par 6 donne 85085 etc.

XI.

INVENIRE TRIANGULUM RECTANGULUM IN NUMERIS CUJUS AREA SIT QUADRATUS.*)

Ajo id problema esse impossibile.

Inter varias demonstrandi rationes hanc reperi pulcherrimam, quia per multas alias praeclaras propositiones ducit.

---

*) Leibniz hat bemerkt: 29. Decembr. 1678.

Propositio I. Si sint duo triangula similia, et latus trianguli unius fit multiplicatione lateris homologi trianguli alterius per aliquem numerum, etiam area illius fiet ex area hujus per ejusdem Numeri quadratum multiplicata.

Nam areae triangulorum similium sunt inter se ut quadrata homologorum laterum, adeoque si latus fit multiplicatione lateris homologi per aliquem numerum, fiet quadratum lateris multiplicatione lateris homologi per quadratum ejusdem numeri. Ac proinde idem est in areis Triangulorum ipsorum.

Propositio II. Si area trianguli rectanguli primitivi in numeris integris, quadratus esse non potest, etiam derivativi in integris, imo et trianguli rectanguli cujuscunque in numeris fractis, area non potest esse quadratus.

Primo. Nam primitivum et derivativum sunt similia, ergo per prop. 1. area primitivi sit ex divisa area derivativi per quadratum numeri derivativum metientis. Ergo si area derivativi est quadratus, etiam quod ea per quadratum divisa sit, nempe area primitivi erit quadratus; quod si impossibile ostendatur, etiam aream derivativi quadratum non esse posse patet.

Secundo. Trianguli rectanguli in numeris fractis latera reducantur ad communem denominatorem, manifestum est tres numeratores fore tria latera homologa alterius trianguli similis in integris; et aream trianguli rectanguli in fractis in quadratum communis illius denominatoris ductam dare aream trianguli homologi in integris per prop. 1, quae si quadratus esse non potest, neque id, quo in quadratum ducto ipsa producitur, nempe area trianguli in fractis, quadratus esse poterit.

Problema III Si in triangulo rectangulo duo latera quaelibet habeant communem mensuram, tertium habebit eandem communem mensuram.

Est enim tertium nihil aliud quam latus summae vel differentiae quadratorum a duobus reliquis. Jam ex hypothesi duo ista reliqua latera habent communem mensuram, ergo et quadrata eorum habent communem mensuram, nempe quadratum communis mensurae laterum. Ergo quadratorum

ab ipsis summam vel differentiam metitur communis horum quadratorum mensura, nempe quadratum communis mensurae laterum. Quodsi ergo hoc quadratum summam vel differentiam illam metitur, etiam latus hujus quadrati (scilicet communis mensura duorum reliquorum laterum) latus summae illius vel differentiae, id est latus trianguli tertium metietur.

Propositio IV. Duo numeri integri inaequales, non quadrati, quorum in se invicem ductu producitur quadratus, habent aliquam communem mensuram.

Ut a^2b, b vel a^2b, bc^2, unde fit a^2b^2 vel $a^2b^2c^2$. Nam quivis quadratus producitur ex quadratis factorum lateris. Itaque dividi potest in duos factores non nisi tribus modis, vel enim omnia quadrata divelluntur, uno latere hinc, altero illinc manente, et duo illi factores sunt aequales, nempe radix (v. g. abc, abc); vel nulla quadrata divelluntur, et tunc aliqua quadrata hinc, aliqua illinc, consistunt, et uterque factor est quadratus (v. g. a^2, b^2c^2); vel aliqua quadrata divelluntur, aliqua non divelluntur, et tunc latus ejus quod divellitur, hinc pariter atque illinc consistit (v. g. a^2b; bc^2) ac proinde duo factores divellendo facti habent mensuram communem, nempe hoc ipsum latus. Ergo si duo factores quadrati sint inaequales, et non quadrati, habebunt communem mensuram, numerum scilicet aliquem.

Propositio V. Omnia latera trianguli rectanguli in integris primitivi sunt numeri impares praeter unum latus circa rectum, quod semper est par (si quidem area est integer).

Primum patet, omnia latera non posse esse pares, alioqui triangulum non esset primitivum, quia communis mensura foret binarius. Nec duo quaelibet possunt esse pares, alioqui et tertium foret per prop. 3. Ergo si quod est par, erit unicum tantum ex tribus. Est autem semper aliquod, si quidem area est integer, quia alioqui latere uno in alterius circa rectum dimidium ducto non potest prodire integer. Quid fiat, cum area non est integer, non est hujus loci; quaerimus enim aream in integris, quae sit quadratus.

Propositio VI. Omnibus ut supra positis, latus impar circa rectum et dimidium lateris paris non possunt esse simul quadrati.

Constat et dudum ab aliis demonstratum est, latera trian-

guli rectanguli in numeris integris omnia sic posse exprimi:

$$\underbrace{x^2 - y^2 \mid 2xy}_{\text{latera circa rectum}} \quad \mid \quad \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{hypotenusa}}$$

Ajo $x^2 - y^2$ et xy non posse simul esse quadratos, posito triangulum de quo agitur esse primitivum. Nam si xy est quadratus, tunc per prop. 4. vel x et y habebunt communem mensuram, vel tam x quam y erit quadratus. Prius fieri hic non potest, alioqui et omnia trianguli latera habebunt communem mensuram, quod est contra naturam trianguli primigenii. Restat ergo posterius, ut tam x quam y sint quadrati. Eodem modo si $x^2 - y^2$ (seu $x+y$ in $x-y$) est quadratus, tunc per prop. 4. vel $x+y$ et $x-y$ habent communem mensuram, vel sunt quadrati ambo. Prius fieri non potest, nam si $x+y$ et $x-y$ essent commensurabiles, nullam possent etiam habere communem mensuram quam binarium, nisi x et y etiam commensurabiles velimus, quod paulo ante explosimus. Sed nec binarium habent pro communi mensura, alioqui essent pares, ergo et factum ex ipsis $x^2 - y^2$ esset par, cum tamen sit impar per prop. 5, quippe cum alterum latus circa rectum $2xy$ sit par. Restat ergo posterius, ut tam $x+y$ quam $x-y$ sint ambo quadrati. Cumque supra ostenderimus, in praesenti hypothesi etiam x et y esse ambos quadratos, habebimus quatuor quadratos y, $x-y$, x, $x+y$, sed hoc quoque impossibile est, quia ita tres haberentur quadrati progressionis arithmeticae, $x-y$, x, $x+y$, differentiam habentes quadratum, quod est absurdum. Ergo impossibile est, latus impar et dimidium lateris paris simul esse quadratos.

Propositio VII. Iisdem positis, iidem non possunt esse aequales.

Sint xy et $x^2 - y^2$ aequales, si fieri potest; ergo $y^2 + xy$ aequ. x^2, ergo $y+x$ in y erit quadratus; et $x^2 - xy$ aequ. y^2, ergo $x-y$ in x erit quadratus. Ergo duo numeri $x+y$ et y (item $x-y$ et x) per prop. 4. vel erunt aequales, quod esse non potest, vel commensurabiles, quo facto et x et y erunt commensurabiles contra ostensa in demonstratione propositionis praecedentis; vel erunt simul quadrati, sed illic duos $x+y$ et y itemque hic duos $x-y$ et x, et in summa hos quatuor

simul esse quadratos impossibile est, alioqui quatuor y, x − y, x, x + y simul essent quadrati. Ergo impossibile est, xy et $x^2 - y^2$ hoc loco esse aequales.

Propositio VIII. Area Trianguli Rectanguli primitivi in numeris integris quadratus esse non potest.

In Triangulo rectangulo primitivo, quale dixi, duo latera circa rectum nullam habent communem mensuram (quia per prop. 3. tunc etiam tertium haberet communem mensuram, atque ita non foret triangulum primitivum). Ergo etiam latus unum et alterius dimidium multo magis nullam communem mensuram habebunt (nam si dimidium latus A dividi potest per divisorem seu mensuram lateris B, multo magis ipsum latus A per eum dividi poterit). Jam ex latere uno circa rectum in alterius dimidium ducto fit area Trianguli, ergo area trianguli fit ex duobus numeris, nullam mensuram communem habentibus. Duo autem isti numeri non sunt aequales per prop. 7. nec ambo quadrati per prop. 6, ergo factus ex ipsis non est quadratus per prop. 4; sed factus ex ipsis est area trianguli, ergo ea non est quadratus. Q. E. D.

Propositio IX. Nullius omnino Trianguli rectanguli in numeris integris vel fractis area quadratus esse potest.

Non in integris primitivis per prop. 9; ergo nec in aliis integris vel fractis per prop. 2. Q. E. D.

Corollaria.

Primo. Cubus latere multatus non aequatur quadrato.

Nam $x^3y - xy^3$ seu area Trianguli Rectanguli in numeris non aequatur quadrato per prop. 9, sed si y aequalis unitati, erit area cubus latere multatus.

Secundo. Tres numeri continui in se invicem ducti non producunt quadratum.

Nam x − 1, x, x + 1 producunt $x^3 - x$, qui per coroll. prim. non est quadratus.

Tertio. Differentia duorum quadrato-quadratorum non potest esse quadratus.

Alioqui enim aliquando $x^2 - y^2$ et xy in se invicem possent facere quadratum, posito scilicet tam x quam y esse quadratos, tunc enim xy foret quadratus, ergo si $x^2 - y^2$ etiam quadratus, productum quoque ex xy in $x^2 - y^2$ foret quadra-

tus, quod fieri non potest, quia hoc productum trianguli rectanguli area est. Jam si x et y sunt numeri quadrati, verbi gratia x aequ. ν^2 et y aequ. ω^2, fiet loco $x^2 - y^2$ quantitas $\nu^4 - \omega^4$, quae proinde quadrato aequari non potest.

Quarto. Differentia duarum fractionum sibi ipsis reciprocarum, seu differentia duorum numerorum qui in se invicem ducti faciunt unitatem, non est quadratus.

Nam $x^3y - xy^3$ aequ. $x^2y^2z^2$ est aequatio impossibilis, quia area trianguli aequaret quadrato. Ergo aequatio $x^2 - y^2$ aequ. xyz^2 seu $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ aequ. z^2 est etiam impossibilis*).

XII.

MEDITATIO JURIDICO-MATHEMATICA DE INTERUSURIO SIMPLICE.

Interusurium sive resegmentum anticipationis, vulgo Germ. Rabat, est differentia inter pecuniam in diem certum debitam et praesentem ejus valorem, seu quanto plus petat, qui plus tempore petit, vel quanto minus solvere aequum sit eum, qui post aliquot annos demum debiturus nunc solvit. Hujus quantitas, quae apud Jurisconsultos passim non satis, et apud aliquos non satis recte explicatur, accurato calculo definire potest, duabus suppositionibus ex jure assumtis. Nimirum

I. SUPPOSITIO PRIMA est, quod is, a quo pecunia ante tempus, quo deberi incipit, petitur, vicissim petere potest, ut sibi eo nomine, quovis anno

*) Am Rande des Manuscripts hat Leibniz bemerkt: $x^3y - xy^3$ aequ. y^2z^2 impossibilis, ergo x^3 aequ. $xy^2 + yz^2$ impossibilis in numeris, ergo aequatio cubica $x^3 - y^2x$ aequ. yz^2 est indeprimibilis. Ecce usum harum numericarum contemplationum in reducendis aequationibus.

futuro medii temporis, praestetur legitima usura. Exempli causa: post decem annos proximos finitos mihi centum debebis (de quibus interim nullas debes usuras, alioqui sortem jam nunc deberes); ego, qui forte negotium aliquod utile, sed paratae pecuniae indigum gesturus sum, peto et a te obtineo, ut nunc solvas; tu vicissim petere potes, ut eo nomine tibi quovis anno totius decennii proximi finito solvam quinque: nec refert, utrum pecunia, quae ante tempus solvitur, sors sit an usura. Omnis enim usura soluta fit sors; imo cum usurarum petitio per se odiosa sit, magis odiosa erit usurarum petitio ante tempus, et qui nihil eo nomine praestare volet, incidet in quandam usurariam pravitatem: revera enim plus usurae nomine exiget, quam legibus permissum est, quia tempore quoque plus petitur. Itaque usurae exactae ob usuras ante tempus praestitas, quae sortis naturam induere, non nisi vocabulum commune habent cum usuris usurarum non solutarum, quae legibus prohibentur, et tantum abest negotium in vetitum Anatocismum incidere, ut secus fieri regulariter in leges peccatum videatur; regulariter, inquam, nam exceptiones ex natura negotii personarumque sumi possunt (de quibus alias), quae judicis arbitrio permittuntur. Nobis autem in calculo ineundo inspiciendum videtur, quod regulare exactumque est.
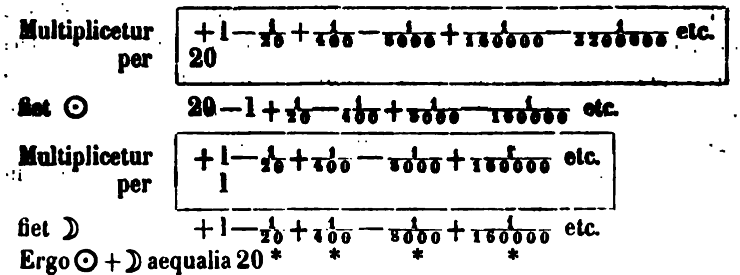
II. SUPPOSITIO SECUNDA est ex jure notissimo petita, quod compensatio est quaedam solutio, et qui a pecunia, quam accipit, summam certam sibi detrahi patitur, eam ipsam summam eo ipso tempore solvisse censetur.

III. His adjungo POSTULATUM, quod creditor ac debitor in diem futurum certum de pecuncia nondum caedua nunc statim inter se contrahere possint velintque, ita ut totum negotium simul ac semel inter ipsos (et quidem sine alterutrius laesione) finiatur. Itaque creditor, qui centum post decennium debita nunc anticipat, eoque nomine quovis anno decennii proxime futuri deberet quinque solvere, ut ea molestia se debitoremque liberet totumque negotium finiat, potest pati, ut sibi nunc statim de ipsis centum detrahatur aliquid usurarum futurarum nomine, et quidem non integra 50 seu decies quinque, nondum enim caedua sunt seu nondum dies eorum venit, sed paulo minus aliquid. Proinde minus quam centum accipiet, et quod detrahi sibi patitur, ipsissimum est interusurium nunc determinandum.

IV. Ex his jam ducetur CONCLUSIO PRIMA: Si usura legitima sit vicesima sortis, valor praesens unitatis post annum debitae erit: $\frac{1}{1} - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} + \frac{1}{3200000}$ etc. in infinitum, sive generalius, loco 20 assumendo numerum quemcunque ν, qui quotam usurariam exprimat, $\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{\nu^3} + \frac{1}{\nu^4} - \frac{1}{\nu^5}$ etc. Demonstratio simul et explicatio: Statim post annum finitum mihi debebis unitatem seu 1) (ex facto), unum verbi gratia aureum, aut unam decadem aureorum, vel unum centenarium etc. Hanc unitatem sive sortem, si mihi nunc solvas, ejus nomine tibi usuram post annum finitum debebo, nempe vicesimam unitatis seu $\frac{1}{20}$ (per suppositionem artic. 1); quoniam vero placuit, ut negotiam inter nos nunc statim finiatur (per postulatum artic. 3), ideo tu vicissim postulas, ut ego tibi hanc summam $\frac{1}{20}$ nunc solvam anticipando. Solutio autem haec fieri potest per compensationem, si tantundem mihi detrahi patiar de summa, quam a te accipere debeo (per supposit. artic. 2), accipio ergo 1 minus $\frac{1}{20}$ seu $1 - \frac{1}{20}$. Sed quia ita ut quoque summam $\frac{1}{20}$ post annum demum caeduam nunc accepisti, eo nomine et tu mihi post annum finitum debebis usuram (per artic. 1), nempe vicesimam de $\frac{1}{20}$, hoc est $\frac{1}{400}$. Et cum negotium statim inter nos sit finiendum (per artic. 3), ea mihi nunc statim dabis praeter summam praecedentem, quae erat $1 - \frac{1}{20}$; dabis ergo mihi nunc $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$. Verum ita mihi quoque istam summam $\frac{1}{400}$ post annum demum caeduam nunc statim anticipando dedisti, itaque eo nomine vicissim tibi post annum finitum debebo usuram (per artic. 1), nempe vicesimam de $\frac{1}{400}$, hoc est $\frac{1}{8000}$; et cum negotium statim inter nos sit finiendum (artic. 3), hanc usuram anticipando statim nunc tibi salvam, salva rursus anticipationis consideratione. Solvere autem potero per compensationem (artic. 2) seu statim $\frac{1}{8000}$ a te detrahi patiar de summa praecedente, quam mihi solvere debes, quae erat $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$, itaque solves mihi $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$. Et sic in infinitum calculum continuatum fingendo semperque anticipando (ut negotium statim finiatur) nulliusque anticipationis resegmentum negligendo (ut neuter laedatur), patet te mihi solvere nunc debere summam seriei infinitae praedictae, cujus termini sunt progressionis Geometricae subvigecuplae, sem-

per enim sequens est vigesima pars proxime antecedentis. Signa autem $+$ et $-$ alternantur.

V. **LEMMA** ex calculo infinitorum: Fractio $\frac{\nu}{\nu+1}$ est aequalis toti seriei infinitae $\frac{1}{1}-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{\nu^4}-\frac{1}{\nu^5}$ etc. Demonstratio simul et explicatio: Posito ν esse 20, ostendendum est fractionem $\frac{20}{21}$ idem esse quod infinita series $\frac{1}{1}-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}-\frac{1}{3200000}$ etc. Nimirum fractio $\frac{20}{21}$ multiplicata per 21 dat 20, ut patet; et series ista infinita, multiplicata per 21 dat etiam 20, ut mox ostendetur. Jam quorum aequi-multipla sunt aequalia, ea ipsamet sunt aequalia; aequatur ergo fractio et series. Superest tantum ut ostendatur, seriem multiplicatam per 21 seu per $20+1$ dare 20. Operatio ita stabit:



Multiplicetur $+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}-\frac{1}{3200000}$ etc.
per 20

fiet ☉ $20-1+\frac{1}{20}-\frac{1}{400}+\frac{1}{8000}-\frac{1}{160000}$ etc.

Multiplicetur $+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc.
per 1

fiet ☽ $+1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc.

Ergo ☉ + ☽ aequalia 20 * * * *

VI. CONCLUSIO SECUNDA: Valor praesens unitatis seu sortis post annum debitae est $\frac{\nu}{\nu+1}$, posito ν esse numerum, quotam usurariam exprimentem, seu si ν sit 20, hoc est si usurae sint quincunces sive vigesima sortis, erit $\frac{20}{21}$ seu subsesquivigecupla sortis sive $\frac{100}{105}$ de sorte. Nam valor ille praesens est $1-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}$ etc. (per artic. 4), id est (per artic. 5) $\frac{20}{21}$ seu $\frac{100}{105}$, quod probandum erat. Si vero usurae essent 6 in 100, tunc numerus valeret $\frac{100}{6}$ seu $\frac{50}{3}$, et valor praesens sortis foret $\frac{100}{106}$ seu $\frac{50}{53}$ de sorte. Eadem conclusio adhuc alia ratione inveniri et demonstrari potest sine serie infinitorum hoc modo: Post annum debebis mihi summam S; quaeritur quantum mihi solvi aequum sit nunc, ut res eodem recidat. Ponamus te mihi solvere nunc debere Y; itaque debet summa Y esse talis, ut anno finito usura cum sorte aequetur ei, quod mihi debes. Nam dedisti mihi Y nunc indebita, ergo debeo tibi X, et anno finito debebo tibi Y una cum

vicesima ipsius Y seu $Y+\frac{1}{20}Y$, quae si aequentur ipsi S summae, quam post annum mihi debes, compensatione facta, debitum tunc ipso jure mutuo tolletur per artic. 2, et negotium initum inter nos finitum intelligi potest, quod desideratur artic. 3. Quoniam ergo $Y+\frac{1}{20}Y=S$, erit $Y=\frac{S}{1+\frac{1}{20}}$ seu erit $Y=\frac{20}{21}$ de S, ut supra. Nam si $\frac{20}{21}$ nunc indebite solvas, post annum inde usuras debebo $\frac{1}{21}$; ergo post annum in summa tibi debebo $\frac{20}{21}+\frac{1}{21}$ seu $\frac{21}{21}$ sive 1. Sed post annum tu quoque mihi debebis 1, unitatem nempe sive sortem; ergo compensatione facta apparet, si pro 1 tunc debendis nunc solvas $\frac{20}{21}$, neutrum alteri quicquam amplius debiturum. Licet autem haec via in hoc casu sit facilior priore, tamen priorem magni momenti esse judico, quia exemplum praebet Analyseos memorabilis, ab Algebra in eo diversae, quod Algebra, ut in posteriore via patet, assumit quantitatem incognitam tanquam cognitam, et inde regrediens eamque cum cognitis aequans, valorem ejus quaerit, prior vero Analysis per meras cognitas procedens valorem incognitum directe obtinet. Quod magnum usum habet, quando impossibile est obtineri valorem incognitae rationalem per Algebram, tunc enim ea nihilominus hac via obtineri potest per seriem infinitam.

VII. CONCLUSIO TERTIA. Iisdem positis valor praesens unitatis seu sortis post biennium debitae est $\frac{1}{1}-\frac{2}{\nu}+\frac{3}{\nu^2}-\frac{4}{\nu^3}+\frac{5}{\nu^4}-\frac{6}{\nu^6}$ etc. Demonstratio. Debebis mihi 1 biennio abhinc: quod si mihi nunc solvas 1 anticipando, inde tibi debebo usurae nomine post annum $\frac{1}{20}$, post biennium rursus $\frac{1}{20}$ in summa $\frac{2}{20}$; quae si statim mihi detrahas per artic. 1, dabis mihi tantum $1-\frac{2}{20}$. Sed quia hoc modo tu quoque priora $\frac{1}{20}$ uno anno, nempe primo, et posteriora $\frac{1}{20}$ duobus, nempe primo et secundo anticipasti; ideo usuram mihi post annum primum tam ob priora, quam ob posteriora $\frac{1}{20}$ primo anno anticipata debebis, nempe bis $\frac{1}{400}$ seu $\frac{2}{400}$, et post annum secundum ob posteriora $\frac{1}{20}$ secundo anno anticipata debebis mihi $\frac{1}{400}$; ergo summa $\frac{3}{400}$, quae si rursus anticipando mihi solvas, dabis mihi $\frac{1}{1}-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}$. Sed jam ita ego rursus priora $\frac{1}{400}$ anticipavi anno primo, posteriora vero $\frac{2}{400}$ anno primo et secundo: unde usuram tibi debebo, quae anno primo finito de prioribus $\frac{2}{400}$ erit $\frac{2}{8000}$, de posterioribus $\frac{1}{400}$ erit $\frac{1}{8000}$, summa $\frac{3}{8000}$; anno secundo vero de posterio-

ribus $\frac{1}{400}$ usura erit $\frac{1}{8000}$, et summa usurarum anni primi et secundi $\frac{4}{8000}$, quam si rursus anticipando mihi detrahi patiar, dabis mihi tantum $1-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}-\frac{4}{8000}$. Sed jam ita tu priora $\frac{3}{8000}$ rursus anticipasti anno primo, posteriora $\frac{1}{8000}$ anno primo et secundo, unde usuram mihi debebis, quae anno primo de prioribus $\frac{3}{8000}$ est $\frac{3}{160000}$, de posterioribus $\frac{1}{8000}$ est $\frac{1}{160000}$, summa $\frac{4}{160000}$; anno secundo de posterioribus $\frac{1}{8000}$ est rursus $\frac{1}{160000}$, summaque usurarum anni primi et secundi $\frac{5}{160000}$, quam si mihi statim solvas anticipando (salvo in continuatione calculi anticipationis resegmento) dabis mihi $1-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}-\frac{4}{8000}+\frac{5}{160000}$. Et ita calculum in infinitum continuatum fingendo, prodibit series infinita, quam posuimus.

VIII. CONCLUSIO QUARTA. Pro triennio iisdem manentibus Nominatoribus et signis, Numeratores erunt numeri triangulares, pro quadriennio Pyramidales, pro quinquennio triangulo-triangulares, et ita porro pro pluribus annis altiores numeri, quos figuratos vocant, ego ob usum combinatorios appellare soleo, in infinitum. Hoc cum ad eundem modum ostendi possit, quo praecedentem conclusionem demonstravimus, prolixe hic deducere supersedeo. Numeri ipsi tales sunt:

Numeri figurati seu Combinatorii	Valor praesens sortis debitae	post ann.
Unit. 1. 1. 1. 1. 1.	$\frac{1}{1}-\frac{1}{20}+\frac{1}{400}-\frac{1}{8000}+\frac{1}{160000}$ etc $=\frac{20}{21}$	1
Natural. 1. 2. 3. 4. 5	$\frac{1}{1}-\frac{2}{20}+\frac{3}{400}-\frac{4}{8000}+\frac{5}{160000}$ etc. $=\frac{400}{441}$	2
Triang. 1. 3. 6. 10. 15.	$\frac{1}{1}-\frac{3}{20}+\frac{6}{400}-\frac{10}{8000}+\frac{15}{160000}$ etc. $=\frac{8000}{9261}$	3
Pyram. 1. 4. 10. 20. 35.	$\frac{1}{1}-\frac{4}{20}+\frac{10}{400}-\frac{20}{8000}+\frac{35}{160000}$ etc. $=\frac{160000}{194481}$	4
Triang.- 1. 5. 15. 35. 70.	$\frac{1}{1}-\frac{5}{20}+\frac{15}{400}-\frac{35}{8000}+\frac{70}{160000}$ etc. $=\frac{3200000}{4084101}$	5
Triang. etc.	etc.	etc.

IX. Ad inveniendos adhuc aliter hos valores praesentes assumo LEMMA: Valor praesens valoris futuri est valor praesens ipsius summae. Exempli causa, sub finem anni 1685 seu post biennium debebis mihi aliquam summam; vellem nosse quis nunc sub finem anni 1683 ejus summae sit valor praesens. Itaque primum quaero, quis summae post biennium seu sub finem anni 1685 caeduae futurus sit valor post annum seu sub finem anni 1684; is utique erit $\frac{20}{21}$ de summa (per artic. 6), quia unus tantum annus intercedit. Itaque si post biennium mihi debeas unitatem, perinde est quantum ad hunc calculum ac si post an-

num mihi debeas $\frac{20}{21}$. Sed rursus, si post annum mihi debes $\frac{20}{21}$, perinde est (iterum per artic. 6) ac si mihi deberes nunc $\frac{20}{21}$ de illa summa $\frac{20}{21}$, hoc est $\frac{400}{441}$. Itaque si post biennium mihi debes aliquid, valor praesens erit $\frac{400}{441}$ de illo, seu quadratum numeri $\frac{20}{21}$ acceptum de illa summa tanquam unitate. Et eodem modo apparebit, valorem praesentem unitatis post triennium debitae esse $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ seu cubum numeri $\frac{20}{21}$, id est $\frac{8000}{9261}$. Et ita porro. Atque hoc Lemma nihil aliud est, quam subsumtio illius axiomatis notissimi, quod aequalia uni tertio sunt aequalia inter se; nam $\frac{400}{441}$ nunc aequantur ipsis $\frac{20}{21}$ caeduis post annum, et haec aequantur unitati caeduae post biennium. Ergo et haec unitas aequatur ipsis $\frac{400}{441}$ caeduis nunc. Inde jam patet

X. CONCLUSIO QUINTA. Si numerus quotae usurariae sit ν (id est 20, positis usuris quincuncibus seu vigesima sortis), erit valor praesens summae post aliquot annos caeduae, ad ipsam summam, in ratione ν ad $\nu+1$ (id est subsesquivigecupla seu 20 ad 21) replicata secundum numerum annorum. Hoc est, summae caeduae post annum unum valor praesens erit simpliciter $\frac{20}{21}$ de summa, seu erit ad summam in ratione 20 ad 21. At valor praesens summae caeduae post duos annos erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ seu $\frac{400}{441}$ summae, seu erit ad summam in ratione duplicata 20 ad 21 seu ut 400 (quadratum de 20) ad 441 (quadratum de 21). Et valor praesens summae caeduae post triennium erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ summae, seu $\frac{8000}{9261}$ summae, seu erit ad summam in ratione triplicata 20 ad 21, seu ut tertia dignitas sive cubus de 20 ad cubum de 21; et ita porro. Idque generaliter exprimendo, sit praesens valor Z, summa debita S, numerus annorum a, et quotae usurariae numerus ν; quibus positis, erit $Z=S$ multiplic. per $\boxed{a}\,\frac{\nu}{\nu+1}$. Sit ν, 20 et S unitas, erit unitatis caeduae post annos

duae post annos	unum,	duos,	tres,	quatuor,	quinque	etc.
valor praesens	$\frac{20}{21}$	$\frac{400}{441}$	$\frac{8000}{9261}$	$\frac{160000}{194481}$	$\frac{3200000}{4084101}$	etc.
id est	latus	quadratum	cubus	biquadratum	surdesolidum	etc.

qui numeri vel multiplicando, vel tantum eorum logarithmos addendo, continuari poterunt ad quotlibet annos, utileque erit fractiones decimaliter enuntiari. De usu horum in quibusdam juris quaestionibus apud egregios autores non satis recte definitis, aesti-

miandisque reditibus ad vitam (ubi interusurio composito locus est) alio schediasmate disseremus.

Caeterum ut meditationis hujus usus sit in promptu, operae pretium, ipso praesertim Nobilissimo Autore invitante, facturos nos rati sumus, constructa Tabella, in qua (posita sorte 100000, et usura vicenaria), quantum pro quoque annorum (ad quadraginta usque) numero, deducto legitimo interusurio relinquatur, sive quanti sors anticipato aestimanda veniat, exponeretur; unde porro, beneficio regulae proportionis, quamcunque sortem datam, ad quantamcunque anticipationem aestimare planum foret, cum alias calculus futurus esset longe impeditissimus, iis saltem, qui Logarithmorum destituuntur praesidio.

Tabula sortium anticipato accipiendarum, posito debito 100000.

Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
1	0. 95238	11	0. 58468
2	0. 90703	12	0. 55684
3	0. 86384	13	0. 53032
4	0. 82270	14	0. 50507
5	0. 78353	15	0. 48102
6	0. 74622	16	0. 45811
7	0. 71068	17	0. 43630
8	0. 67684	18	0. 41552
9	0. 64461	19	0. 39573
10	0. 61391	20	0. 37689
Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
21	0. 35894	31	0. 22036
22	0. 34185	32	0. 20987
23	0. 32557	33	0. 19987
24	0. 31007	34	0. 19035
25	0. 29530	35	0. 18129
26	0. 28124	36	0. 17265
27	0. 26785	37	0. 16444
28	0. 25509	38	0. 15661
29	0. 24294	39	0. 14915
30	0. 23138	40	0. 14205

XIII.

DE REDITIBUS AD VITAM.

Do tibi centum, ut quinque annua recipiam. Victurus sum adhuc triginta annos, quibus ego communi jure usuras perciperem ipse, sequentibus autem temporibus heredes mei. Volo autem ego frui anticipando etiam illis reditibus qui ad heredes meos essent perventuri, libensque patiar r e s e g m e n t u m, quod vulgo vocant rabat. Hoc in eo consistit, ut quantitas ejus, quod interest ab ea summa, quam justo maturius accipio, resecetur. Exempli gratia, si mihi debeas quinque post annos triginta eaque jam nunc desiderem, perinde est ac si mihi quinque nunc mutuo des in annos triginta, finitis illis reddenda. Unde singulis annis unam quartam partem nummi tibi debebo, si vicesimae usurae sint sive quinque in centum. Sed cum parum rationi consentaneum videatur, omnes reditus totius meae posteritatis in infinitum me anticipando percipere velle, cum raro nomina ob revolutiones rerum humanarum ultra aliquot saecula durent; hinc satis superque sufficiet, si trecentorum annorum reditus ego his triginta annis percipiam, quanquam mihi calculus ostenderit, parum interesse trecentorum tantum annorum, an vero totius aeternitatis futurae reditus anticipare quis velit, quod paradoxum quidem est, verissimum tamen. Cum autem velim aequalem quantitatem percipere in singulos annos, hinc trecenti isti anni in hos triginta reliquae meae vitae sic partiendi sunt, ut pro quolibet anno vitae sit aequalis anticipatio. Itaque necesse est nos partiri trecentos annos in triginta partes. Erit una quaeque decem annorum, sive habebimus triginta denarios annorum, et quolibet anno vitae meae decem annorum reditus percipiam, ita tamen, ut hi decem anni, quos primo anno percipio, aeque distent a primo anno ac sequentes decem anni a sequenti anno. Quare sequitur istos decem annos non esse sumendos continuos, sed triginta annorum intervallo discretos; nempe primo anno percipiam usuras primi primorum triginta annorum seu anni primi et primi secundorum triginta annorum seu anni trigesimi primi et primi tertiorum seu anni sexagesimi primi, et ita porro usque ad primum decimorum seu ultimorum triginta annorum sive usque ad 271mum. Similiter secundo anno omnium (qui numero

decem sunt) secundorum annorum usuras percipiam, et tertio omnium tertiorum cujusque tricenarii, ac denique ultimo sive trigesimo anno meae vitae percipiam usuras omnium postremorum seu trigesimorum annorum cujusque ex decem tricenariis.

Sufficit ergo ut constituamus, quid mihi primo anno debeatur; et sane si nullum esset resegmentum, primo anno plenae decem annorum usurae, id est a centum nummis in singulos quinque, adeoque primo statim anno quinquaginta nummi deberentur. Sed cum id manifeste iniquum sit, sequitur resegmentum esse adhibendum, et quidem tanto majus, quanto major est anticipatio; itaque ex decem annis, quorum usuras statim simul percipio, primus quidem est ipse annus primus primorum triginta annorum, itaque ratione ipsius nulla est anticipatio, sed usurae primi anni sequentium triginta annorum seu anni trigesimi primi triginta annis anticipantur, et usurae primi anni ex tertio tricenario anticipantur annis sexaginta, et ita porro. Itaque decem annorum qui simul percipiuntur, haec anticipatio est:

anni	1mi	2di	3tii	4ti	5ti	6ti	7mi	8vi	9ni	10mi
anticipatio est annorum	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

primos quinque aureos sub finem primi anni integros accipio quippe jam debitos, de secundis anno 31mo demum debitis in annos triginta usuras vicesimas solvere debeo, de tertiis anno 61mo demum debitis in annos sexaginta, et ita porro, de ultimis anno 271mo debitis in annos 270. Sed cum neque ego tamdiu victurus sim, neque cum posteritate mea ullum de ea re negotium esse velimus, ideo has usuras vicesimas nummorum justo maturius solutorum ego vivus solvam aut quod eodem redit compensando detrahi mihi patiar. Verum si successu temporis eas solvere volo, ut solent usurae annuatim persolvi, utique mihi plus sequentibus quam primis annis vitae meae sive solvendum, sive quod eodem redit, eo nomine detrahendum erit. Nam tertio anno finito usuras persolvere debebo a nummis tum primo anno tum etiam secundo justo maturius acceptis, idemque multo magis in annis sequentibus continget; quod quidem incrementum quale esset futurum, et quomodo ego vivus solvere usuras anticipationis etiam annorum diu postventurorum deberem, peculiari calculo non indignum esset. Verum id nunc a nobis rejicitur; nam hoc modo minus esset resegmentum anni primi quam secundi, et secundi quam tertii, quod est contra propositum, volumus enim usuras ad vitam in singulos

annos esse aequales. Itaque necesse est, ut ego primo statim anno solvam sive detrahi mihi patiar omnes usuras ob anticipationem hoc anno peractam debitas, alioqui sequentibus annis solvendas. Sed hoc modo, ut ego tibi usuras anticipationis solvo, ita tu mihi etiam usuras anticipationis debebis ob ipsas usuras prioris anticipationis anticipatas. Quin imo quaelibet anticipatio novam pariet anticipationem, dabiturque resegmentum resegmenti semper replicatum; quae omnia uno calculo complectenda sunt, si primi anni usuram justam post omnia resegmenta constituere velimus.

Primum itaque anno primo post contractum percipio quinque nummos ob primum hunc annum (qui etiam primus est primi trecenarii) elapsum, idque sine resegmento; deinde simul percipere volo usuras anni primi de secundo tricenario seu trigesimi primi, qui tunc quidem futuri essent nummi quinque, nunc autem detrahendum est resegmentum, ob usuram, quae ab his quinque nummis in triginta annos a me debetur et nunc per anticipationem solvenda est. Jam secundo anno elapso ob hos quinque nummos anticipatos deberem tibi $\frac{5}{20}$, quos si jam nunc solvam elapso statim primo anno, et ita tu hanc summam $\frac{5}{20}$ uno anno anticipes, hinc anno secundo elapso mihi debebis partem eorum vigesimam seu $\frac{5}{20^2}$ nomine usurae. Quod cum ego iterum statim anticipem, debebo rursus tibi inde $\frac{5}{20^3}$, et ita porro in infinitum. Itaque summa omnium resegmentorum ratione usurae primi anni de quinque nummis anticipatis debitae sic ineunda erit, ut mihi ob quinque nummos triginta annis justo maturius acceptos, ratione usurae primi anni de his quinque nummis debitae, detrahenda sint: $\frac{5}{20} - \frac{5}{20^2} + \frac{5}{20^3} - \frac{5}{20^4}$ etc. in infinitum, id est $\frac{5{,}20}{20+20^2}$ aequ. $\frac{5}{1+20}$. Porro tertio anno elapso, ob quinque nummos anticipatos deberem etiam $\frac{1}{4}$ seu $\frac{5}{20}$. Quos si sub finem secundi solvere debeam, ob unius anni anticipationem debebo tantum (prorsus ut in praecedenti) $\frac{5}{20} \frown \frac{20}{1+20}$ seu $\frac{5}{1+20}$. Sed cum hos $\frac{5}{20} \frown \frac{20}{1+20}$

rursus uno anno anticipem, quia sub finem primi anni solvere debuo, hinc solvam tantum $\frac{20}{1+20}\Big\} \boxed{2}, \frac{5}{20}$. Et pro quarto anno $\frac{20}{1+20}\Big\} \boxed{3}, \frac{5}{20}$, et ita porro. Et pro trigesimo et uno denique anno qui est primus secundi tricenarii debebo solvere $\frac{5}{20}, \boxed{30} \Big\{ \frac{20}{1+20}$. Summa autem omnium horum numerorum, nempe $\frac{20}{1+20} +$ $\boxed{2} \frac{20}{1+20} + \boxed{3} \frac{20}{1+20}$ etc. usque ad $\boxed{30} \frac{20}{1+20}$ multiplicata per $\frac{5}{20}$, sic inibitur. In serie progressionis geometricae est summa maxima a ad terminum maximum l, ut terminus maximum l ad differentiam maximam r, seu a aequ. $\frac{ll}{r}$. Est autem hic l aequ. $\frac{20}{1+20}$ et r aequ. $\frac{20}{1+20} - \boxed{2} \frac{20}{1+20}$ aequ. $\frac{20}{\boxed{2}\, 1+20}$. Ergo a aequ. $\boxed{2} \frac{20}{1+20} \smile \frac{20}{\boxed{2}\, 1+20}$ sive a aequ. 20. Et quoniam a ad b ut l ad m, erit b aequ. $\frac{20\,.\,20}{1+20}$. Et autem f ad p ut b ad l, ergo f aequ. p $\frac{b}{l}$, et p ultimus terminus aequ. $\boxed{30} \frac{20}{1+20}$. Ergo f aequ. $\boxed{30} \frac{20}{1+20} \frown \frac{20\,.\,20}{\boxed{2}\, 1+20} \smile \frac{20}{1+20}$. Ergo f aequ. 20, $\boxed{30} \frac{20}{1+20}$. Jam summa omnium terminorum l, m, n etc. usque ad p aequ. a—f. Ergo summa omnium Numerorum $\frac{1}{1+20} + \boxed{2} \frac{1}{1+20}$ etc. usque ad $\boxed{30} \frac{1}{1+20}$ erit aequ. 20—20., $\boxed{30} \frac{20}{1+20}$, qui numerus multiplicatus per $\frac{5}{20}$ dabit summam resegmentorum omnium ob quinque nummos tringinta annis anticipatis adhibendorum, sive resegmentum integrum a quinque nummis primo secundi tricenarii anno elapso demum debitis, et jam elapso primo primi tricenarii persolvendis detrahendum, seu 5—5, $\boxed{30} \frac{20}{1+20}$. Hoc autem si detrahas a 5, restat 5, $\boxed{30} \frac{20}{1+20}$, usura primorum annorum cu-

jusque tricenarii primo primi tricenarii accipienda. Idem brevius concludere potuissemus. Nam si quinque post triginta annos solvenda sint, quaeraturque quantum nunc solvendum, ajo nunc solvendum esse y, quantitatem quae usuris in sortem computatis post 30 annos exhibeat 5, id est fiet y, $\boxed{30}\,\frac{1+20}{20}$ aequ. 5, sive y aequ. 5, $\boxed{30}\,\frac{20}{1+20}$. Eodem modo pro quinque nummis in sexaginta annos anticipatis nunc solvendum 5, $\boxed{60}\,\frac{20}{1+20}$. Et ita porro usque ad 5, $\boxed{270}\,\frac{20}{1+20}$, quorum decem terminorum ineunda est summa. Sit series progressionis geometricae $1+x+xx$ etc. $+x^9$, ejus summa est $\frac{1}{1-x}-\frac{x^{10}}{1-x}$ seu $\frac{1-x^{10}}{1-x}$. Ergo summa erit

$$5,\ \boxed{30}\,\frac{20}{1+20}\ \text{in}\ \frac{1-\boxed{300}\,\frac{20}{1+20}}{1-\boxed{30}\,\frac{20}{1+20}}.$$

Est autem $\boxed{30}\,\frac{20}{1+20}$ circiter 0.231 seu paulo minus quarta parte unitatis; at $\boxed{300}\,\frac{20}{1+20}$ est circiter $\frac{2037}{4632000000}$ adeoque pro nihilo computari potest, perinde ac si quis reditus suae posteritatis in infinitum anticipare vellet; adeoque fiet summa quaesita $5 \cdot 0.231 \cdot \frac{1}{1-0.231}$ sive circiter 1.501 seu etiam $\frac{5}{3}$. Qui numerus $\frac{5}{3}$ si addatur numero 5 aureorum, qui a primo anno sine resegmento accipiuntur, habebimus $5+\frac{5}{3}$ seu $6+\frac{2}{3}$ nummos pro reditu ad vitam ex centum nummis, si fingamus creditorem adhuc 30 annis a contractu victurum et posteritatis suae reditus anticipare velle, usuram autem communem vicesimam esse; quodsi minus diu victurus ponatur, patet ei plus deberi.

XIV.

DE RESOLUTIONIBUS AEQUATIONUM CUBICARUM TRIRADICALIUM, DE RADICIBUS REALIBUS, QUAE INTERVENTU IMAGINARIARUM EXPRIMUNTUR, DEQUE SEXTA QUADAM OPERATIONE ARITHMETICA.

Tametsi pro insigni admodum invento haberi non possit, ostendere hominibus, quae longe quaerunt, jam tum in eorum potestate esse, utile est tamen, tum ut sciant uti suis possessionibus, tum ut frustraneo labore absistant. Idque in Aequationum Cubicarum Triradicalium resolutione faciam, ubi primum earum naturam paucis explicuero.

Sciendum est scilicet aequationem omnem aut possibiles habere radices omnes, aut impossibiles omnes, aut quasdam possibiles, alias impossibiles. Impossibiles autem radices cum Analytice exprimuntur, imaginarias appellamus. Omnis aequatio simplex sive primi gradus (loquor autem non nisi de aequationibus rationalibus, in quibus scilicet enuntiandis nulla irrationalis adhibetur) ut $x - d \sqcap 0$ vel $x + d \sqcap 0$ est realis. Aequatio quadratica duas habet radices, easque aut reales ambas, aut imaginarias ambas. Ut si sit aequatio $x^2 - bx + c^2 \sqcap 0$, erunt radices duae $x \sqcap + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ et $x \sqcap \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, ubi quantitas $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ erit realis, si $\frac{b}{2}$ major quam c, at imaginaria, si minor, eoque casu aequatio proposita erit impossibilis. Unde patet vera origo aequationum impossibilium, et radicum imaginariarum, quod scilicet ex quantitate negativa radix quadratica extrahi non potest, neque analytice neque geometrice, ut si sit $b \sqcap 2$ et $c \sqcap 2$, erit $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} \sqcap \sqrt{-3}$. Quod si jam aequatio simplex ducatur in quadraticam, oritur aequatio cubica, quae habet vel tres radices reales si quadratica est possibilis, vel duas imaginarias unamque tantum realem, si quadratica sit impossibilis. Aequatio quadrato-quadratica possibilis aut duas habet radices reales, aut quatuor, quia ex duabus quadraticis facta intelligi potest. Potest autem semper reduci ad cubicam, quod primus jam superiore seculo invenit Ludovicus Ferrariensis, Car-

dani et Tartaleae aequalis, et observavi, cum quatuor habet radices reales, tunc reduci ad cubicam triradicalem; cum duas, tunc ad cubicam unius radicis revocari.

Sit jam aequatio cubica: $y^3 * \mp qy - r = 0$ (omnes enim ad hanc formam revocari possunt), ex regula Scipionis Ferrei a Tartalea et Cardano publicata, radix ejus una eaque semper realis erit: $y = \sqrt[3]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}}$, ex qua data reliquas duas radices quadratica aequatione investigare facile est, quae possibilis est, si reliquae duae radices sunt reales; impossibilis vero, si sint imaginariae. Dixi autem hanc unam minimum semper realem esse. Ubi vero sese objicit difficultas ingens. Nimirum evenit aliquando ut quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}$ sit impossibilis, tunc scilicet cum signum ambiguum $\mp$ valet $-$ et $\frac{q^3}{27}$ est major quam $\frac{r^2}{4}$, tunc enim quantitas $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$ est negativa adeoque quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ imaginaria. Quomodo ergo fieri potest, ut quantitas realis, qualis est radix aequationis propositae, exprimatur interventu imaginariae? Hoc ipsum enim mirum est, talem quantitatum imaginariarum interventum in illis aequationibus cubicis tantum (ut calculus ostendit) observari, quae nullam habent radicem imaginariam, sed omnes reales sive possibiles, idque per trisectionem anguli ab Alberto Girardo aliisque ostensum est. Videatur imprimis Schotenius in appendice Com. ad Geom. Cartes. Haec difficultas omnibus hactenus Algebrae scriptoribus crucem fixit, nec quisquam eorum est, qui non professus sit regulas Cardani in hoc casu exceptionem pati. Primus omnium Raphael Bombelli, cujus Algebram perelegantem Italico sermone jam superiore seculo Bononiae editam vidi, invenit, eas servire posse ad eruendas radices veras rationales sive numeris exprimibiles, quando tales habet aequatio; sed quando radices illae rationales sunt falsae sive negativae, tunc nesciebat ille etiam ex irrationalibus erui posse, adeoque aliam methodum praescripsit e Cardano sumptam, quae tamen reapse ad aequationis divisionem per y + vel — aliquo ultimi termini divisore (ut stylo Cartesii utar) reducitur, etsi alia longe phrasi utatur Cardanus. A me vero deprehensum est, eadem me-

thodo, nonnihil tamen pro re nata immutata, etiam ex irrationalibus Cardanicis erui rationales falsas seu negativas. Quanquam autem haec observavit Bombellus, nondum tamen illud asseruit, nedum demonstravit, ipsas radices Cardanicas irrationales interventu imaginariarum expressas esse quantitates reales ac aequationi resolvendae sufficientes. Quod vero a me liquido evincetur, ut appareat, alias imposterum radices aequationum Cubicarum triradicalium frustra quaeri, et habere nos quicquid in eo genere optari cum ratione potest.

Hoc cum a me aliquot abhinc mensibus inventum esset, nolui tamen explicare, donec alia quaedam memoratu digna in Algebraico negotio deprehenderem, ne inventum parum speciosum sine socio derideretur. Nunc vero cum originem talium regularum intime inspexerim et viam ad altiores aequationes repererim, deprehensa sectione potestatum generali, memorabilium admodum theorematum tabulam non mediocriter utilem complexa, et formulas quarundam aequationum dederim per omnes gradus in infinitum euntes, quaeque per irrationales sui gradus resolvuntur; hoc, inquam, cum praestiterim quicquid illud est circa Aequationum Triradicalium resolutiones, sive inventum a me sive si mavis observatum, protrudere post tot alia non contemnenda specimina non amplius erubesco.

Utile autem erit commemorare, qua via ad rem penitus eruendam excitatus sit animus. Incideram aliquando in duas aequationes ejusmodi: $x^2+y^2 \sqcap b$ et $xy \sqcap c^2$, unde sequebatur $x^2 \sqcap \frac{c^4}{y^2}$, adeoque $\frac{c^4}{y^2}+y^2 \sqcap b$ et $y^4-by^2+c^4 \sqcap 0$, sive $y^2 \sqcap +\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^4}$ et $y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^4}}$. Ergo pro $x^2+y^2 \sqcap b$, substituto valore ipsius y^2, scribebam $x^2-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^4} \sqcap 0$ sive $x \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^4}}$. Erat autem c major quam b, adeoque $\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^4}$ erat quantitas imaginaria. At vero constabat mihi aliunde, saltem summam incognitarum $x+y$ esse quantitatem realem et

aequari cuidam lineae d, quod me valde perplexum reddidit, cum enim ex calculo praecedenti deduxissem $d \sqcap x+y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$, non capiebam, quomodo ejusmodi quantitas posset esse realis, in quam exprimendam imaginariae sive impossibiles ingrederentur. Relegere ergo calculi vestigia coepi, errorem suspicatus, sed frustra: eadem enim perpetuo prodiere. Tandem venit in mentem, operationem instituere, quam hic subjiciam: $d \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ sive $d \sqcap A+B$, ergo quandrando utrobique

$$\begin{array}{cccc} & +A^2 & +B^2 & +2AB \\ d^2 \sqcap & \frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2} & +\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2} & +2c, \end{array}$$

nam rectangulum AB sive $\sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ in $\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$ facit c, ut calculus ostendet; erit ergo $d^2 \sqcap b+2c$ adeoque $d \sqcap \sqrt{b+2c}$. Aequando ergo inter se duos valores ipsius d, fiet $\sqrt{b+2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}+\sqrt{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-c^2}}$; unde si in numeris faciamus $b \sqcap 2$ et c etiam $\sqcap 2$, fiet $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$. Qua observatione nullam facile in tota analytica singularem magis et paradoxam a me memini notatam, nam me primum arbitror radices irrationales, in speciem imaginarias, ad reales etiam sine extractione reduxisse. Et notabile est, **sextum** nos habituros **Operationis sive Arithmeticae sive Analyticae genus**; nam praeter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, radicum extractionum habebitur Reformatio seu Reductio expressionum imaginariarum ad reales. Nimirum additio et subtractio composita reducunt ad simplicia seu partes ad totum, vel contra; multiplicatio causas ad effectum; divisio et extractio contra: divisio fractos ad integros, extractio surdos ad rationales, denique Reformatio imaginarios ad reales.

Ad exemplum enim hujus theorematis, sive aequationis inter realem et in speciem imaginariam, alia exempla concinnari possunt infinita, etiam pro altioribus radicum irrationalium gradibus, modo

earum exponentes sint progressionis geometricae duplae, ut $\sqrt{(4)}$, $\sqrt{(8)}$, $\sqrt{(16)}$ etc., imo et nonnunquam pro aliis ut $\sqrt{(6)}$, ut multis exemplis ostendere possum. Sed generaliter ejusmodi composita radicum ex binomiis et residuis non nisi tunc cum radicum exponentes sunt progressionis geometricae duplae, reduci possunt analytice. In caeteris vero, ut $y \sqcap \sqrt[(3)]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[(3)]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$, reductio ejusmodi non admittitur per naturam rerum, quoniam scilicet radices irrationales cubicae non statim tolluntur cubando, ut quadraticae quadrando. Sit enim $y^3 \sqcap A^3+B^3+3ABy$; est autem $3AB \sqcap q$, ut calculus ostendet, et $A^3+B^3 \sqcap r$. Unde fit aequatio non pura (ut in quadratica supra habueramus $d^2 \sqcap b+2c$), sed affecta $y^3 \sqcap +3qy+r$, quod impedit, quominus istae quantitates alia adhuc ratione et sine imaginariis exprimi possint, ut in quadraticis successerat. Sed tametsi Reductio quantitatum in speciem imaginariarum ad reales non semper enuntiatione quadam expressa palpabilis reddi possit, non eo tamen minus hae in speciem imaginariae reapse sunt reales habendae. Itaque de hac operatione sexta Reformationum dicendum est, quod de operatione quinta extractionum, esse scilicet quantitates reales, quae tamen non nisi imaginariarum interventu exprimantur; quemadmodum sunt radices, quas surdas vocamus, quae non nisi per suas potestates enuntiantur. Quanquam autem exemplum radicum quadraticarum in speciem imaginariarum validam satis suspicionem moveat altiores quoque reales esse, quoniam tamen minime convenit, in hujusmodi quaestionibus, ubi accurata veritatis indagatio in humanae mentis potestate est, nos conjecturis duci, ideo demonstrandum putavi, expressiones illas semper esse rectas et admittendas, etiam tum cum interveniunt imaginariae, ut in cubicis triradicalibus usu venit. Quod antequam faciam, ostendam paucis, contrarium sensisse doctissimos viros et habuisse graves sane dubitandi rationes. De Cardano et Tartalea qui regulas illas publicavere primi, non est cur moneam. Bombellus, quem dixi observasse primum, quod ex his radicibus erui possint saltem radices rationales verae seu affirmativae, si quae sunt, credidit tamen in caeteris casibus, cum scilicet radices rationales sunt negativae aut etiam cum non sunt rationales, exceptionem pati regulas. Exempli causa proposita aequatione $y^3-12y-9 \sqcap 0$, quae triradicalis est, haec, inquit, aequatio resolvi non potest per regulas propositas; ideoque utitur

alia methodo, eamque dividit per $y+3$, unde fit aequatio quadratica, quam resolvit. Sed non noverat ille, ipsam quantitatem negativam -3 esse radicem licet falsam, aut certe non putabat irrationales eam continere. Idem putat, aequationes ejusmodi in quibus scilicet terminus penultimus est negativus et quadratum semissis termini ultimi est minus cubo trientis penultimi, tunc cum ultimus terminus est affirmativus, non posse resolvi. Unde proposita aequatione $y^3 - 6y + 8 \sqcap 0$ ait, questa agguagliatione risolutamente non si può agguagliare, e la proposta tratta dell' impossibile, in quo sine dubio deceptus est; scimus enim hodie, omnem aequationem cubicam esse possibilem et habere vel unam radicem realem vel tres. In quo eum errasse tanto magis miror, quod jam tum scivit, Trisectionem Anguli ad aequationem cubicam, quae per regulas Cardani tractari non posse credebatur, reduci. Sed error inde ortus, quod nondum satis eo tempore notum erat, aequationes provenire ex radicibus in se ductis, quod a Cartesio, si non inventum, saltem in clara luce positum est. Unde non miror, alicubi Bombellum asserere, non videri sibi unam quaestionem plures una veras responsiones sive radices habere posse. Albertus Girardus, qui primus quod sciam usum Trisectionis Anguli in hoc negotio accurate explicuit, Cardani regulas satis aperte exclusit. Quem secutus est Cartesius. Nam Vieta radices irrationales rarius attigit, et cum methodum tradidit sane pulcherrimam extrahendi radices aequationum in numeris rationalibus, non est usus extractione ex radicibus irrationalibus.

Quod superest ergo summi viri Renati Cartesii ac doctissimorum ejus discipulorum Huddenii et Schotenii mentem explicare suffecerit. Cartesius libro tertio Geometriae radices Cardani diserte non nisi illis aequationibus applicandas censet, in quibus imaginariae quantitates evitantur, et tunc cum imaginariae interveniunt, novum notae algebraicae genus introducere conatur, ut scilicet quantitas incognita non per extractionem radicis sive sectionem rationis, sed per sectionem anguli explicetur, in quo mihi non satisfacit. Nam aliae sunt notae Analyticae, aliae Geometricae; illae serviunt ad quantitatem incognitam enuntiandam relatione ad quasdam operationes arithmeticas, quales sunt additiones, subtractiones, multiplicationes, divisiones, radicum extractiones et (quae a me adduntur) imaginariarum reformationes, hae vero enuntiant quantitatem incognitam relatione ad quasdam operationes geome-

tricas ductusque linearum. Et aequationem resolvisse illud est, quam construxisse: resolutio rei naturam detegit, incognitas simplicissime enunciat, earumque omnes recessus patefacit; constructio quaesitam quantitatem exhibet instrumento; tametsi ultro largiar Geometriam ad ostendendam realitatem quantitatum in speciem imaginariarum, imo et surdarum adhiberi debere, ne scilicet pro figmentis inanibus humanae mentis habeantur. Quare Cartesii ratiocinationi non assentior, cum nobis est persuasum (ut scilicet jacturam soletur, quam ex defectu regularum Cardani nos pati credidit), aeque clare, imo clarius ac distinctius nos concipere incognitam per relationem ad subtensas arcuum, quarum triplum est datum, quam per relationem ad latera cuborum quorum contentum est datum. Faterer si de Geometrica constructione ageretur, sed analytici est incognitas exprimere per notas, quae ad calculum sint aptae; manifestum est autem, notam Cartesianam, qua incognitas cubicae per relationes ad arcus exprimerentur, ad calculum servire non posse aut certe inter calculandum semper mansuram invariatam, cum contra radices cubicae irrationales nonnunquam extrahi, semper tolli possint et in se invicem aut in alias duci, aliasque atque alias formas induere, quibus earum natura et problematis constitutio detegatur. Neque enim Cartesius ex nota sua ad anguli trisectionem nos referente duceret unquam radices rationales aequationis, neque illud demonstraret sane memorabile, omnem aequationem cubicam deprimibilem habere radicem rationalem, uti ex irrationalibus Cardanicis, etiam tum cum imaginariae interveniunt, egregie patet, quod infra denuo attingere operae pretium erit.

Denique concludit Cartesius, naturam radicum cubicarum non pati, ut terminis exprimantur simplicioribus, nec ut per constructionem aliquam, quae una et generalior et simplicior sit, determinentur. Quae Schotenius iisdem verbis repetit in praefatione Commentariorum in librum tertium et rursus pag. 297 Com. ad lib. I., usque adeo ea illi placuere. De constructione non repugno; at quod ad expressionem attinet, ajo, Cardanicam et simplicissimam et generalissimam esse, omnesque omnino casus complecti, secus quam Cartesio videbatur. Schotenii mens ex his aliisque multis locis satis patet; at de ingeniosissimo Huddenio miror, quo neminem unquam profundius in analyseos purae et a geometria abstractae mysteria penetrasse scio. Is Epistola ad Schotenium prima pag. 504 regulae, inquit, quarum ope quarun-

dam cubicarum aequationum radices investigantur, quas Cardanus autori Scipioni Ferreo asscribit etc. Et regula 21 exemplo quarto cum agnovisset ex irrationalibus Cardanicis erui posse radices rationales, subjicit: excepto tantum uno casu, quando termino penultimo existente negativo cubus trientis ab ipso major est quadrato semissis ab ultimo.

Utile vero erit etiam rationem adjicere, quae doctissimis viris persuasit, regulas Cardani esse limitatas. Primum Cardanicae radices in casu toties dicto speciem habent impossibilium sive imaginariarum, sed regeri poterat, non ideo imaginarias sive impossibiles habendas, imo necessario esse reales, quoniam ex aequatione data (quae utique possibilis est) consequantur; ex . vero autem non sequi nisi verum. Ad hanc objectionem parata illis replicatio fuit, radices Cardanicas ex aequatione cubica data non sequi necessario, sed niti quadam suppositione; ea autem suppositione tunc cum ad impossibile ducit, esse abstinendum. Hujus responsionis vis ac momentum eleganter apparet ex calculo, quem instituit doctissimus Huddenius. Esto aequatio data $x^3 \mp qx - r \sqcap 0$. Ponatur incognita $x \sqcap y + z$; haec suppositio utique semper permissa est; ergo erit $x^3 \sqcap y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$, adeoque ex aequatione data $x^3 \sqcap \pm qx + r$ aequando duas ipsius x^3 valores, fiet $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \sqcap \pm qx + r$. Cum vero plures habeamus quantitates indeterminatas quam aequationes, nam indeterminatae sunt tres x, y, z, aequationes tantum duae $x \sqcap y + z$ (sive $x^3 \sqcap y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$) et $x^3 \sqcap \pm qx + r$, ideo (regulariter) licebit novam pro arbitrio fingere aequationem. Fingamus ergo $y^3 + z^3 \sqcap r$, et restabit in aequatione superiore $3y^2z + 3yz^2 \sqcap \pm qx$, cujus uno latere diviso per x, altero per $y + z$, ipsi x aequivalentem, fiet $3yz \sqcap \pm q$. Unde ut verba in compendium contraham (cetera enim clara sunt) fiet denique $x \sqcap \sqrt{(3)\,\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\,\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}}$.

Quodsi ergo $\mp$ valeat — (id est si $\pm$ sit +) et sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$, venimus ad aliquod impossibile, adeoque suppositio a nobis pro arbitrio facta, qua fecimus $y^3 + z^3 \sqcap r$, eo casu admittenda non est, quare et valor hic ipsius x ex aequatione data necessario non ducitur. Haec ratiocinatio recta est et solida, quatenus concludit ex aequatione directe deduci nec necessario calculo formulam

Cardanicam sic quidem deduci, ac certe nisi aliunde deprehendissem radices Cardanicas generatim esse admittendas, ex hoc certe calculo solo asserere non auderem, ob intervenientem ut dixi suppositionem.

Opus est ergo, ut sine ulla ejusmodi suppositione demonstrem, radicibus Cardanicis omnem generaliter aequationem cubicam recte resolvi. Incipiam a clarioribus exemplis earum, quae radicem habent rationalem, ut facilius intelligatur postea demonstratio generalis de irrationalibus. Sit quantitas aliqua $2b$, poterit eadem et sic enuntiari: $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$. Qanquam enim $\sqrt{-ac}$ sit quantitas imaginaria, summa tamen ideo non minus est realis, quoniam imaginariae destruuntur. Dividatur haec formula in duas partes, binomium $b+\sqrt{-ac}$, et residuum $b-\sqrt{-ac}$, et utriusque separatim investigetur cubus, erit ipsius $b+\sqrt{-ac}$ cubus hic $\begin{matrix}+b^3-ac\sqrt{-ac}\\ -3bac+3b^2\ldots\end{matrix}$ et ipsius $b-\sqrt{-ac}$ cubus erit $\begin{matrix}b^3+ac\sqrt{-ac}\\ -3bac-3b^2\ldots\end{matrix}$

adeoque erit

$$\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3-ac\sqrt{-ac}\\ -3bac+3b^2\ldots\end{matrix}}+\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3+ac\sqrt{-ac}\\ -3bac-3b^2\ldots\end{matrix}}$$

$$\text{vel }\left.\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3+\sqrt{-a^3c^3}\\ -3bac+6a^2c^2b^2\\ -9b^4ac\end{matrix}}+\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3-\sqrt{-a^3c^3}\\ -3bac+6a^2c^2b^2\\ -9b^4ac\end{matrix}}\right\}\sqcap 2b$$

sive $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$. Quodsi ergo ex tali binomio ejusmodi semper extrahi posset radix cubica, quemadmodum ex hoc quidem potest, utique junctis inter se binomio et residuo semper tolli posset imaginaria. Sed quoniam data ejusmodi expressione:

$\sqrt{(3)\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt{(3)\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$, qualem exhibent cubicae aequationes, non semper extrahi potest, id est, quia non semper quantitas data $\frac{r}{2}$ in duas b^3-3bac nec quantitas data $\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}$ in tres $-a^3c^3+6a^2c^2b^2-9b^4ac$ dispesci a nobis sine alia aequatione, aeque ac data difficili, potest; ideo fit ut ex quantitatibus realibus non semper possimus imaginarias eliminare.

Exempla autem in numeris rationalibus proponere utile erit. Sit aequatio, qua et Albertus Girardus utitur: $x^3-13x-12\sqcap 0$, cujus radix vera est 4. Ex formulis autem Scipionis Ferrei sive

Cardani erit $x \sqcap \sqrt{(3)\, 6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}} + \sqrt{(3) + 6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}}$.
Quam expressionem rectam esse et realem, et admittendam sic demonstrabo. Ponatur $x \sqcap 2 + \sqrt{-\tfrac{1}{3}} + 2 - \sqrt{-\tfrac{1}{3}}$, erit utique $x \sqcap 4$, uti aequatio postulat. Videamus nunc an inde derivari possit formula Cardanica. Nimirum cubando et superiorem formulam $b + \sqrt{-ac} + b - \sqrt{-ac}$ huc applicando, faciendoque $b \sqcap 2$ et $ac \sqcap \tfrac{1}{3}$ habebimus pro cubo ipsius $2 + \sqrt{-\tfrac{1}{3}}$ formulam hanc:

$$\begin{array}{l} +8 \\ -3,2,\tfrac{1}{3} \sqcap -2 \end{array} + \sqrt{\begin{cases} -\tfrac{1}{27} \\ +6,\tfrac{1}{3},4 \sqcap \tfrac{72}{27} \\ -9,16,\tfrac{1}{3} \sqcap -\tfrac{1296}{27} \end{cases}}$$

sive summando $6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}$. Eodem modo cubus a $2 - \sqrt{-\tfrac{1}{3}}$ erit $6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}$, ac proinde $\sqrt{(3)\, 6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2 + \sqrt{-\tfrac{1}{3}}$ et $\sqrt{(3) - \sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2 - \sqrt{-\tfrac{1}{3}}$, ac jungendo binomium residuo erit x sive $\sqrt{(3) 6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}} + \sqrt{(3) 6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ idem quod $2 + \sqrt{-\tfrac{1}{3}} + 2 - \sqrt{-\tfrac{1}{3}}$, id est erit, 4, ut ostendere propositum erat.

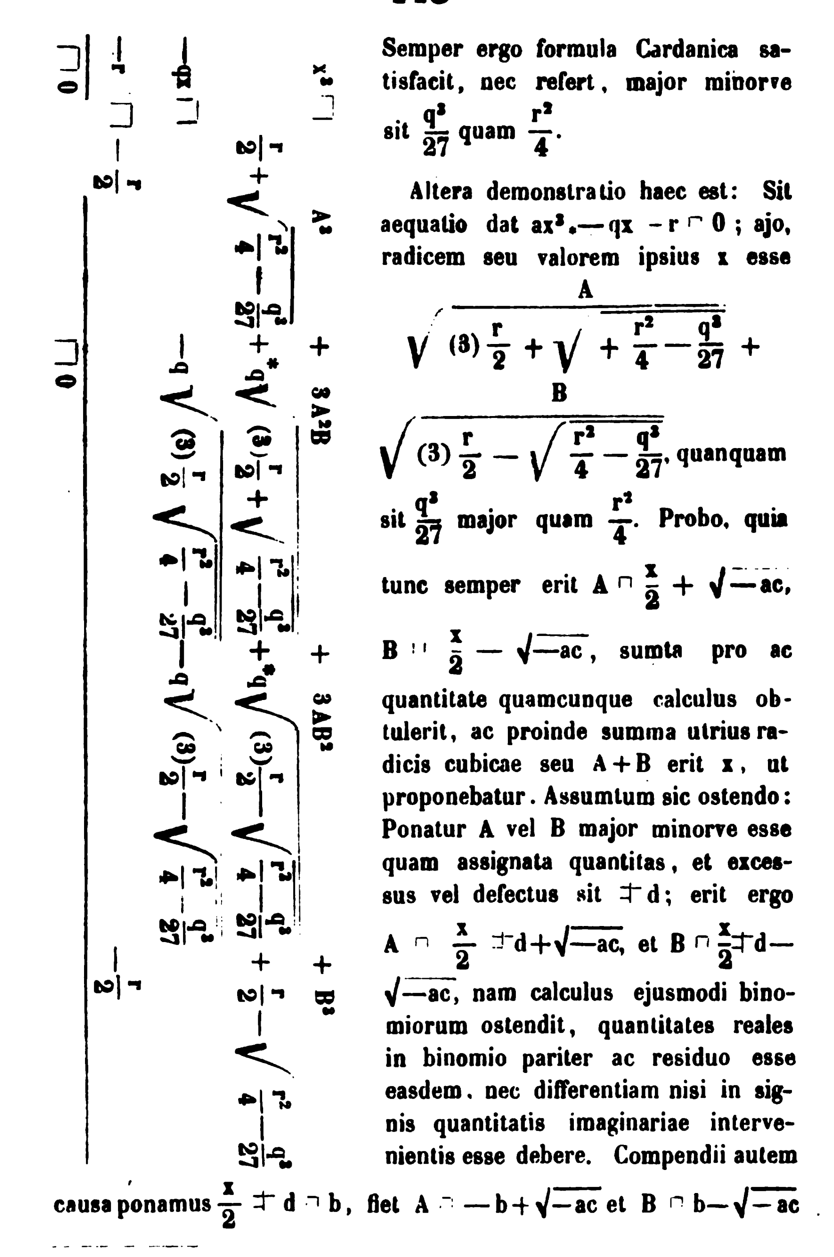
Unum adhuc exemplum adducere operae pretium erit, cum radix rationalis in irrationalibus Cardanicis latens est falsa sive negativa, quoniam variatur nonnihil calculus, et video Raphaelem Bombellum, egregium certe artis analyticae magistrum, hic haesisse: nam ut supra dixi, radices rationales veras extrahere potuit, falsas non potuit.

Exemplum esto $x^3 - 48x - 72 \sqcap 0$, cujus radix falsa est $x \sqcap -6$. Erit ex regula $x \sqcap \sqrt{(3) 36 + \sqrt{-2800}} + \sqrt{(3) 36 - \sqrt{-2800}}$; ostendendum est ergo harum duarum irrationalium summam nihil aliud facere, quam -6. Quem in finem ponemus $x \sqcap \underbrace{-3 + \sqrt{-7}}_{\odot} \quad \underbrace{-3 - \sqrt{-7}}_{☽}$ sive $x \sqcap \odot + ☽$ vel $x \sqcap \sqrt{(3) \odot^3} + \sqrt{(3) ☽^3}$. Resumta ergo formula superiore, qua erit $\odot \sqcap b + \sqrt{-ac}$ et $☽ \sqcap b - \sqrt{-ac}$, ac nunc pro b substituendo -3 et pro ac sumendo 7, erit

$$\begin{array}{l} \odot^3 \sqcap -27 \\ \quad +3,3,7 \sqcap 63 \end{array} + \sqrt{\begin{cases} -343 \\ +6,49,9 \sqcap 2646 \\ -9,81,7 \sqcap -5103 \end{cases}}$$

sive summa inita $\odot^3 \sqcap 36+\sqrt{-2800}$; eodem modo ostendetur esse $☽^3 \sqcap 36-\sqrt{-2800}$. Cnm ergo sit $x \sqcap -6 \sqcap \sqrt{(3)}\odot^3+\sqrt{(3)}☽^3$, prit $x \sqcap \sqrt{(3)\,36+\sqrt{-2800}}+\sqrt{(3)\,36-\sqrt{-2800}}$, ut regula Cardani cerscripserat, quod ostendendum proponebatur.

Tametsi autem radices cubicae semper ex binomiis et residuis ejusmodi analytice extrahi non possint, patet tamen semper in illis inesse, et operatione Geometrica inveniri, quemadmodum aliae radices surdae: ac proinde imaginarias semper destrui ac summam duarum hujusmodi radicum cubicarum semper esse realem, tametsi destruendi modus non sit semper enuntiabilis. Ne qua tamen ansa dubitandi relinquatur, duplici demonstratione generali rem conficiemus, quae rationales irrationalesve non moretur. Prior demonstratio huc redit: Formula Cardanica satisfacit aequationi cubicae triradicali; omnis formula quae satisfacit aequationi cuidam, est ejus radix; ergo formula Cardanica est aequationis cubicae triradicalis radix. Omnis porro radix aequationis cubicae triradicalis est quantitas realis (ex hypothesi ideo enim triradicalem vocamus, quod tres habet radices reales, qualem illam esse, quae regulas Cardani respuere credebatur, dudum ostensum est; videatur inprimis Schotenius in appendice de aequationum cubicarum resolutione; neque vero plures quam tres habere potest radix cubica ulla). Ergo formula Cardanica (etiam tum cum ex cubica triradicali ducitur) est quantitas realis. Superest ergo tantum, ut ostendamus formulam Cardanicam etiam aequationi cubicae triradicali satisfacere, quod apparet, si in aequatione ejusmodi ut $x^3 * - qx - r \sqcap 0$ substituendo valorem ipsius x, nempe



Semper ergo formula Cardanica satisfacit, nec refert, major minorve sit $\frac{q^3}{27}$ quam $\frac{r^2}{4}$.

Altera demonstratio haec est: Sit aequatio dat $ax^3 . - qx - r \sqcap 0$; ajo, radicem seu valorem ipsius x esse

$$\overset{A}{\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{+\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}} + \overset{B}{\sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}},$$

quanquam sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$. Probo, quia tunc semper erit $A \sqcap \frac{x}{2} + \sqrt{-ac}$, $B \sqcap \frac{x}{2} - \sqrt{-ac}$, sumta pro ac quantitate quamcunque calculus obtulerit, ac proinde summa utrius radicis cubicae seu $A+B$ erit x, ut proponebatur. Assumtum sic ostendo: Ponatur A vel B major minorve esse quam assignata quantitas, et excessus vel defectus sit $\pm d$; erit ergo $A \sqcap \frac{x}{2} \pm d + \sqrt{-ac}$, et $B \sqcap \frac{x}{2} \pm d - \sqrt{-ac}$, nam calculus ejusmodi binomiorum ostendit, quantitates reales in binomio pariter ac residuo esse easdem, nec differentiam nisi in signis quantitatis imaginariae intervenientis esse debere. Compendii autem causa ponamus $\frac{x}{2} \pm d \sqcap b$, fiet $A \sqcap -b + \sqrt{-ac}$ et $B \sqcap b - \sqrt{-ac}$.

*) Nam $AB \sqcap \frac{q}{3}$ ut facile calculo ostendi potest.

$$\text{et } A^3 \sqcap \begin{matrix} +b^3 \\ -3bac \end{matrix} \; \begin{matrix} -ac\sqrt{-ac} \\ +3b^2\ldots \end{matrix} \qquad \text{et } B^3 \sqcap \begin{matrix} +b^3 \\ -3bac \end{matrix} \; \begin{matrix} +ac\sqrt{-ac} \\ -3b^2\ldots \end{matrix}$$

$$\sqcap \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}} \qquad \sqcap \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$$

Habemus ergo $b^3 - 3bac \sqcap \frac{r}{2}$. Aliunde autem scimus, radicem ipsius $\frac{q^3}{27}$ differentiae quadratorum partium binomii vel residui dati $\frac{r}{2}$ et $\pm\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}$ aequari ipsi b^2+ac differentiae quadratorum partium binomii vel residui quaesiti $b\pm\sqrt{-ac}$ seu radicis binomii vel residui dati $\frac{r}{2}\pm\sqrt{-ac}$. Quod theorema demonstratum extat apud Schotenium in appendice Commentariorum, tametsi originem inventionis, quae ad altiores quoque gradus porrigitur, non attigerit, quam alias forte explicare poterimus. Habemus ergo aequationes duas $b^3 - 3bac \sqcap \frac{r}{2}$, et alteram $\frac{q}{3} \sqcap b^2 + ac$, ex quarum posteriore erit $ac \sqcap \frac{q}{3} - b^2$, quem valorem inserendo in priore habebimus $b^3 + 3b^3 - qb \sqcap \frac{r}{2}$ vel $8b^3 - 2qb - r \sqcap 0$. Quae aequatio cum per omnia coincidat datae, excepto quod pro x habetur $2b$, et pro x^3 habetur $8b^3$, ideo necesse est $2b$ esse x, adeoque b esse $\frac{x}{2}$. Posueramus autem supra $b \sqcap \frac{x}{2} \pm d$, erit ergo $\pm d \sqcap 0$. d autem significabat excessum aliquem aut defectum; is ergo erit nullus, adeoque exacte A sive $\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\sqcap \frac{x}{2}+\sqrt{-ac}$ et B sive $\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$. Ergo denique $\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}$ erit $\frac{x}{2}+\sqrt{-ac}+\frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$, id est x, quod ostendendum sumseramus.

Cum ergo satis opinor evicerimus, repetitas toties radicum irrationalium formulas esse reales sine ullo aequationis cubicae

discrimine, superest, ut de earum usu nonnulla dicamus. Ac primum haec est sententia mea, generatim in eo consistere perfectionem Algebrae, ut radices irrationales aequationum cujuscunque gradus inveniantur. Nam resolutio aequationis est, invenire valorem incognitae quantitatis, sive aequationem ex affecta et elata reddere puram et simplicem, quod generaliter in quolibet gradu fieri non potest nisi per irrationales illius gradus, accedentibus subinde et irrationalibus graduum inferiorum. Inventa formula generali radicum irrationalium alicujus gradus, habetur quidquid in eo gradu optari potest, limites ac determinationes, possibilitates atque impossibilitates, numerus radicum, expressio earum simplicissima, ac depressiones atque extractiones, quibus problema ad simplicissimos terminos reduci possit. Denique si de constructionibus quaeratur, habebitur revocatio omnium problematum ab aequationibus pendentium ad duo tantum, sectionem scilicet rationis aut anguli.

Eadem et priorum Algebristarum sententia fuit. Sed video, summum virum Renatum Cartesium aliam institisse viam atque ab ipso pariter ac doctissimis ejus commentatoribus radicum irrationalium usum atque inventionem plerumque elevari. Sed ita sumus homines, ut nostra tantum admiremur. Cartesius enim cum resolutionem aequationum per irrationales sive veram atque analyticam radicum inventionem promovere posse desperaret, rem ad geometricam constructionem traduxit per varia curvarum genera, praeclaram certe et summo ejus ingenio dignam, sed qua ut supra quoque dixi non mens illustratur, sed manus dirigitur. Si quis enim lineam quaesitam mihi exhibeat materialem instrumento aliquo, ut circuli aut parabolae sectionibus determinatam, praxin absolvit, animo non satisfacit, qui tum demum conquiescit, cum quaesitae quantitatis valorem simplicissima ad datas relatione expressum habet, qua intima ejus natura detegitur et omnes problematis recessus patefiunt. Videbat scilicet Cartesius, semper esse in potestate curvas invenire construentes (tametsi ut alibi dixi instrumentum aliquod simplex ac generale mentem non sustulerit), sed non esse hactenus in potestate invenire valores; certis enim ad valores irrationales inveniendos artibus est opus ac suppositionibus mira quadam ratione excogitatis, in quas non incidat animus, nisi aut immenso labore omnia pertentet aut singulari quodam artificio regatur, quod non ab Algebra, sed a superiore quadam scientia proficiscitur. Fateor cubicarum atque quadrato-quadraticarum ra-

dices facilius fuisse repertas, illas a Scipione Ferreo, has a Ludovico Ferrariensi, quoniam ob calculorum simplicitatem paucasque admodum combinationes variis modis ad idem perveniri solet. Ego certe decem minimum modis inter se diversis ad Scipionis Ferrei, tribus aut quatuor rationibus in Ludovici Ferrariensis regulas perveni, idque aliquando cum alia quaererem. At qui regulas quinti sextique gradus universales invenerit, eum certe laudabo, totum enim fere ingenio atque industriae, vix quicquam fortunae debebit. Hoc ergo agere debent, quicunque Algebram a se promotam gloriantur.

Cartesii methodus analytica hoc tantum ac ne vix quidem praestat, ut sciamus an aequatio aliqua rationalis dividi possit per aliam rationalem. Et ad id ipsum investigandum opus est calculis immensis, nam ut Huddenius ostendit, ut sciamus exempli causa, an aequatio aliqua sexti gradus per aequationem cubicam secundi termini rationalis dividi possit, opus est aequatione gradus decimi quinti, cujus divisores sed simplices tantum ac rationales quaerendi sunt. Fateor, Huddenium summo ingenio ac miris artibus immensoque labore tabulam inde eruisse, cujus ope omnia pertentando sciri possit, an aequatio aliqua rationalis quinti sextique gradus sit divisibilis; sed quis tanti putabit ullam aequationem, ut per tot examina incredibili labore ducat, et quid futurum putamus in altioribus, ubi tabula ipsa ad hunc constructa modum immensae magnitudinis futura esset, praeterquam quod ita aequationes illae, in quibus irrationales supersunt, non possunt examinari. Neque enim sine exaltatione aequationum semper tolli possunt irrationales: exaltationes autem illae plerumque ducunt ad gradus, de quibus regulas nondum habemus. At formula irrationalium radicum suo gradui generaliter accommodatarum, ingentis tabulae instar una habet, nec aequationes illas moratur, in quibus sunt irrationales, et hoc nobis praestat, ut depressiones omnes certa securaque ratione sine tot tentaminibus inveniantur per extractiones radicum quando fieri possunt. Divisorum enim inquisitio res est varia et multis tentaminibus obnoxia, praesertim cum de divisoribus irrationalibus agitur; at radicum inventio certa est semper ac determinata, sive literales sive numerales sint aequationes.

Sed usum radicum irrationalium uno atque altero tantum exemplo illustrare utile erit. Cartesius asserit, si aequatio cubica proposita rationalis dividi nequeat per incognitam plus minusve

aliquo divisore rationali termini ultimi (nam irrationales infiniti sunt nec tentari possunt), tunc pro certo haberi debere, problema esse solidum, adeoque omnem aequationem cubicam rationalem deprimibilem habere radicem rationalem. Quae assertio merebatur demonstrationem; quidni enim possit aequatio esse deprimibilis, et habere radices planas quidem, sed irrationales, nempe quadraticas? At hujus Theorematis veritas ex irrationalium Cardanicarum contemplatione manifestum est, ac nescio, an Cartesius aliunde emerit. Nimirum sit aequatio $x^3 - qx - r = 0$, cujus radix $x =$

$$\sqrt{(3)\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}.$$ Patet, si radicem habeat, partem unam A habituram et alteram B; item si radix ab A sit binonium ut $b + \sqrt{\pm ac}$, tunc radicem ex B fore residuum respondens $b - \sqrt{\pm ac}$. His adjicio, si radix cubica erui possit ex binomio A vel residuo B, tunc eam semper habere partem unam b rationalem, nec posse componi ex duabus irrationalibus, quod ita probo. Omne binomium vel residuum, cujusque partium quadratorum differentia habet radicem cubicam rationalem, ejus binomii radix est ex parte rationalis; patet ex dictis a Schotenio in appendice Commentariorum, ubi de methodo extrahendi ex residuis et binomiis, et potest si opus accuratius demonstrari. Jam binomium vel residuum Cardanicum semper tale est; ejus enim partes sunt $\frac{r}{2}$ et $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$, quadrata partium sunt $\frac{r^2}{2}$ et $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$, quorum differentia $\frac{r^2}{4}, -\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$, id est $\frac{q^3}{27}$, cujus radix cubica est rationalis, nempe $\frac{q}{3}$. Cum ergo b sit rationalis quantitas et x quandocunque, ex A et B radix cubica extrahi potest. Sit $b + \sqrt{\pm ac} + b - \sqrt{\pm ac}$ sive $x = 2b$, patet x fore semper rationalem, quandocunque aequatio cubica deprimi potest.

Deberet jam explicari Methodus extrahendi radices cubicas ex his binomiis vel residuis etiam tum cum imaginariae ingrediuntur. Raphael Bombellus id praestat tentando, intra certos tamen limites, quoniam scilicet methodus illa ingeniosissima, quae a Schotenio sub finem Commentariorum adjecta est, nondum haberetur. Quoniam autem requirit methodus haec, ut binomii ejusmodi vel residui valor in numeris inveniatur vero propinquus, ut postea exacte reperiri possit; ideo fit ut imaginariis intervenientibus directe

adhiberi nequeat; quis enim exempli causa in numeris rationalibus vero propinquis exhibeat valorem quantitatis hujusmodi $\sqrt{(3)\,1+\sqrt{-1}}$? Cui malo remedium inveni ac methodum detexi, per quam sine tentamentis, ex talibus binomiis etiam non obstante imaginaria radices extrahi possint, non cubicae tantum sed et surdesolidae, et aliae altiores quaecunque.

Nititur illa inventio cuidam singulari, quod aliquando explicabo. Nunc regulas quasdam adjiciam ex irrationalibus contemplatione ductas, quanquam in illis nulla fiet irrationalium mentio, per quas radix rationalis ex ipsis tentando facile extrahitur.*)

XV.

NOVA ALGEBRAE PROMOTIO.

Hactenus Algebra admodum imperfecta mansit, etsi qui eam non satis callent, ad summum fastigium provectam arbitrentur: quemadmodum fere fit, ut tanto quisque plus suae scientiae tribuat, quanto scientiae minus habet. Nimirum nemo hactenus aliquid generale attulit circa resolutionem Aequationum quae assurgunt ultra quartum gradum, quae tamen non usque adeo raro occurrunt, in problematibus etiam quae adeo difficilia non videntur. Exempli causa triangulum partiri in quatuor partes aequales ope duarum rectarum inter se perpendicularium problema est, quod ascendit ad aequationem octavi gradus. Taliaque occurrunt aliquando in Analysi versantibus.

Resolutionem autem Aequationis Algebraicam vel in Numeris indeterminatis tunc haberi putandum est, cum habetur Valor seu Expressio Analytica radicis, per quam nimirum et exacte et finite et in generalitate debita valores radicum exhibentur. Habemus quidem casus speciales, in quibus aequationes altiores deprimi

---

*) Die Abhandlung bricht hier ab.

aut etiam sine depressione ab affectis ad puras radices sui gradus transferri possunt, sed in generalibus terminis, ita ut coefficientes terminorum secundi, tertii, quarti etc. velut p, q, r etc. nullam habeant relationem inter se praescriptam, rem nondum quisquam praestitit, nisi quam aequatio altior revera cadit in inferiorem, potentia ejus incognitae loco assumta, velut in aequationibus gradus binarii, ubi soli extant termini gradus binarii, et in aequationibus gradus ternarii, in quibus soli extant termini gradus ternarii, et ita porro.

Habemus valores generales Radicum in aequationibus altioribus latentium per appropinquationes, sed qui non sunt exacti; habemus et exactos, sed non nisi infinitaliter exprimendos, quales sunt valores quos praebent series infinitae, qui valores mente quidem intelligi, sed numeris definitis exhiberi non possunt. Habemus denique Radices exacte et finite exhibitas, at modo organico, non per expressiones, cum scilicet locis geometricis seu lineis curvis continuis, id est per motum descriptis earumque intersectionibus vel etiam aliquo organo conveniente incognitae lineae radicibus aequationis inservientes exhibentur, sed hic modus exhibendi organicus revera non est analyticus et dat quidem quantitatem, sed non ejus valorem.

Exemplo discrimina haec illustrabo. In quadrato ABCD (fig. 29) habeo lineam Diagonalem organice, possum enim eam reapse exhibere ducta recta AC quae est diagonalis, sed non ideo habeo ejus valorem, nisi sciam ejus relationem analyticam ad quadrati latus AB. Ea autem nobis nota est, nam si super AC describatur quadratum ACEF et producamus AD in E et CD in F, patet ACEF continere quater triangulum ADC, sed ABCD continet idem triangulum bis, ergo ACEF quadratum a diagonali est duplum ipsius ABCD quadrati a latere. Itaque si AB vocetur a, et AC vocetur x, fiet $xx=2aa$ seu $x=a\sqrt{2}$ seu x est ad a ut $\sqrt{2}$ est ad 1, qui est valor seu expressio Analytica exacta finita ipsius diagonalis. Atque hoc est quod vulgo dici solet, diagonalem esse incommensurabiliter lateri, nam ejus valor non potest exacte et finite exprimi, nisi per numerum surdum $\sqrt{2}$. Et quoties valores sunt incommensurabiles vel simul comprehendunt tam commensurabiles quam incommensurabiles, in casu generalitatis desideratur hujusmodi aliqua expressio per numeros surdos.

Habeo quidem expressionem valoris ipsius $\sqrt{2}$ rationalem et exactum, sed per seriem infinitam hoc modo, ut dicam esse

$$\sqrt{2} = \frac{23}{16} - \frac{5}{2^6;1.2} + \frac{7}{2^7;1.2} - \frac{7.9}{2^9;1.2.3} + \frac{9.11}{2^{10};1.2.3} - \frac{9.11.13}{2^{12};1.2.3.4}$$
$$+ \frac{11.13.15}{2^{13};1.2.3.4} - \frac{11.13.15.17}{2^{15};1.2.3.4.5} + \frac{13.15.17.19}{2^{16};1.2.3.4.5}$$
$$- \frac{13.15.17.19.21}{2^{18};1.2.3.4.5.6} + \frac{15.17.19.21.23}{2^{19};1.2.3.4.5.6} \text{ etc.}$$

ubi quanto magis continuatur series, tanto minus erratur, cum error semper sit minor eo termino qui terminum per quem finivimus sequitur. Tota autem series rationalis infinita exacte aequalis est valori irrationali quaesito $\sqrt{2}$. Sed patet subsidiarias esse tales expressiones, utiles quidem in praxi pariter et theoria, non tamen continere quod desideramus.

Habemus etiam Expressiones varias appropinquativas, quales tum ex praecedenti serie hauriri possunt, tum etiam per modum receptum extrahendi radicem ex numero, postquam multae ciphrae nullitatis indices ei sunt adjectae, veluti cum appropinquandum est ipsi $\sqrt{2}$, extrahendo radicem quadraticam decimaliter ex 2.000000000, ubi fit $\sqrt{2} = 1.414213$. Ubi si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{14}{10}$, ideo ob sequentem numerum 1 error erit minor quam $\frac{1+1=2}{100}$ seu $\frac{1}{50}$; si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{141}{100}$, error erit minor quam $\frac{4+1=5}{1000}$ seu $\frac{1}{200}$; si dicamus $\sqrt{2}$ esse $\frac{1414}{1000}$, error erit minor quam $\frac{2}{10000}$, et ita porro. Quodsi ante continuationem operationis daretur continuatio in infinitum notarum decimalium, haec appropinquatio transiret in casum praecedentis paragraphi seu in valorem exactum per seriem infinitam, et quidem in meris integris, quod hactenus pro irrationalibus praestitum non est. Franciscus Vieta primus hoc extractionis genus a radicibus puris promovit ad radices affectas. Radicem puram vocamus, cum incognita vel ejus potentia aequatur quantitati rationali, ex. gr. $xx = 2$, vel $x^3 = 3$, vel $x^4 = 3$, ita enim radix pura est $x = \sqrt{2}$, vel $= \sqrt[3]{3}$, vel $= \sqrt[4]{3}$. Sed radix erit affecta, si sit $xx = ax + bb$, cum aequatio est plus quam bitermina, et plures dignitates ejusdem incognitae ad eam formandam concurrunt. Eleganter ergo ostendit Vieta in libro De Numerosa Aequationum resolutione, etiam radices affectas simili quadam ratione extrahi posse, eaque methodo prodire ipsas in Numeris Ra-

dices aequationum, quoties eae Radices sunt rationales; si minus, prodire decimaliter valores quantumlibet appropinquantes.

Post Vietam Thomas Harriotus Anglus non tantum resolutionem Vietae numerosam excoluit, sed etiam notionem a Vieta tantum subindicatam utiliter prosecutus est, quod scilicet aequatio posita nihilo aequalis prodeat ex aequationibus radicalibus etiam nihilo aequalibus in se invicem ductis; qualis est $x-2=0$, posito radicem unam aequationis seu valorem ipsius x esse; et quod summa radicum aequetur termino secundo aequationis, summa binionum (seu rectangulorum) ex radicibus termino tertio, summa ternionum (seu rectangulorum solidorum) ex radicibus termino quarto, et ita porro. Illud etiam sane pulcherrimum observavit primus, quod tot sint mutationes signorum in aequatione nihilo aequali ordinatim scripta, quot radices affirmativae, et tot consecutiones signorum, quot radices negativae.

Cartesium inventis Harrioti usum dubitari vix potest usque adeo ut dimidia fere pars libri tertii Geometriae Cartesianae ex Harrioto transcripta videatur, ne illo quidem palmario de mutationibus et consecutionibus signorum excepto, quod non facile alicui in mentem venire poterat, qui non diu in hujus calculi experimentis erat versatus. Harriotus enim hanc regulam inductione, non ratione animadvertit, et hactenus neque Cartesius neque Cartesianorum quisquam ejus rationem reddere potuit. Hoc tamen Cartesius praeclare addidit Harrioto, quod consideravit concipi posse radices imaginarias seu impossibiles, quarum ope universalia redduntur, quae Harriotus limitate ad possibiles dixerat.

Caeterum Cartesius cum numerosam Aequationum Resolutionem animadverteret a Vieta occupatam et viam pedum nullam videret ad id quod maxime desiderabile non poterat ignorare, id est ad valores Radicum analyticos generales exactos per radices irrationales gradui aequationis convenientes; transtulit sese ab Analysi ad Geometriam, a valoribus ad constructiones, a ratiocinatione mentem illustrante ad effectionem manus atque organa gubernantem, et loca a Veteribus coepta prosecutus, ostendit quomodo per intersectiones linearum motu continuo per organa descriptilium radices quaesitae exhiberi queant. In quo sane ingens operae pretium fecisse Cartesium negari non debet, etsi postea Fermatius nonnulla ejus praecepta emendarit, Slusius etiam totum hoc ne-

gotium tractabilius reddiderit, loco ultimae aequationis unius incognitae adhibendo binas duarum incognitarum.

Porro Cartesius, vir erat haud dubie praeclarissimus, cui mirifice obstricta est haec scientia, in eo tamen nocuit progressui, quod hoc egit omni studio et arte, ut crederetur praestitisse aut certe viam ostendisse ad praestandum, quicquid poterat in ea desiderari. Qua ratione factum est, ut plerique ejus discipuli vix animum altius attollerent aut quicquam adderent inventis magistri. Nam si Slusium et Huddenium excipiamus, nihil magni momenti ad Algebram adjecere Cartesiani. Cartesius igitur, cum videret difficillimam rationem esse inveniendi valores radicum affectarum irrationales generales, hanc inquisitionem contemsisse visus est et ut nec orginem indicare dignatus regulae pro Radicibus aequationum cubicarum a Scipione Ferreo et Nicolao Tartalea inventae, ita etiam locutus est tanquam nihil interesset inter tales expressiones, quae sunt per latera cuborum datorum, et eas quibus indicaretur lineas quasdam rectas exhiberi trisectione Anguli, cum tamen manifestum sit priorem expressionem ad calculum inservire, posteriorem minime.

Sciendum ergo est, quod primarium Analyseos Algebraicae officium attinet, exprimere radices aequationum per valores; quicquid in eo genere hactenus praestitum est, ultra aequationes quadraticas (quas jam Graeci et Arabes resolvere norant) Italis deberi. Primus ergo Scipio Ferreus qui Bononiae paulo post initia seculi a Christo nato decimi sexti Mathesin docuit, elegantissimo invento deprehendit valorem Radicum Aequationis cubicae generalem, quod idem postea invenit Nic. Tartalea, cum Scipionis regula ab ejus discipulis tegeretur, ut Cardanus narrat, qui artem a Tartalea acceptam primus publicavit. Etsi autem vulgo putetur et ab ipsis etiam inventoribus creditum sit, excludi a regula eas cubicas aequationes, in quibus sunt tres radices possibiles: a me tamen dudum animadversum est, non obstante imaginariarum quantitatum interventu regulam valere; manet enim expressionis veritas, etsi non sit apta ad constructionem.

Reductio deinde aequationis quadroquadraticae ad cubicam debetur Ludovico Ferrariensi, juveni admodum ingenioso, qui Cardani discipulus fuit, et praematura morte spes majores de se conceptas destituit, ut ipse Cardanus nobis refert. Vieta et Cartesius inventum Ludovici tantum repetiere, etsi uterque inventorem verum

dissimularit; Cartesius etiam perinde locutus sit, ac si rem ipse proprio marte invenisset, Methodo inventoris nonnihil mutata.

Ab eo tempore nihil mentione valde dignum in hac Analysi praestitum est a quoquam, quantum constat; etsi nonnulli .....*)

Constat Tabulas Numerorum in Mathematicis haberi multas et perutiles, quibus fit ut calculus semel ab uno peractus imposterum serviat omnibus. Ita extant Tabulae multiplicationum, Pythagorico quem vocant Abaco continuato; Tabulae numerorum ex primitivis derivatorum per multiplicationes; Tabulae numerorum Quadratorum, Cuborum, Triangularium aut aliter figuratorum vel denominatorum; sed celebratissimae omnium Tabulae Sinuum, Tangentium et Secantium ac Logarithmorum vel absolutorum vel ad Tabulas Sinuum ac Tangentium relatorum, ut alias taceam vel conditas vel magno cum fructu adhuc condendas in pura vel in mista Mathesi.

Harum exemplo saepe consideravi, rem magni usus fore Analyticam in Mathesi artem Calculo quem Speciosum vocant vel literalem exercentibus, si Canones et Canonum Tabulae conderentur pro illis calculi operationibus quae saepe occurrunt, ut in oblato casu statim ad Canonem recurri possit nec actum millies agere sit opus, praesertim cum illi ipsi Canones Canonumque Tabulae simul Theoremata pulchra, imo series quasdam Theorematum praebeant, in infinitum constanti lege progredientes.

Reperietur autem hoc attentaturis, nihil aliud esse Calculum circa magnitudines Analyticum, quam exercitium artis Combinatoriae sive Speciosae generalioris, formas seu quantitates (quatenus scilicet distincte concipiuntur) et relationes harumque similitudines tractantis per notas, quam Algebra literalis a Vieta introducta applicat ad habitudines quantitatum atque adeo Arti Combinatoriae subordinata est. Speciosa autem generalis ipsa est Ars characteristica, in unam cum Combinatoria disciplinam confusa, per quam rerum relationes apte characteribus repraesentantur. Et pro certo habendum est, quanto magis effe-

*) Schluss fehlt.

cerimus ut characteres exprimant omnes relationes quae sunt in rebus, eo magis nos in iis reperturos auxilium ad ratiocinandum, ut ita quemadmodum de scriptura eleganter dixit poëta Gallus, colorem et corpus cogitationibus rationibusque inducamus, non tantum in memoriae usum ad retinendum cogitata, quod scriptura praestat, sed etiam ad vim mentis augendam, ut incorporalia velut manu tangat. Sed nobis nunc in rem praesentem veniendum est post praefationem (ut opinor) non inutilem, quoniam, uti mox patebit, in notis Algebraicis defectus ingens superfuit hactenus, cujus tollendi rationem trademus.

Algebra ut nunc recepta est quantitates oblatas notis quibusdam designat, eamque in rem literis, tanquam maxime familiaribus utitur. Et sane quoties ipsarum quantitatum adhibitarum nullae considerantur relationes inter se invicem, quibus distinguantur, parum interest quas adhibeamus notas. Esto igitur ex quantitatibus simplicissimo modo, id est per additionem composita quantitas, exempli gratia

$$\text{sit } x = a + b + c + d \text{ etc.}$$
$$\text{et sit alia } y = k + l + m + n \text{ etc.}$$
$$\text{et rursus } z = q + r + s + t \text{ etc.}$$

ubi nullum est discrimen inter literas valoris ejusdem, distinguuntur tamen inter se literae divisorum valorum. Et erit xy summa omnium binionum possibilium ex literis valorum x et y simul formatorum, et xyz summa omnium ternionum ex literis valorum x et y et z simul, et ita porro. Si plures sint valores, ea scilicet tantum lege combinationis servata, ut ne in eodem membro plures ex eodem valore literae concurrant.

$$\begin{aligned} \text{Jta } xy = ak &+ al + am + an \text{ etc.} \\ bk &+ bl + bm + bn \text{ etc.} \\ ck &+ cl + cm + cn \text{ etc.} \\ dk &+ dl + dm + dn \text{ etc.} \\ \text{etc.} &\ \text{etc.} \ \text{etc.} \ \text{etc.} \end{aligned}$$

ubi patet seriem horizontalem multiplicari per eandem literam ex valore x, et verticalem multiplicari per eandem ex valore y; sed in horizontali id quod multiplicetur esse valorem y, et in verticali valorem x. Pro xyz omittamus brevitatis causa literas d, n, t, ut sit $x = a + b + c$, $y = k + l + m$, $z = q + r + s$, et fiet

$$\begin{array}{rl} xyz = & akq + akr + aks \\ & alq + alr + als \\ & amq + amr + ams \\ & anq + anr + ans \\[6pt] & bkq + bkr + bks \\ & blq + blr + bls \\ & bmq + bmr + bms \\[6pt] & ckq + ckr + cks \\ & clq + clr + cls \\ & cmq + cmr + cms, \end{array}$$

quod quidem melius repraesentaretur rectangulo solido ut praecedens xy rectangulo plano; sed in plano sufficit haec trirectanguli expositio, praesertim cum $xyz\omega$ tanquam quadro-rectangulum, si ita loqui licet, aut altiora ne in solido quidem exhiberi queant. Patet autem simul et ordo in dispositionibus literarum, quem persequi nihil attinet. Satis est notari: prolixae repraesentationis actualis compendium fieri enuntiatione superiore per biniones, terniones etc. dicendo productum ex valoribus quotcunque esse summam combinationum possibilium, quas una tantum ex quovis valore quantitas ingrediatur. Comprehenditur autem sub additione subtractio, si litera ponatur esse quantitas negativa, ut si $c = -f$, idem erit $a + b - f$ quod $a + b + c$.

Jam consideremus non tantum adhiberi posse in valoribus formulas illas simplices, sed etiam magis compositas, ubi literae assurgunt ad potentias, vel ducuntur in se invicem. Maxime autem insistemus casui simpliciori et magis usitato, ubi non nisi unius literae tanquam capitalis potentias adhiberi opus est, sed variis coefficientibus affectae, ad quas omnia ordinentur. Ut si x esset $7 + 2\nu + 3\nu\nu + 6\nu^3$, ubi ut res generaliter tractetur, cum numeri possint esse quicunque, poterimus facere $y = a + b\nu + c\nu^2 + d\nu^3$; sed praestabit (ob mox dicenda) adhibere numeros supposititios sive fictitios qui significent idem quod a, b, c etc. et facere

$$\begin{array}{l} x = 10 + 11\nu + 12\nu^2 + 13\nu^3 + 14\nu^4 \text{ etc.} \\ y = 20 + 21\nu + 22\nu^2 + 23\nu^3 + 24\nu^4 \text{ etc.} \\ z = 30 + 31\nu + 32\nu^2 + 33\nu^3 + 34\nu^4 \text{ etc.} \end{array}$$

Atque ita jam exprimimus notis Algebraicis hujusmodi non



tantum coefficientes quantitates, sed etiam omnes eorum relationes inter se ex datis nascentes, adhibendo pro literis numeros suppositities, quorum notae dextrae designabunt quarum potentiarum ipsi sint coefficientes, et sinistrae ostendent quarum ipsi literarum valores ingrediantur. Sic 32 ob 2 afficit ν^2, et ob 3 reperitur in valore tertiae nempe literae z.

Continetur etiam in his Expressionibus potentia quaedam virtualis, cujus subintellectione intelligi potest servari legem homogeneorum. Exempli causa si fingamus 1, 2, 3 in notis dextris designare potentiam, sed exponentis negativi, ita ut 10, 11, 12, 13 idem significent quod a^{-0}, b^{-1}, c^{-2}, d^{-3}, et ita porro, vel quod idem est $\frac{1}{a^0}$, $\frac{1}{b^1}$, $\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{d^3}$; hoc pacto omnes termini erunt ejusdem gradus, nempe nullius perinde ac si x vel y esset non linea aut alia res, sed numerus, qui etiam intelligitur gradus nullius; ita $10+11\nu+12\nu^2+13\nu^3$ etc. darent $1+\frac{1}{b}\nu+\frac{1}{c^2}\nu^2+\frac{1}{d^3}\nu^3$ etc. qui omnes termini sunt homogenei primo, nempe unitati vel $\nu^0:b^0$ seu $\frac{1}{b^0}\nu^0$.

Dici autem vix potest, quantum ista usum habeant etiam ad evitandos Calculi errores, ita ut ipse calculus quodammodo comprobationem suam ferat secum, quemadmodum et alias legis homogeneorum observatio multos calculi errores excludit. Hic vero cum non pauca alia indicentur, et serie quadam certa progrediamur, multo adhuc tutius agimus. Et quod potissimum est, continue theoremata condimus inter operandum, multo magis et extantius quam in calculo literali recepto, quoniam semper videmus quorsum pertineant datae quantitates, aut qua lege inter se combinentur, quod in calculo communi literali non apparet.

Equidem possemus simile aliquod comminisci per literas pro Numeris sive potentias ipsis tribuendo, ut paulo ante dictum est (sed quod tamen ut mox patebit, cum numeri supposititii plurium sunt quam duarum notarum, non sufficit) sive potius faciendo quod Graeci aut alii populi solent, nempe literis designando numeros, ita pro 32 scribetur latine cb vel graece $\gamma\beta$. Sed numeris nostris magis sumus assueti et praeterea cautione opus esset ne, ut

alias in literis, habeatur cb pro ducto ex c in b, sed ut tanquam una aliqua litera consideretur. Itaque fortasse poterimus numeris esse contenti, ita tamen, ut sua hic libertas cuivis relinquatur.

Ex posito jam valore ipsarum x et y fiet

$$\begin{array}{lllll} xy = 10.20 + & 10.21\nu + & 10.22\nu^2 + & 10.23\nu^3 + & 10.24\nu^4 \\ & 11.20 & 11.21 & 11.22 & 11.23 \\ & & 12.20 & 12.21 & 12.22 \\ & & & 13.20 & 13.21 \\ & & & & 14.20 \end{array}$$

unde eodem modo prodiret xz mutando tantum notas sinistras 1, 2 in 1, 3, seu retento in iis 1, mutando 2 in 3. Et yz fieret mutando notas sinistras 1, 2 in 2, 3, nempe 2 in 1 et 2 in 3 vel quod eodem redit hoc loco, mutando 1 in 3, retento 2.

Sed nec minus facile prodit productum ex tribus seu erit

$$\begin{array}{lllll} xyz = 10.20.30 + & 11.20.30\nu + & 12.20.30\nu^2 + & 13.20.30\nu^3 + & \text{etc.} \\ & 10.21.30 & 10.22.30 & 10.23.30 & \\ & 10.20.31 & 10.20.32 & 10.20.33 & \\ & & 11.21.30 & 12.21.30 & \\ & & 11.20.31 & 12.20.31 & \\ & & 10.21.31 & 11.22.30 & \\ & & & 11.20.32 & \\ & & & 10.22.31 & \\ & & & 10.21.32 & \\ & & & 11.21.31 & \end{array}$$

ubi generaliter dici potest, productum ex formulis quotcunque generalibus per unam literam ν rationaliter integre expressis esse formulam ex ν rationalem integram, in qua termini cujusque coefficiens sit summa combinationum possibilium facta ex coefficientibus initio datis formularum producentium omnium, ea lege combinationis servata, ut in quovis membro idem sit gradus potentiae formalis qui totius est producti, et idem gradus potentiae virtualis, qui est gradus potentiae ipsius ν, ad quam pertinet membrum. Unde tot sunt in membro numeri supposititii invicem ducti, quot invicem ductae sunt formulae, ex quavis nempe formula numerus unus, et numerorum supposititiorum notae ultimae facient summam aequalem exponenti potentiae ipsius ν. Sic in coefficiente ipsius ν^2 quodlibet membrum verb. grat. 12.20.30 vel

11.21.30 habet numeros tres et notas quidem priores 1, 2, 3, quae indicant ex qua formula producente venerint, sed notas posteriores (gradum virtualem designantes) ita comparatas ut simul faciant 2; nam 2+0+0 est 2, et 1+1+0 est 2.

Hinc etiam licet contractius scribere haec producta, nempe compendiosiore expressione combinationum, dum pro omnibus similibus inter se scribitur una cum vocula etc. vel cum suppositis punctis ut.. Ita pro 10.22 + 12.20 scribetur $10.\underset{..}{22}$, pro 11.21.30 + 11.20.31 + 10.21.31 scribetur $11.\underset{..}{21}.30$, et fiet

xy=10.20	+10.21ν	+10.22ν^2	+13.20ν^3	+14.20ν^4	+15.20ν^5 etc.
		+11.21	12.21	13.21	14.21
				12.22	13.22

xyz=10.20.30	+11.20.30ν	+12.20.30ν^2	+13.20.30ν^3	+14.20.30ν^4	+15.20.30ν^5
		11.21.30	12.21.30	13.21.30	14.21.30
			11.21.31	12.22.30	13.22.30
				12.21.31	13.21.31
					12.22.31

Sed ex hac contracta Formarum scribendi ratione dum pro tota forma ex membris omnibus similibus formata scribitur membrum unum, aperit se majus aliquid ac memorabilius: nempe modus canone generali seu una formula exprimendi productum ex formulis rationalibus integris quotcunque unam literam capitalem (seu ad quam ordinantur) ut hoc loco ν, potentiasve ejus continentibus. Nam posito x = 10 + 11ν + 12ν^2 etc. et y = 20 + 21ν + 22ν^2 + etc. et z = 30 + 31ν + 32ν^2 + etc. et ω = 40 + 41ν + 42ν^2 + etc. et ita porro, fiet omissis duobus punctis supponendis, cum semper jam subscripta intelligantur,

xyzω etc. = 10.20.30.40 etc. + 11.20.30.40 etc. ν

+ 12.20.30.40. etc. ν^2	+ 13.20.30.40.50. etc. ν^3	+ 14.20.30.40.50.60. etc. ν^4
11.21.30.40. etc...	12.21.30.40.50 etc...	13.21.30.40.50.60. etc. ..
	11.21.31.40.50 etc...	12.22.30.40.50.60. etc. ..
		12.21.31.40.50.60. etc. ..
		11.21.31.41.50.60. etc. ..

ubi variae sunt ejusdem formae significationes; exempli causa 12.21.30 etc. significat vel 12.21 id est 12.21 + 12.22, si duae tantum sint producentes x et y adeoque 30 negligatur aut unitati aequetur; vel significat $12.\underset{..}{21}.30$ (si sint tres, x, y, z) id est

12.21.30 + 11.22.30 + 12.20.30 + 11.20.32 + 10.22.31 + 10.21.32; vel significat 12.21.30.40 (si sint quatuor x, y, z, ω), quod distincte scriptum daret membra 12, tot scilicet quot sunt rerum quatuor biniones duplicatae; vel significat 12.21.30.40.50, quod distincte scriptum daret membra 20; atque ita porro. Quae autem abest multiplicans formula, ut si absit valor ipsius ω, ejus coefficientes, ut 40, 41 etc. possunt pro unitatibus haberi in canone generali, et multo magis coefficientes sequentium, ut 50, 51 etc.

Id autem commode contingit, quod numerus formarum finitus est in quolibet gradu, quantuscunque sit numerus producentium formularum, adeoque et in quolibet potentiae cujuslibet coefficiente. Ex. gr. in gradu quarto non sunt formae nisi hae a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc, abcd, quibus respondent: 14.20.30.40, et 13.21.30.40, et 12.22.30.40, et 12.21.31.40, et 11.21.31.41, nam 50 et 60 accedentia nil mutant in numero formarum combinationis, etsi in numero membrorum ejusdem combinationis multum mutent. Tot scilicet sunt formae in gradu quot sunt exponentis divulsiones. Nam numerus $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$; divulsionibus autem computatur ipse integer numerus, quasi essent univulsio una, bivulsiones duae, trivulsio una, quadrivulsio una. Etsi autem pluribus formulis invicem ductis plures conjungantur numeri suppositilii quam sunt unitates in exponente gradus, veluti 4, pro coefficiente ipsius ν^4; tamen necesse est ut reliqui numeri concurrentes praeter quatuor semper habeant notam ultimam 0, quia notae ultimae simul additae non debent facere nisi 4.

Possemus jam progredi ad multiplicationes formularum plures literas capitales habentium, ut si sint duae literae tanquam capitales m et n, et sit

$$\begin{array}{llllll} \nu = 100 & + 100m & + 111mn & + 121m^2n & + 122m^2n^2 & \\ & 101n & 120m^2 & 112mn^2 & 131m^3n & \\ & & 102n^2 & 130m^3 & 113mn^3 & \\ & & & 103n^3 & 140m^4 & \\ & & & & 104n^4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \text{et } x = 200 & + 210m & + 211mn & + 221m^2n & + 222m^2n^2 & \text{etc.} \\ & 201n & 220m^2 & 212mn^2 & 231m^3n & \\ & & 202n^2 & 230m^3 & 213mn^3 & \\ & & & 203n^3 & 240m^4 & \\ & & & & 204n^4 & \end{array}$$

ubi numeri supposititii sunt trinotales pro literis capitalibus duabus m et n et quadrinotales pro capitalibus tribus etc., initiali scilicet nota tantum designante ex quo numerus valore sit sumtus ipsius y an ipsius x etc., reliquis notis designantibus potentiam literae capitalis, ita ut prima post initialem notam sedes referatur ad m, secunda ad n, etc. Ita 230 praefigitur ipsi m^3, et 2 significat id fieri in valore secundo seu ipsius x, 3 proxime sequens notat m assurgere ad cubum, 0 notat n abesse; sed 212 notat m^1n^2 seu mn^2 eodem valore secundo. Sed ut talia invicem multiplicentur, praesertim si res sit reddenda generalis pro literis quotcunque capitalibus valores ingredientibus, constituendi sunt prius ductus formarum in se invicem, de quibus infra.

Nunc satis in multiplicatione diversarum formularum in se invicem versati. Demus et canonem pro divisione, praesertim cum illic contenti esse possimus dividere formulam aliquam generalem rationalem integram secundum aliquam literam capitalem per aliam formulam rationalem integram secundum eandem capitalem, sive succedat exacte, sive secus; quo casu per canonem etiam residuum exhibetur, vel si malimus series infinita. Unde patet, quantus sit usus Canonum generalium, ut sponte praebeant rem antea abstratissimam et nostra demum aetate productam.

Sit formula $10x^8 + 11x^7 + 12x^6 + 13x^5 + 14x^4 + 15x^3 + 16x^2 + 17x + 18$ dividenda per formulam $-20x^5 + 21x^4 + 22x^3 + 23x^2 + 24x + 25$, ubi loco 20 assumo —20, cujus ratio mox ex calculo patebit, ut scilicet evitemus signum — inter calculandum. Ponamus jam quantitatem ex divisione provenientem quaesitam esse

$$30x^3 + 31x^2 + 32x + 33 + \frac{34x^4 + 35x^3 + 36x^2 + 37x + 38}{-20x^5 + 21x^4 + 22x^3 + 23x^2 + 24x + 25}$$

compositam ex quotiente integro et residuo fracto. Hanc multiplicemus per divisorem $-20x^5 + 21x^4 +$ etc., proveniet formula coincidentianda cum dividendo initio posito, quod ut fiat commodius tam quoad signa, quam quoad legem homogeneorum, et notas numerales 5, ponamus dividendum datum seu initio positum, itemque numeratorem quotientis multiplicatum esse per —00, supponendo tamen $-00 = 1$ seu $00 = -1$, ita enim nihil hac multiplicatione mutatur. Multiplicatio ita stabit:

$$
\begin{array}{lllllllll}
-20.30x^8 & -20.31x^7 & -20.32x^6 & -20.33x^5 & -00.34x^4 & -00.35x^3 & -00.36x^2 & -00.37x & -00.38 \\
 & +21.30 & +21.31 & +21.32 & +21.33 & & & & \\
 & & 22.30 & 21.31 & 22.32 & +22.33 & & & \\
 & & & 23.30 & 23.31 & 23.32 & +23.33 & & \\
 & & & & 24.30 & 24.31 & 24.32 & +24.33 & \\
 & & & & & 25.30 & 25.31 & 25.32 & +25.33
\end{array}
$$

quae formula coincidere debet dividendo initio dato per -00 multiplicato

$$-00.10x^8 - 00.11x^7 - 00.12x^6 - 00.13x^5 - 00.14x^4 - 00.15x^3 - 00.16x^2 - 00.17x - 00.18$$

Jam ut coincidentiatio reapse praestetur, aequandus est terminus termino ejusdem gradus seu fiet $-20.30 = -00.10$ et $-20.31 + 21.30 = -00.11$. et ita porro, quas voco aequationes coincidentiatorias. Unde jam reperiemus valores quaesitorum coefficientium tam Quotientis quam Residui. Nempe fiet pro Quotiente

30	31	32	33
aequ.	aequ.	aequ.	aequ.
00.10:20	$\left.\begin{array}{l}+00.11 \\ 21.30\end{array}\right\}:20$	$\left.\begin{array}{l}+00.12 \\ 21.31 \\ 22.30\end{array}\right\}:20$	$\left.\begin{array}{l}+00.13 \\ 21.32 \\ 22.31 \\ 23.30\end{array}\right\}:20$

et fiet pro Residuo

34	35	36	37	38
aequ.	aequ.	aequ.	aequ.	aequ.
+00.14	+00.15	+00.16	+00.17	+00.18
21.33	22.33	23.33	24.33	25.33
22.32	23.32	24.32	25.32	
23.31	24.31	25.31		
24.30	25.30			
:00	:00	:00	:00	:00

ponendo semper 00=—1.

Lex progressus, quotcunque sit graduum dividendus aut divisor, satis patet ex aspectu. Nempe omnis valor coefficientis in Quotiente habet denominatorem 20, in Residuo denominatorem 00; deinde sine discrimine Quotientis aut Residui

Numerator valoris pro 30 31 32 33 34 35 etc.
habet membrum 00.10 00.11 00.12 00.13 00.14 00.15 etc.

Et de caetero membra sunt omnes biniones possibiles formatae ex coefficiente aliquo divisoris initio dato cum coefficiente aliquo provenientis jam invento, sic ut semper gradus virtualis (seu summa notarum posteriorum) aequetur gradui virtuali (seu notae posteriori) coefficientis jam inventi. Ita numerator in valore ipsius 33 praeter 00.13 habet 21.32+22.31+23.30 ubi 1+2, et 2+1, et 3+0 semper facit 3; et in aequatione 33=00.13+21.32+22.31+23.30, : 20 seu 20.33=00.13+21.32+22.31+23.30 servatur lex homogeneorum tum formalis, quodlibet enim membrum est velut rectangulum ex duabus quantitatibus, tum virtualis, quo semper ascenditur ad gradum 3.

Obiter hic addo, hanc designationem 00.10:20 mihi significare divisionem ipsius 00.10 per 20, seu ab:c idem mihi esse quod $\frac{ab}{c}$, idque commoditatis causa praesertim ad impressionem adhibere soleo, cum ita typorum positus non turbetur nec spatium perdatur. Rationem quoque a ad b ut c ad d sic exprimo a:b=c:d, ut ita non opus sit peculiaribus notis pro analogia exprimenda, sed sufficiant notae divisionis et aequalitatis. Unde etiam ex tali scribendi modo omnes rationum regulae statim demonstrantur. Sed ut communiter scribi solet a.b::c.d, non tantum novus character :: sine ratione introducitur, ex quo nihil duci potest nisi ad meum illum redeas, sed etiam in ambiguitatem incurritur, nam si adhibeantur numeri, ut 20.33 quales hic, simplex interpositio puncti

potius multiplicationem significat, itaque 20.30=00.10 apud me non est rationem 20 ad 30 eandem esse vel aequalem rationi 00 ad 10, sed potius factum ex 20 in 30 aequari facto ex 00 in 10. Quodsi peculiare quoddam signum multiplicationis, quale quibusdam est $\times$, hic adhibere vellem, occurreret nimis crebro, ut taceam affinitatem cum litera x. Commate autem aut parenthesi interdum evitare malo lineam superducendam aut subducendam, verb. gr. 00.11+21.30; :20 vel (00.11+21.30) :20 mihi idem est quod alias $\frac{00.11+21.30}{20}$ vel $\overline{00.11+21.30}:20$. Sed haec attuli, non ut aliis formam calculandi praescriberem, sed ut mei usus rationem redderem. Interea ipse saepe et linea superducta pro vinculo, et subducta subscriptoque nominatore pro divisione vel fractione utor, prout commoditas suadet.

Quodsi quis non tantum Canonem in exemplo repraesentari, sed etiam universaliter oculis subjici velit, huic ita satisfiet:

Sit Dividendus $+10x^e+11x^{e-1}+12x^{e-2}$ etc.

Divisor $-20x^n+21x^{n-1}+22x^{n-2}$ etc.

Provenientis

Quotiens $+30x^{e-n}+31x^{e-n-1}+32x^{e-n-2}$ etc.

Residuus

$$\frac{3(e)+3(e-1)x+3(e-2)x^2 \text{ etc. usque ad } 3(e-n+1)x^{n-1} \text{ inclusive}}{-20x^n+21x^{n-1}+22x^{n-2} \text{ etc.}}$$

ubi (e) vel (e-1) etc. significat notam ultimam coefficientis, ut si e sit 8, uti in exemplo paule ante posito, 3(e) fiat 38, et 3(e-1) fiat 37, et ita porro. Idem erit mox in 1(e) id est 18, vel 1(e-1) id est 17. Et cum n in eodem exemplo fuerit 5, utique 2(n) erit 25 et 3(e-n) erit 33. His positis prodibit coefficientium quidem in quotiente valor qui paulo ante, quoniam e indefinita eum non ingreditur; sed in residuo coefficientium valor ita proveniet: $3(e) = 00.1(e) + 2(n).3(e-n), :00$ et $3(e-1) = 00.1(e-1) + 2(n-1).3(e-n) + 2(n).3(e-n-1), :00$ et $3(e-2) = 00.1(e-2) + 2(n-2).3(e-n) + 2(n-1).3(e-n-1) + 2(n).3(e-n-2), :00$, et ita porro pergendo usque ad $3(e-n+1)$ inclusive.

Ex eo autem quod pro coefficientibus quaesiti quotientis idem se dat valor, quicunque sit gradus dividendi aut divisoris, illud egregium consequimur, ut eadem opera possimus vel finitum exhibere quotientem cum suo residuo, vel neglecto residuo et continuata divisione in infinitum quotientem invenire in formula quidem

rationali integra, sed in infinitum procurrente, id est per seriem infinitam, prorsus ut in communi calculo decimali, sed majore longe fructu pro analytico, quod serierum hic datur progressus facilis, qui non aeque in fractionibus decimalibus in promtu est; unde hic non tam appropinquationes quam veri valores, licet serie infinita expressi exhibentur.

Sed ut hoc melius obtineamus, inverso ordine incipiamus ab inferioribus terminis et ponamus Dividendum esse $10+11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc. et Divisorem esse $-20+21x+22x^2+$ etc., provenientem autem quotientem (neglecto vel dissimulato Residuo) esse $30+31x+32x^2+$ etc. Ducendo eum in divisorem fit

$$\begin{array}{llll} -20.30 & -20.31x & -20.32x^2 & -20.33x^3 \text{ etc.} \\ & +21.30 & +21.31 & +21.32 \\ & & +22.30 & +22.31 \\ & & & +23.30 \end{array}$$

quae formula coincidentianda est cum sequenti, posito 00 significare -1

$$-00.10-00.11x-00.12x^2-00.13x^3 \text{ etc.}$$

et patet eosdem qui prius pro 30, 31, 32, 33 etc. prodire valores. Hinc si poneremus 11, 12, 13, 14 etc., item 22, 23 etc. aequari nihilo, seu terminos quorum sunt coefficientes abesse, redibitur ad exemplum jam cognitum, seu 10 debet dividi per $-20+21x$, et 30 erit $00.10:20$, et $31=21.30:20$ seu $00.10.21:20^2$, et $32=21.31:20$ seu $00.10.21^2:20^3$, et $33=21.32:20$ seu $00.10.21^3:20^4$. Hinc si sit $20=-a$ et $21=1$ et $10=1$, perinde est ac si 1 dividi debeat per $a+x$, et pro 00 ponendo 1 fiet $30=+1:a$ et $31=-1:a^2$ et $32=+1:a^3$ et $34=-1:a^4$ et ita porro, seu $\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a^3}x^2-\frac{1}{a}x^3$ etc., quod aliunde quidem constabat dudum, sed adductum tamen est, ut Methodi successus appareret. Quam vero alia innumera, et quam facile ita obtineantur, patet. Illudque palmarium est, hinc consequi ut eadem ratione vel verum provenientem integrum, quoties datur, aut quotientem finitum cum residuo, si placet, vel sine residuo per seriem infinitam, si malimus, eruamus.

Si quis tamen postremo velit, valores quaesitorum 31, 32, 33 etc. non exprimi per valores quaesitorum praecedentium jam inventos (nempe 31 per 30, et 32 per 30, 31, et 33 per 30, 31, 32 etc.) sed per initio datos solos, nempe per 10, 11, 12, 13 etc. et

20, 21, 22. 23 etc. (cujus indagatio est multo implicatior, res tamen ipsa maxime absoluta), id quoque per combinandi artem consequemur hoc modo. Sit

Dividendus $+10+11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc.
Divisor $-20+21x+22x^2+23x^3+24x^4$ etc.
Proveniens Quotiens $+30+31x+32x^2+33x^3+34x^4$ etc.

erit

$-30=10:20 \qquad -31=10.21+11.20, : 20^2$

$-32=10.20.22 \; +11.20.21 \; +12.20^2$
$\quad 10 \;\; 21^2 \qquad \Big\} : 20^3$

$-33=10.20^2.23 \; +11.20^2.22+12.20^2.21+13.20^3$
$\quad (2)\; 10.20.21.22 \;\; 11.20.21^2 \qquad \Big\} : 20^4$
$\quad 10 \;\; 21^3$

$-34=10.20^3.24 \; +11.20^3.23 \; +12.20^3.22+13.20^3.21+14.20^4$
$\quad (2)\; 10.20^2.21.23 \;\; (2)\; 11.20^2.21.22 \;\; 12.20^2.21$
$\quad 10.20^2.22^2 \;\; 11. \; 21^3 \qquad \Big\} : 20^5$
$\quad (3)\; 10.20.21^2.22$

et ita porro, ea servata lege combinationis, ut in unum addantur omnia membra possibilia, quorum gradus formalis seu numerus coefficientium ab initio datorum pro membro constituendo invicem ducendorum unitate vincat gradum virtualem coefficientis quaesiti cujus valorem constituunt, et quorum gradus virtualis (summa notarum ultimarum indicatus) gradui virtuali dicti coefficientis quaesiti aequetur, sed ita ut una sola quantitas ex invicem ducendis in membro sit coefficiens dividendi, reliquae vero sint coefficientes divisoris. Sic membrum quodlibet in valore ipsius 33 constat ex quantitatibus $3+1$ invicem ductis, ex quibus una est ex dividendo, tres ex dividente, et summa notarum ultimarum ex omnibus est 3, verbi gratia 12.20 20.21 habet 12 ex dividendo, 20. 20. 21 ex divisore, et $2+0+0+1$ est 3. Notatu etiam dignum est, in uniuscujusque quaesiti, exempli gratia in ipsius 32 valore numeratorem constare ex duabus partibus, una nova, quae continet primum coefficientem dividendi (nempe $10.20.22+10.21.21$), altera formata ex numeratore qui est in valore quaesiti proxime praecedentis (veluti 31), tantum pro 10, 11, 12, 13 etc. respective ponendo 11, 12, 13, 14 etc. (ita ex ipsius numeratore in valore ipsius 31, qui est $10.21+11.20$, fit $11.21+12.20$).

Quodsi in divisore dato sit $20=0$ (vel aeque 20 et 21 sit

$=0$, vel aeque 20 et 21 et 22, et ita porro), tantum concipiendum est ac si fuisset divisor $-21+22x^2+23x^3$ etc. (vel $-22x^2+23x^3+24x^4$ etc. vel $-23x^3+24x^4+25x^5$ etc. et ita porro). Deinde proveniens idem erit qui supra, tantum pro 20, 21, 22, 23, 24 etc. respective ponendo 21, 22, 23, 24, 25 etc. (vel 22, 23, 24, 25, 26, vel 23, 24, 25, 26, 27, et ita porro) et totum deinde dividendo per x (vel per x^2, vel per x^3, et ita porro). Idque locum habet, sive valoribus ipsorum 31, 32, 33, 34 etc. utamur contractis prius positis, ubi 31 reperitur ex jam reperto 30, et 32 ex jam repertis 31 et 30, et 33 ex jam repertis 32, 31, 30, et ita porro, sive valoribus eorum utamur explicatis seu per solas initio datas quantitates 10, 11, 12 et 20, 21, 22 etc.

Ut coefficientium etiam Residui valores explicati inveniantur, commodum erit redire ad exemplum superius. Sit

Dividendus	$+10x^8+11x^7+12x^6+13x^5+14x^4+15x^3+16x^2+17x+18$
Divisor	$-20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$
Quotiens	$+30x^3+31x^2+32x+33$
Residuus	$\dfrac{+34x^4+35x^3+36x^2+37x+38}{-20x^5+22x^4+22x^3+23x^2+24x+25}$

et fient valores coefficientium Quotientis, nempe 30, 31, 32, 33 etc. eodem modo expressi ut ante, nempe -30 erit $10:20$, et -31 erit $10.21+11.20,:20^2$, et ita porro, ut proxime in alia licet hypothesi, cum iidem coefficientes infimis qui nunc summis potestatibus ascripti essent. Valores autem coefficientium in Residuo et ipsi fient iidem, perinde ac si coefficientes in Residuo essent continuati coefficientes in Quotiente, hoc uno tantum excepto, quod ubique pro 20 quod poneretur in Quotiente, ponitur in Residuo 00, id est -1. Itaque in praesenti exemplo valores sic stabunt:

$-30=10:20 \qquad -31=10.21+11.20,:20^2$

$$-32=\left.\begin{matrix}10.20.22+11.20.21+12.20^2\\ 10.21^2\end{matrix}\right\}:20^3$$

$$-33=\left.\begin{matrix}10.20^2.23+11.20^2.22+12.20^2.21+13.20^3\\ (2)\,10.20.21.22 \quad 11.20.21^2\\ 10.21^3\end{matrix}\right\}:20^4$$

$$-34=\left.\begin{matrix}10.00^3.24+11.00^3.23+12.00^3.22+13.00^3.21+14.00^4\\ (2)\,10.00^2.21.23 \quad (2)\,11.00^2.21.22 \quad 12.00^2.21^2\\ 10.00^2.22^2\\ (3)\,10.00.21^2.22\end{matrix}\right\}:20^5$$

vel pro 00 ponendo -1

$+34 = -\ 10.24 - 11.23 - 12.22 - 13.21 + 14$
$+ (2)\ 10.21.23 + (2)\ 11.21.22 + 12.21^2$
10.22^2
$- (3)\ 10.21^2.22$

et ita porro eadem lege servata explicate habebuntur —35, —36, —37, —38 vel (loco 20 ponendo 00 sive —1) +35, —36, +37, —38. Tantum adhuc opus est, ut in valoribus istis explicatis ipsorum 30, 31, 32, 33, 34 etc. pro quotiente aut residuo, aut uno verbo pro proveniente divisionis adhibitorum occurrentes Numeri veri (quos unitate excepta ut melius a fictitiis seu supposititiis assumtis distingueremus, parenthesi inclusimus, ut (2), (3) etc.) determinentur. Id cum non paulo sit prioribus difficilius, ita consecuti tamen sumus: Membrum propositum sit $f^m\ g^n\ h^r\ k^s$, per f, g, h, k intelligendo aliquos ex coefficientibus divisoris, nempe ex 21, 22, 23, 24 etc. neglectis coefficientibus dividendi, nempe 10, 11, 12 etc. quae in membro occurrunt, neglectis etiam 20 vel 00. His positis exponantur fractiones sequentes, et ex iis numerus verus praefigendus membro, si solum adsit m, erit unitas; sin adsit m et n, erit fractio prima; m et n et r, factum ex prima et secunda; si adsit m, n, r, s, factum ex fractione prima, secunda et tertia, et ita porro

$$\frac{m+1,\ m+2 \text{ etc. usque ad } m+n}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } n},$$

$$\frac{m+n+1,\ m+n+2 \text{ etc. usque ad } m+n+r}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } r},$$

$$\frac{m+n+r+1,\ m+n+r+2, \text{ etc. usque ad } m+n+r+s}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } s.}$$

In exemplum sit membrum 10.20.21.22, rejectis 10 et 20, restant 21.22, et m est 1, itemque n est 1; sed r, s etc. absunt; itaque sufficit prima fractio $\frac{m+1,\ m+2, \text{ etc. usque ad } m+n}{1.2.3 \text{ etc. usque ad } n}$, id est hoc loco $\frac{1+1}{1} = 2$. Sic si membrum sit $10.20^2.21.23$ vel $10.00^2.21.23$, rejectis 10 et 20 vel 00, restat $21^1.23^1$, et m est 1 et n est 1, et prodit quod ante, nempe 2. Sin membrum sit $10.20.21^2.22$ vel $10.00.21^2.22$, tunc rejectis rejiciendis fit $21^2.22$, et m est 2, et n est 1, et ex prima fractione (qua sola opus) fit $\frac{2+1}{1} = 3$.

Post multiplicationem et divisionem sequuntur Potentiae et Radices. Et quidem si potentias habeamus generaliter, eadem opera nanciscemur et radices; nam radix est velut potentia cujus exponens est numerus fractus. Ut autem multiplicationes coepimus a

simplicibus polynomiis velut $a+b+c$ etc. et postea perreximus ad formulas velut $a+by+cy^2$ etc., ita nunc in potentiis quoque faciemus. Cum olim considerarem, binomii $a+b$ potestates jam haberi per numeros combinatorios, cogitavi quomodo res ad trinomia, quadrinomia etc., denique generaliter ad polynomia quaecunque produci posset. Ita quadratum ab $a+b$ est $a^2+2ab+b^2$, et cubus ab eodem est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, et biquadratum est $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, et ita porro. Ita numeri prodeunt 1,1 et 1,2,1 et 1,3,3,1 et 1,4,6,4,1 etc., qui sunt numeri combinatorii Exponentis, ut constat, nam 1 est quatuor rerum nullio, 4 sunt quatuor rerum 1niones, 6 sunt quatuor rerum 2niones, 4 sunt quatuor rerum 3niones, 1 est quatuor rerum 4nio, et coincidunt cum illis numeris qui dici solent figurati. Sed incipiendum est ab Unitatibus et Naturalibus, inde pergendum ad Triangulares, Pyramidales, Bitriangulares, Pyramido-triangulares, Bipyramidales etc. Tabula rem subjicit:

	0. Unitates	1. Naturales	2. Triangulares	3. Pyramidales	4. Bitriangulares	5. Triangulo-pyramidales	6. Bipyramidales	
Nullius	1	1	1	1	1	1	1	etc.
Unius	1	2	3	4	5	6	7	etc.
Duarum	1	3	6	10	15	21	28	etc.
Trium	1	4	10	20	35	56	84	etc.
Quatuor	1	5	15	35	70	126	210	etc.
Quinque	1	6	21	56	126	252	462	etc.
Sex	1	7	28	84	210	462	924	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	
Rerum	Nulliones	Uniones	Biniones	Terniones	Quaterniones	Quiniones	Seniones	

Modus autem construendi hos numeros duplex est, unus per continuam additionem: nam ex unitatibus inde ab initio sumtis conflantur naturales, ex naturalibus triangulares, ex triangularibus pyramidales, et ita porro; alter per continuam multiplicationem, et hic cum sit a Tabula independens, a Fermatio, Pascalio et aliis jam traditus ita habet, sed quem ad unam expressionem pro omnibus ita redegi: Sit Exponens combinationis e. ita ut pro nullionibus, 1nionibus, 2nionibus, ternionibus etc. e sit respective 0, 1, 2, 3 etc., dico combinationem secundum e seu enionem fore

$$\frac{e, e-1, e-2, e-3, e-4, \text{ etc. usque ad } e-(e-1) \text{ seu usque ad } 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, \text{ etc. usque ad } e}$$

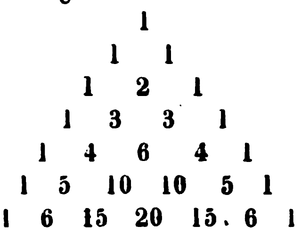
hinc per singulas eundo

$$1\text{nio} = \frac{e}{1} \qquad 2\text{nio} = \frac{e, e-1}{1.2} \qquad 3\text{nio} = \frac{e, e-1, e-2}{1.2.3} \text{ etc.}$$

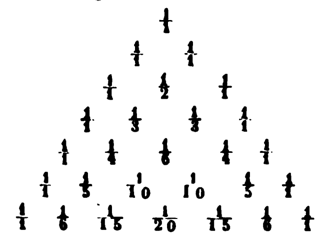
Est igitur combinatio (enio) productus numerorum inde ab e exponente combinationis descendendo, divisus per productum totidem numerorum inde ab unitate ascendendo, ita ut ascensus finiatur in e, descensus in 1, alter in principio alterius.

In his autem numeris, ut obiter dicam, ad instar Trianguli Arithmetici quod dedit Blasius Pascalius, vir ingeniosissimus, observavi Triangulum Harmonicum. Nempe ut in Triangulo Pascaliano basin dant Arithmetici, ita in meo basin dant Harmonici.

Triangulum Arithmeticum.



Triangulum Harmonicum.



Nempe ut basis in Triangulo Arithmetico sunt naturales seu numeri progressionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc., ita basis in Triangulo Harmonico sunt reciproci naturalium, qui sunt progressionis Harmonicae, scilicet $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ etc. Hi enim sunt reciproce ut naturales, verb. gr. $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{5}$ ut 5 ad 2. Et ita generaliter numeri trianguli Harmonici sunt reciproci numerorum trianguli Arithmetici. Dico, ut summam naturalium dant triangulares, et summam triangularium dant pyramidales, et ita porro, ita contra reciprocos naturalium seu harmonicos dare summam reciprocorum triangularium, et reciprocos triangularium dare summam reciprocorum pyramidalium, et ita porro:

1	1	1	1	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
2	3	4	5	6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
3	6	10	15	21	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$
4	10	20	35	56	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{56}$
5	15	35	70	126	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{126}$
6	21	56	126	252	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{252}$
Numeri	Summae	Summae Summarum	Summae Tertiae	Summae quartae	Summae quartae divis. per $\frac{5}{1}$	Summae tertiae divis. per $\frac{5}{2}$	Summae Summarum divis. per $\frac{5}{3}$	Summae divis. per $\frac{5}{4}$	Numeri

Summae tertiae
Summae Summarum
Summae
Numeri

Summae Summarum
Summae
Numeri

Summae
Numeri

Summae tertiae divis. per $\frac{4}{1}$
Summae Summarum divis. per $\frac{4}{2}$
Summae divis. per $\frac{4}{3}$
Numeri

Summae Summarum divis. per $\frac{3}{1}$
Summae divis. per $\frac{3}{2}$
Numeri

Summae divis. per $\frac{2}{1}$
Numeri

Summae autem, ut constat, exhibentur pro Numeris quidem trianguli Arithmetici hoc modo: Quaeritur summa numerorum in columna quadam inde ab initio usque ad terminum datum ultimum inclusive, numerus columnae proxime sequentis, termino dato respondens, erit summa quaesita. Ita omnes naturales ab initio ad 6 sunt 21, omnes triangulares ab initio ad 21 sunt 56, et omnes pyramidales ab 1 ad 56 sunt 126. Et ita porro. Sin summam columnae ab aliquo termino usque ad alium velis, ut in columna triangularium a 6 ad 21, sumenda est differentia inter terminum columnae sequentis ultimo summandorum respondentem et terminum ejusdem columnae sequentis primum summandorum antecedentem seu $56-4=6+10+15+21$.

At pro numeris trianguli Harmonici summandis contrariae insistendum est viae. Nam Summae columnae sequentis continentur in antecedente, et praeterea summantur in antecedente termini omnes columnae, non ab initio sumti, sed sumti a fine, id est infiniti. Illud tamen interest quod columna continet summas sequentis non simplicite, sed constanti numero multiplicatas. Nempe

columna	reciprocorum a	continet summas	reciprocorum a	divisas per
	naturalibus		triangularibus	$\frac{2}{1}$
	triangularibus		pyramidalibus	$\frac{3}{2}$
	pyramidalibus		bitriangularibus	$\frac{4}{3}$

Itaque si velis summam columnae in triangulo harmonico decrescentis in infinitum seu usque ad 0 inde ab aliquo termino, sume terminum columnae praecedentis respondentem primo termino summandorum, eumque

si sit in columna	1	2	3	4	etc.
multiplica per	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	etc.

et habebis quaesitum. Sic si velis summare columnam secundam ab 1 in infinitum, erit terminus primus 1, cui in columna praecedente respondet 1, qui multiplicatus per $\frac{2}{1}$ dat $\frac{2}{1}$ summam quaesitam. Itaque

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \text{ etc. infinitum} = \frac{1}{0} \text{ infinito}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} \text{ etc.} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}$$

etc.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}\text{ etc.} = \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}\text{ etc.} \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}\text{ etc.} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}$$
etc.
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}\text{ etc.} = \frac{1}{1}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}\text{ etc.} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}$$
$$\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}\text{ etc.} = \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{3}$$
etc.

Eademque opera apparet, quomodo definitus numerus terminorum columnae trianguli Harmonici (excepta semper prima) summetur. Exempli causa quaeritur summa 100 fractionum seu Reciprocorum triangularium ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{4950}$. Sumatur in columna antecedente nempe reciprocorum naturalium, terminus (hoc loco $\frac{1}{1}$) respondens primo summandorum; sumatur et in eadem columna antecedente terminus proxime sequentium qui respondet ultimo sumandorum hoc loco $\frac{1}{4950}$, qui est $\frac{1}{101}$, et $\frac{1}{1}-\frac{1}{101}$ multiplicata per $\frac{2}{1}$ seu $\frac{200}{101}$ erit exacte summa omnium fractionum $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+$ etc. usque ad $\frac{1}{4950}$ inclusive. Haec in Gallia olim reperta per occasionem adjicere visum est.

Sed ad potestates Polynomiorum formandas redeamus, quae scilicet indigent Numeris combinatoriis, ut mox patebit. Constant autem semper ex formis ejusdem gradus, quibus numeri ex combinatoriis multiplicando formati praefiguntur. Formam voco hoc loco summam omnium membrorum ex aliquot literis similiter formatorum. Ita $a+b+c$ etc. est forma primi gradus; at formae secundi gradus sunt $a^2+b^2+c^2$ etc. et $ab+ac+bc$ etc., et formae tertii gradus sunt $a^3+b^3+c^3$ etc. et $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$ etc. et $abc+abd+bcd$ etc. Compendio autem, ut jam monui, sic designo, ut a mihi significet a vel $a+b$ vel $a+b+c$ vel etc., et $\underset{..}{a^2}$ significet a^2 vel a^2+b^2 vel $a^2+b^2+c^2$ vel etc., et $\underset{..}{ab}$ significet vel ab vel $ab+ac+bc$ vel $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ vel etc., et $\underset{..}{a^3}$ erit a^3 vel a^3+b^3 vel $a^3+b^3+c^3$ vel etc., et $\underset{.\,.}{a^2b}$ erit a^2b+ab^2 vel $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2$ vel $a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+a^2d+ad^2+b^2c+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2$ vel etc., et $\underset{..}{abc}=abc$ vel $abc+abd+bcd$ vel etc., itaque

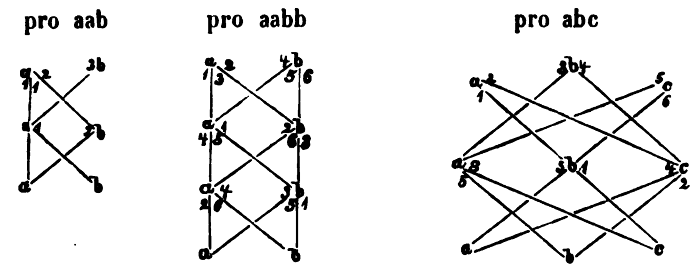
$$a+b+b\text{ etc.} = \underset{..}{a}$$
$$\text{et quadratum ab } a+b+c\text{ etc.} = \underset{..}{a^2}+2\underset{..}{ab}$$
$$\text{cubus} = \underset{..}{a^3}+3\underset{..}{a^2b}+6\underset{..}{abc}$$
$$\text{biquadratum} = \underset{..}{a^4}+4\underset{..}{a^3b}+6\underset{..}{a^2b^2}+12\underset{..}{a^2bc}+24\underset{..}{abcd}$$

Ut jam investigemus numeros coefficientes formis praescriptos, consideremus tot modis prodire quodvis formae membrum in potestate, quot transpositiones literarum in eo membro dari possunt; ita in cubo ab $a+b$ formae a^2b+ab^2 membrum, ut a^2b, prodit ter, quia tres ejus transpositiones seu conflationes; sic in biquadrato ipsius a^2b^2 formationes sunt sex, et in cubo de $a+b+c$ ipsius abc transpositiones sunt sex

1	aab	1	aabb	1	abc
2	aba	2	abab	2	acb
3	baa	3	abba	3	bac
		4	baab	4	bca
		5	baba	5	cab
		6	bbaa	6	cba

Id lineis ductis numeros eosdem ascriptos habentibus sic apparebit:

pro aab pro aabb pro abc



Quot vero sint transpositiones literarum Formae, nondum quod sciam determinatum extat, cum tamen inter primaria sit problemata Combinatoriae Artis. Id aliquando cum potestatibus polynomiorum aliisque hujusmodi in navi per otium sum consecutus. Multo post Cl. Joh Bernoullius me admonente hanc eandem quam nunc dabo regulam, etsi paulo aliter expressam invenit. Igitur in exemplum, quod sit regulae intelligendae sufficiens, esto forma $a^5b^4c^3d^3e^2f^1g^1$, quaeritur quot modis ejus elementa transponi possint. Est autem gradus $5+4+3+3+2+1+1$ seu decimi noni. Dico numerum transpositionum esse proditurum, si multiplicentur invicem continue numeri Combinatorii (supra expositi) qui designant quot sint 19 rerum 4niones, 19—4 rerum 3niones, 19—4—3 rerum 3niones, 19—4—3—3 rerum 2niones, 19—4—3—3—2 rerum 1niones, 19—4—3—3—2—1 rerum 1niones. Quod etiam per productos continuorum sic poterit enuntiari, ut Numerus Transpositionum formae $a^5b^4c^3d^3e^2f^1g^1$ sit

$$\frac{19,19-1,19-2,19-3,,19-4,19-4-1,19-4-2,,}{1.2.3.4\quad,,\quad 1.2.3}$$

$$\frac{19-4-3,19-4-3-1,19-4-3-2\ ,,\ 19-4-3-3,19-4-3-3-1,}{1.2.3\quad,\quad 1.2}$$

$$\frac{19-4-3-3-2\ ,\ 19-4-3-3-2-1}{1\ .\ 1}.$$ Ita a^2b^2 habebit transpositiones $\frac{4,4-1\ ,,4-2,4-2-1}{1.2\qquad 1.2} = \frac{4.3\ ,2.1}{1.2,1.2} = 6.$

Porro omnis Numerus Transpositionum Formae, quem et Productum combinatoriorum appellare possis, cum alias habet proprietates memorabiles, tum hanc imprimis egregiam, ut ipse et exponens gradus, ad quem forma assurgit, non possint esse primi inter se. Unde sequitur, si exponens gradus sit numerus primitivus, necesse esse ut dividat numerum transpositionum formae in gradu, ubi tamen intelligo transpositionem quae varietatem pariat, qualis non est forma cujus elementa coincidunt ut a^2, a^3. Unde in his numerus situum non est nisi unitas. Hinc porro consequitur, ut si nomina sint numeri rationales, potestas polynomii post detractam formam invariabilem ejusdem gradus residuum relinquat, ita comparatum, ut ipsum et exponens gradus non possint esse primi inter se: et ideo cum exponens est primitivus, necessario residuum divisibile sit per exponentem. Nempe si e, item a, b, c etc., sint numeri integri et $x = a + b + c +$ etc., tunc $x^e - \underset{\cdot\cdot}{a}^e$ et e nunquam sunt primi inter se, et ideo si e sit primitivus, erit $x^e - \underset{\cdot\cdot}{a}^e$ divisibilis per e. Supra autem exposui, per $\underset{\cdot\cdot}{a}^e$ me intelligere $a^e + b^e + c^e +$ etc. seu summam ex potestatibus omnium partium ipsi x assignatarum.

Quodsi a, b, c, sint unitates erit $a^e = a = 1$ et $\underset{\cdot\cdot}{a}^e = \underset{\cdot\cdot}{a} = x$, ergo $x^e - x$ et e nunquam sint primi inter se, et proinde si numerus e sit primitivus, erit $x^e - x$ divisibilis per e. Quae Numeri Primitivi proprietas Reciproca esse reperitur, ut si e non sit primitivus, etiam $x^e - x$ per e dividi non possit, sed tantum habeant aliam communem mensuram.

Hinc tandem duci potest aliquid hactenus Analyticis incognitum, aequatio nempe generalis pro Numero primitivo, nempe quoties et solum quoties haec aequatio datur in integris $n^y - n = fy$ vel (si n non sit divisibilis per y) $n^{y-1} - 1 = gy$, tunc numerus y est primitivus. Et pro n substitui potest numerus integer quicunque atque adeo totidem proprietates reciprocae numeri primitivi habentur. Cumque ex numeris simplicissimus omnium (post uni-

tatem cujus potestates non sunt hujus loci) sit 2, ideo simplicissima pro primitivo aequatio erit $2^y - 2 = fy$ vel $2^{y-1} - 1 = gy$. Hinc cum aequatio ista sit transcendens, nullius scilicet certi gradus quando quidem ipsa quantitas y quae exponentem ingreditur, indeterminata est; hinc mirum non est, neminem prius dedisse aequationem generalem exprimentem naturam numeri primitivi: nam nos ipsi primum hoc aequationum transcendentium genus in Analysin introduximus, mentione ejus facta cum nostram Magnitudinis Circuli expressionem per simplicissimam seriem in Actis Eruditorum Lipsiensibus ederemus, cujus deinde magnum in Geometria interiore usum ostendimus ad aequationes complurium Linearum ex Geometria non bene exclusarum Locales exhibendas et tangentes earum aliasque proprietates Calculo quem exponentialem appellavi, non minus commode inveniendas, quam si Algebraicae, id est certi gradus essent.

Obiter etiam notare operae pretium est, si n sit 10 et y primitivus nec sit 2 nec 5, adeoque non dividat 10, tunc cum locum habeat aequatio supradicta $10^{y-1} - 1 = gy$, consequens esse, ut 99999 etc. tam diu continuando, donec numerus ipsorum 9 sit $y - 1$, quoties et solum quoties y est primitivus, succedat divisio. Hoc interim non prohibet minorem numerum 999 etc. per y dividi posse, ut si y sit 13, potest numerus 999999 dividi per 13; unde consequens est, etiam constantem ex 9 duodecies repetito posse dividi per 13, ut debet. Multa etiam ex his circa numeros perfectos et partes aliquotas colliguntur, quae persequi non est hujus loci.

Hactenus data est potestas polynomii simplicis, ut $a + b$ vel $a + b + c$ vel $a + b + c + d$, et ita porro. Progrediamur jam ad polynomium affectum potentiis alicujus quantitatis, ut $a + bx$ vel $a + bx + cx^2$ vel $a + bx + cx^2 + dx^3$ etc. id est ad Formulam rationaliter integre formatam ex x, nempe ad hanc quantitatem primariam, assumtis secundariis coefficientibus a, b etc. Unde si sit $y = a + bx + cx^2$ etc., soleo dicere y dari ex x relatione rationali integra, ubi tamen saepe non refert utrum ipsae quantitates secundariae (quae, cum x variatur, constantes intelliguntur) numeris integris, an fractis vel etiam surdis sint aliquando exprimendae. Manifestum autem, potestatem affecti polynomii a potestate simplicis non differre, nisi quod quantitas secundaria semper ducta intelligitur in potentiam ipsius x, quam afficit. Verbi gratia cum quadratum ipsius $a + b + c$

fuerit $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, manifestum est ipsius $a+bx+cx^2$ quadratum fore $a^2+b^2x^2+c^2x^4+2abx+2acx^2+2bcx^3$, eadem ergo membra et praefixos membris numeros manere, tantum si secundum x ordinanda sit producta potestas, divelli a se invicem quae antea in eadem forma cohaerebant, cum x abesse vel unitati aequalis intelligeretur. Ita ex quadrato ordinato secundum x fiet

$$a^2+2abx+2acx^2$$
$$b^2x^2+2bcx^3+c^2x^4.$$

Sed quo promtius appareat ordinatio, redibimus ad numeros pro literis, faciemusque

$$y = 10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5+16x^6,$$

fiet $y^2 =$	10^2	$+2.10.11x$	$+2.10.12x^2$	$+2.10.13x^3$	$+2.10.14x^4$	$+2.10.15x^5$	$+2.10.16x^6$
			$+1.11.11$	$2.11.12$	$2.11.13$	$2.11.14$	$2.11.15$
					1.12^2	$2.12.13$	$2.12.14$
							1.13^2

$y^3 =$	10^3	$+3.10^2.11x$	$+3.10^2.12x^2$	$+3.10^2.13x^3$	$+3.10^2.14x^4$	$+3.10^2.15x^5$	$+3.10^2.16x^6$
			$3.10.11^2$	$6.10.11.12$	$6.10.11.13$	$6.10.11.14$	$6.10.11.15$
						$6.10.12.13$	
				1.11^3	$3.11^2.12$	$3.11^2.13$	$6.10.12.14$
						$3.11.12^2$	$3.10.13^2$
							$3.11^2.14$
							$6.11.12.13$
							1.12^3

ubi apparet progressus ad potestates altiores aperta lege combinationis, quae haec est, ut in valore ipsius y (polynomii affecti seu formulae) membrum quodlibet coefficiens habeat gradum formalem aequalem gradui potestatis ab y et gradum virtualem aequalem gradui potestatis ab x ad quam refertur, numeri autem veri praefixi sint numeri transpositionum quem recipiunt elementa membri. Exempli causa in y^3 membra sunt 10^3, $10^2.11$, $10^2.12$, 10.11^2 etc., quae omnia habent gradum formalem 3tium, quia constant ex quantitatibus tribus 10.10.10, vel 10.10.11 etc., Sed quia gradus virtualis fit ex summa notarum ultimarum quas habent Numeri assumtitii, hinc in $10.10.10x^0$ gradus virtualis est $0+0+0=0$, in $10.10.11x^1$ est $0+0+1=1$, in

$10.10.12x^2$ est $0+0+2=2$, in $10.11.11x^2$ est $0+1+1=2$, in $10.10.13x^3$ est $0+0+3=3$, in $10.11.12x^3$ est $0+1+2=3$, et ita porro. Numeri autem praefixi sunt paulo ante explicati, nempe ipse $10^2.11$ vel 10.11^2 praefigitur 3, ut supra formae a^2b, et ipsi $10.11.12$ vel $10.12.13$ vel $11.12.13$ praefigitur 6, ut supra formae abc.

Sed ecce Theorema Generale pro potestate quacunque, nempe posito

$$y=10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5 \text{ etc.}$$

$$\text{et } y^e=20+21x+22x^2+23x^3+24x^4+25x^5 \text{ etc.}$$

$$\text{erit } 20=10^e \text{ et } 21=e.10^{e-1}.11 \text{ et } 22=e.10^{e-1}.12+\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.11^2$$

$$\text{et } 23=e.10^{e-1}.13+e,e-1,10^{e-2}.11.12+\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}10^{e-3}.11^3$$

$$\text{et } 24=e.10^{e-1}.14+e,e-1,10^{e-2}.11.13+\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.12^2$$

$$+\frac{e,e-1}{1.2},e-2,10^{e-3}.11^2.12+\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}10^{e-4}.11^4$$

et ita porro, ubi membrorum quidem combinatoria formatio ea est quam paulo ante exposuimus ita ut membri gradus quidem formalis semper sit e, gradus vero virtualis ipsius in valore ipsorum 20, 21, 22 etc. sit respective 0, 1, 2 etc. Sic $10^{e-3}11^2.12^1$ habet gradum formalem $e-3+2+1=e$, gradum virtualem $0(e-3)+1.2+2.1=4$, nam reperitur in valore ipsius 24. Numeri autem praefixi sunt numeri transpositionum, quas membri elementa recipiunt, seu producti combinatoriorum, sed generaliter expressi. Ex. gr. $10^{e-3}11^2.12^1$ habet gradum formalem e, itaque praefigendus fit, si invicem ducantur e rerum 2niones $\left(\frac{e,e-1}{1.2}\right)$ et e—2 rerum 1niones $\left(\frac{e-2}{1}\right)$ secundum regulam supra explicatam.

Quodsi in valore ipsius y, nempe $10+11x+12x^2+13x^3$ etc. esset $10=0$, nihilominus quidem formula haec generalis nostra pro valore ipsius y^e locum haberet: etsi enim 10 fiat 0, non tamen omnes quantitates per potestates ipsius multiplicatae evanescent, quanquam ita prima fronte videatur, nam supersunt ii, in quibus exponens ipsius 10 fit 0, quoniam 0^0 non est 0, sed 1. Quoniam tamen maxima saltem pars evanescit, praestat nullam mentionem fieri ipsius 10; itaque ex valore praescripto generali ipsius y^e fiet

alius pro 10, 11, 12, 13 etc. substituendo respective 11, 12, 13, 14 etc. et deinde totum multiplicando per x^e, fietque valor ipsius y^e is qui esse debet si sit $y=11x+12x^2+13x^3+14x^4$ etc. Quodsi absint simul 10 et 11 (vel 10 et 11 et 12, et ita porro), eo casu in valore ipsius y^e praescripto pro $10+11x+12x^2+13x^3$ etc. loco 10, 11, 12, 13 etc. substituantur respective 12, 13, 14, 15 etc. (vel 13, 14, 15, 16 etc.) et totum multiplicetur per x^{2e} (vel x^{3e}), habebiturque valor ipsius y^e posito y esse $12x^2+13x^3+14x^4$ etc. (vel y esse $13x^3+14x^4+15x^5$ etc. aut ita porro).

Tradita jam ratione excitandi potestates ex formula, superest ut contra ex formula radices extrahamus. Sunt autem radices duplices, purae aut affectae. Purae dicuntur, cum valor potestatis datur absolute et pure, unde ex valore radicis, extrahendo radicem puram habetur latus potestatis seu quantitas. Veluti si valor ipsius yy detur per meras cognitas seu per formulam $10+11x+12x^2$ etc., habebitur y extrahendo ex formula radicem quadraticam. Sed si plures ipsius y potestates simul concurrant in aequatione ut si sit $y^2+gy=ah$, posito a, g, h significare formulas per x, tunc valorem ipsius y invenire est extrahere radicem affectam, seu extrahere radicem non ex quantitate aliqua cognita (quanquam res interdum eo reducatur) sed ex aequatione. Incipiemus a radicibus puris tanquam facilioribus.

Hic vero illud praeclare evenit, ut methodus extrahendi radicem ex formula, in methodo generali excitandi potestatem formulae jam contineatur. Nam si quidem e sit numerus integer, erit y^e id quod vulgo vocant potestatem, nempe unitas, latus, quadratum, cubus, biquadratum etc. prout e est 0 vel 1 vel 2 vel 3 vel 4 etc. Sed si e sit fractus, y^e est radix ex x, veluti si sit $e=\frac{1}{m}$, erit $y^e=\sqrt[m]{y}$. Itaque in theoremate nostro potestatum continentur etiam radices, cum e est fractus, cujus numerator est 1, denominator vero numerus integer. Quin et si numerus e sit, ut ita dicam, semifractus, id est cujus tam numerator quam denominator sit integer major unitate, quo casu y^e idem valet quod $y^{n:m}$, quae est potentia radicum seu $|\underline{n}|\sqrt[m]{y}$ vel radix potentiarum $\sqrt[m]{y^n}$, nihilominus locum habebit theorema. In exemplo simplicissimo ponamus $e=\frac{1}{2}$ seu $y^e=\sqrt[2]{y}$; si jam sit $y=10+11x+12x^2+13x^3$ etc. et $\sqrt[2]{y}=20+21x+22x^2+23x^3$ etc. ponaturque facilitatis causa, quod semper effici potest, ut 10 sit 1, fiet $20=10$ et $21=\frac{1}{2}\,..\,\frac{11}{\sqrt{10}}$

et $22 = \frac{1}{2} . \frac{12}{\sqrt{10}} - \frac{1}{4,1.2} \frac{11^2}{10\sqrt{10}}$ et $23 = \frac{1}{2} . \frac{13}{\sqrt{10}} - \frac{1}{4} . \frac{11.12}{10\sqrt{10}}$ $+ \frac{1.3}{8,1.2.3} . \frac{11^3}{10^2\sqrt{10}}$. Et ita porro 24, 25 etc. habebuntur.

Possunt vel ex hoc solo Theoremate extractionis Radicis Quadraticae per seriem infinitam nullo negotio inveniri dimensiones arearum Circuli, Ellipseos, Hyperbolae, et arcuum quoque, per seriem scilicet infinitam. Sit exempli causa Circuli radius 1, sinus x, sinus complementi y, erit $y = \sqrt{(1-xx)}$. Fit $10 = 1$ et $11 = 0$ et $12 = -1$ et 13 vel 14 vel 15 etc. $= 0$. Sit $y = 20 + 21x + 22x^2 + 23x^3$ etc., fiet $20 = 1$ et $21 = 0$ et $22 = -\frac{1}{2}$ et $23 = 0$ et $24 = -\frac{1}{4,1.2}$ et $25 = 0$ et $26 = \frac{1.3}{8,1.2.3}$ et $27 = 0$ et $28 = -\frac{1.3.5}{16,1.2.3.4}$. Atque adeo tandem erit

$$y = \sqrt{(1-xx)} = 1 - \frac{1}{2,1}x^2 - \frac{1}{4,1.2}x^4 - \frac{1.3}{8,1.2.3}x^6 - \frac{1.3.5}{16,1.2.3.4}x^8 - \frac{1.3.5.7}{32,1.2.3.4.5}x^{10} - \frac{1.3.5.7.9}{64,1.2.3.4.5.6}x^{12} \text{ etc.}$$

$$\text{et } \int y dx = x - \frac{1}{2,1,3}x^3 - \frac{1}{4,1.2,5}x^5 - \frac{1.3}{8,1.2.3,7}x^7 - \frac{1.3.5}{16,1.2.3.4,9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{32,1.2.3.4.5,11}x^{10} \text{ etc.}$$

quae est area zonae circularis, quam ductus radio parallelus sinus complementi abscindit, quaeque adeo praeter radium et sinum complementi etiam sinu recto et arcu continetur. Sed arcus ipse erit

$$x + \frac{1}{2,1,3}x^3 + \frac{1.3}{4,1.2,5}x^5 + \frac{1.3.5}{8,1.2.3,7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{16,1.2.3.4,9}x^9 \text{ etc.}$$

Operae pretium etiam est, Canonem generalem Polynomii affecti contrahere ad Canonem generalem Polynomii simplicis, ponendo $x = 1$, perinde ac si fuisset $y = 10 + 11 + 12 + 13$ etc. Sed ita pro membro simplice Canonis polynomii affecti ponenda est forma integra in Canone Polynomii simplicis, quoniam enim x abest, non amplius divelli necesse est a se invicem membra ejusdem formae. Exempli causa in Canone Polynomii affecti non possunt in unum conjungi $10^{e-1}12$ et $10^{e-1}13$ et $11^{e-1}12$, quoniam cum x primum dat $10^{e-1}12x^2$, secundum $10^{e-1}13x^3$, tertium $11^{e-1}12x^e$, quod postremum in Canone polynomii affecti non occurrit nisi latenter: nisi malius adjicere illi jam tum eas formulas, quas in

casu 10, vel 10 et 11, vel 10 et 11 et 12 simul evanescentium substituendas tantum praescripsimus, quod utique sano sensu permissum est. Sed in Canone polynomii simplicis statim possunt conjungi membra omnia, ut adeo quodammodo in speciem magis sit compositus Canone affecti. Sed operae pretium erit utriusque Canonis initia comparare inter se, aspectui subjiciendo.

Sit $y=10+11x+12x^2+13x^3+14x^4+15x^5$ etc.

$$y^e=10^e+e.10^{e-1}.11x+e.10^{e-1}.12x^2 \quad +e.10^{e-1}.13x^3 \quad +e.10^{e-1}14x^4 \text{ etc.}$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}11^2\ldots \quad e,e-1,10^{e-1}.11.12.. \quad e.e-1,10^{e-2}11.13..$$

$$\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}10^{e-3}11^3.. \quad \frac{e,e-1}{1.2}10^{e-2}.12^e..$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}.e-1,10^{e-3}11^2.12..$$

$$\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4}10^{e-4}.11^4..$$

Sit $y=10+11+12+13+14+15$ etc., poterimus tantum in proximo valore ipsius y^e omittere x cum suis potentiis tanquam posito x vel x^2 vel x^3 etc. esse 1 et cuivis membra subscribere.. vel etc., exempli causa pro $e.10^{e-1}.11x$ scribendo $e.10^{e-1}.11$, vel $e.10^{e-1}.11$, omittendo in sequentibus quae jam in forma semel posita continentur; itaque valor polynomii ita stabit

$$y^e = 10^e+\underset{\text{etc.}}{e.10^{e-1}.11}+\frac{e,e-1}{1.2}\underset{\text{etc.}}{10^{e-2}.11^2}+\underset{\text{etc.}}{e,e-1,10^{e-2}.11.12}$$

$$+\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}\underset{\text{etc.}}{10^{e-3}.11^3}+\frac{e,e-1}{1.2}.e-1,10^{e-3}.11^2.12+e,e-1,e-2,10^{e-3}.11.12.13$$

et ita porro; vel quia non amplius indigemus numeris fictitiis ad polynomium simplex, quando cessantibas potentiis ipsius x, cessant potentiae virtuales ad eas relatae, ideo faciendo

$y = l + m + n + p +$ etc., fiet

$$y^e = l^e + e\,l^{e-1}m$$

$$\frac{e,e-1}{1.2} l^{e-2}m^2 + e\,,\,e-1\; l^{e-2}mn$$

$$\frac{e,e-1,e-2}{1.2.3} l^{e-3}m^3 \quad \frac{e,e-1}{1.2}\,,\,e-2\,l^{e-3}m^2n + e,e-1,e-2\,l^{e-3}mnp$$

$$\frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4} l^{e-4}m^4 \quad \frac{e,e-1,e-2}{1.2.3}\,,\,e-3\,l^{e-4}m^3n \quad \frac{e,e-1}{1.2}.e-2,e-2-1\,l^{e-4}m^2np + e,e-1,e-2,e-3\,l^{e-4}mnpq$$

$$\frac{e,e-1}{1.2}\,,\,\frac{e-2,e-3}{1.2} l^{e-4}m^2n^2$$

Unde si quaeratur speciatim potestas binomii seu si sit $y = l + m$, canon pro potestate quacunque erit

$$y^e = l^e + \frac{e}{1} l^{e-1}.m + \frac{e,e-1}{1.2} l^{e-2}m^2 + \frac{e,e-1,e-2}{1.2.3} l^{e-3}m^3 + \frac{e,e-1,e-2,e-3}{1.2.3.4} l^{e-4}m^4 + \text{etc.}$$

quod sufficiebat ad valorem quantitatis $\sqrt{(1-xx)}$ ejusque summatricis seu areae circularis (posito $e = \frac{1}{2}$) vel etiam arcus circuli (posito $e = -\frac{1}{2}$) per seriem infinitam, ita ut supra, exhibendum.

Dignissimum etiam consideratu est, quomodo series (quae generaliter sumta infinita vel potius indefinita est) finiat se ipsam, quando communi modo succedit extractio. Ut si sit $y = a^2 + 2abx + b^2x^2$, fiet $10 = a^2$ et $11 = 2ab$ et $12 = b^2$, et radix quadratica de $a^2 + 2abx + b^2x^2$ seu $y^{1:2}$ vel $\sqrt[2]{y}$ dabit $\pm a \pm bx$ et termini altiores x^3. x^4 etc. evanescent. Nam quia $e = \frac{1}{2}$, ideo coefficiens ipsius x erit $+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{aa}}.bb - \frac{1}{4}.\frac{1}{1.2} \frac{1}{aa\sqrt{aa}} 4aabb = 0$ et coefficiens ipsius x^3 erit $- \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{aa}}.2ab.bb + \frac{1}{8}.\frac{1.3}{1.2.3} \frac{1}{a^4\sqrt{aa}} 8a^3b^3 = 0$, similisque destructio in altioribus deprehendetur. Ita simul et quantitatem ordinariam habebimus si datur, et extraordinariam (per seriem infinitam) si ordinaria non datur.

Atque ita absoluta est excitatio potestatum pariter ac purarum radicum extractio. Nunc pergendum est ad illud quod in Algebra olim difficillimum habitum est, extractionem radicum ex aequationibus, quas et vocare solemus Radices affectas. Constat Vietam excogitasse modum radices extrahendi ex aequationibus numerice datis saltem per appropinquationem, sed perplexis admodum praeceptis. At per series nostras infinitas semper valor radicis habetur, etiamsi aequatio sit literalis. Aequatio generalis data cujus incognita est z sit: $0=10y-11z+12z^2+13z^3+14z^4+15z^5$ etc., quaeritur valor ipsius $z=21y+22y^2+23y^3+24y^4$ etc. Ne diutius teneam, reperietur esse $21=10:11$ et $22=12.21^2:11$ et $23=2.12.21.22+13.21^3,:11$ et $24=12.22^2+2.12.21.23+3.13.21^2.22+14.21^4,:11$ et ita porro hac lege combinationis, ut in quovis valore quaesitarum 21, 22, 23 etc. denominator sit 11, numerator vero sit summa omnium membrorum possibilium quae formantur ex una quantitate ab initio data (quales sunt 01, 10, 11, 12 etc.) et reliquis jam inventis (21, 22, 23 etc.) ita ut gradus virtualis facti ex combinatione jam inventarum membrum ingredientium sit idem qui gradus virtualis quantitatis cujus valorem ingreditur membrum, et gradus formalis ejusdem combinationis (nempe jam inventarum) sit idem qui gradus virtualis quantitatis ab initio datae in membro. Numeri autem veri praefigendi cuivis membro erunt numeri transpositionum, quas recipiunt quantitates jam inventae in dicta combinatione. Exempli causa in valore ipsius 24 membrum ut $13.21^2.22$ habet unam ab initio datam quantitatem 13, et reliquarum jam inventarum combinatio est 21.21.22, cujus gradus virtualis est $1+1+2=4$ (summa notarum posteriorum) idem qui quantitatis quaesitae 24; sed ejusdem combinationis gradus formalis est 3 (sunt enim tres quantitates invicem ductae) idem cum gradu virtuali ipsius 13.

Hujus Theorematis maximus usus est non tantum ad extractiones radicum ex aequationibus finitis, sed etiam ex infinitis, cum valor quantitatis ut y datur per aliam x ope formulae rationalis integrae infinitae seu per infinitam seriem, quaeriturque vicissim valor ipsius x ex ipsa y. Exempli causa Numeri dati $1+x$ logarithmus (qui sit y) potest intelligi $\frac{1}{1}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$ etc. ut Nicolaus Mercator primus in Logarithmotechnia sua demonstravit, quaeritur vicissim dato logarithmo y quis sit numerus $1+x$. In canone nostro z 01 11 12 13 14 15 etc.

erunt x -1 -1 $-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{4}$ $+\frac{1}{5}$ etc.

Si ergo $x = 21y + 22y^2 + 23y^3 + 24y^4 + \text{etc.}$, fiet $21 = 1$, $22 = \frac{1}{1.2}$, $23 = \frac{1}{1.2.3}$, $24 = \frac{1}{1.2.3.4}$, et ita porro. Ac proinde dato logarithmo y, numerus $1+x$ erit $1 + \frac{1}{1}y + \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 + \frac{1}{1.2.3.4}y^4 \text{etc.}$, quod alia quidem via non una olim facilius deprehendi, quanquam jam ante me a Newtono et Jacobo Gregorio aliisque observatum, sed tamen hinc quoque ut patet derivatur. Et hanc viam insistendo, unde tam elegans eventus minus expectetur, eo ipso pulchra theoremata sese offerunt, dum scilicet multitudo illa quantitatum, etsi finitarum, valde tamen in progressu crescentium, semper summam tam simplicem praebet. Alia via cujus ope ex Numero Logarithmus, ex sinu vel sinu complementi aut tangente aliave functione arcus circuli, et vicissim ex Logarithmo Numerus, ex arcu sinus aut sinus complementi aut tangens aliave functio per seriem infinitam a me inventa est, ducta ex aequationibus differentialibus, jam a me exposita est olim in Actis Eruditorum Lipsiensibus; cujus usus etiam ad alia est maximus, cum per eam constructio habeatur aliqua lineae transcendente non tantum per rectarum tangentium aut circulorum osculantium, sed etiam differentialium altiorum proprietates datae.

XVI.

DE CONDENDIS TABULIS ALGEBRAICIS, ET DE LEGE DIVISIONUM.*)

Tabulas Algebraicas condendas saepe cogitavi, quemadmodum Arithmeticas habemus; sed Algebraicae debent esse generales, quarum duplex erit usus, unus ut quousque porrigitur Tabula non amplius calculo prolixo sit opus in exemplis specialibus, sed sim-

*) Leibniz hat bemerkt: 5. Januar. 1694.

plici substitutione; alter ut detegatur lex progrediendi. Porro Additionum et Subtractionum Tabulas condere non admodum refert, nam ubi addenda concordant inter se, res redit ad additiones unitatum prodeuntque Numeri ex Arithmetica communi. Ubi vero addenda non concordant, nihil aliud fieri potest, quam ut juxta se invicem scribantur, velut a+b. Idemque est dicendum de subtractione. Sed in multiplicatione, etsi nihil commune habeant termini dati, tamen novi prodeunt termini quaesiti, nempe datorum producti dimensionum altiorum; ut si a+b ducas in l+m, prodit al+am +bl+bm. Nihil aliud ergo erit multiplicationum generalissimarum tabula, quam repraesentatio combinationum cujuslibet termini unius aggregati vel formulae cum quolibet termino alterius formulae; itaque si aggregata fiant ex solis quantitatibus simplicibus sibi additis (quod est simplicissimum et generalissimum, quia talis quantitas simplex vel litera pro quacunque alia utcunque composita supponere potest), erit multiplicatio duorum aggregatorum ex simplicibus inter se invicem, aggregatum binionum ex omnibus literis datis, demtis binionibus literarum ejusdem aggregati; et multiplicatio trium aggregatorum ex simplicibus inter se invicem erit aggregatum ternionum ex omnibus literis datis, demtis ternionibus continentibus duas ejusdem aggregati literas. Et generaliter Multiplicatio in se invicem quotcunque aggregatorum seu formularum simplicibus seu literis sumtis velut inter se diversis, erit aggregatum combinationum exponentis ejusdem cum numero formularum seu Multiplicantium, demtis combinationibus continentibus plures literas ejusdem formulae. Ceterum si coincidant quaedam literae, ut cum diversae formulae invicem coincidunt inter se ex toto vel parte, excitanturque potentiae, vel aliae formulae regulares vel quantitates figurae; tunc ex hac regula diversorum generali ducitur regula consentientium. Semper enim in Characteristicis casus identitatis in generali regula diversitatis continetur. Sic nihil prohibet, ut exemplo utar, pro 2a seu pro a+a intelligi a+b, ubi b supponit pro a. Jam a+b reducitur ad regulam generalem. Hinc igitur potentias tam aequales, ut quadratos, cubos etc., quam et pronicas, velut Triangula, Pyramides, aliasque id genus formulas licebit excitare, et legem earum derivare ex regula generali. Licebit et nostram exponere Tabulam Formularum,*) et varia inde

*) Ueber ormularum hat Leibniz geschrieben: Formarum.

resultantia Theoremata perelegantia, quorum ex potissimis est regula mea generalis pro Excitatione Potestatum ex Polynomiis, et regulae prodeuntes, si adhibeas a, aa, a^3, a^4 etc. item ab, abc, abcd etc. vel literas pro ipsis assumtas. Sed specialiter utiles sunt Tabulae, ubi eadem servatur litera ut x ejusque potentiae in terminis omnibus occurrunt, ceterae vero sunt hujus coefficientes. Aptissima enim et compendiosissima ratio numeros exprimendi fit per Terminos ejusdem radicis in progressione Geometrica sumtos eorumque coefficientes. Hic ergo speciatim multiplicationes, ut et alias operationes peragere convenit; et operationes communis Arithmeticae sunt tantum casus speciales unius methodi generalis. Et quidem plures formulas ad eandem literam ordinatas simplicium coefficientium invicem multiplicando Tabulam perutilem dabit. De divisione aliisque operationibusque mox dicam.

Ceterum ut hae operationes procedant melius, Tabulaeque sint magis ordinatae et ad progressionum Leges detegendas aptae, consideravi Vulgarem Speciosam hoc defectu laborare, quod literas assumit indistinctim iisque utitur, et proventus calculi considerat, ipsarum autem literarum originarias quasdam in calculo suppositas relationes non exprimit, sed tantum subintelligendas relinquit. Unde fit, ut quia characteres datorum non exprimunt omnes datorum inter se relationes, etiam in proventu calculi ex datis ducti pulcherrimae in rei natura persaepe latentes harmoniae non facile animadvertantur. Exemplum esto: Sint duae aequationes in se invicem ducendae $x^3+ax^2+bx+c=0$ et $x^2+dx+e=0$, prodit

$$\begin{array}{l} x^5+ax^4+bx^3+cxx+dex+ec=0, \\ \quad\;\; +dx^4+adx^3+dbxx+ebx \\ \quad\quad\quad\quad\;\; +ex^3+eaxx \end{array}$$

ubi parum ordinis atque harmoniae apparet, et si qua apparet, nascitur ex nostro monito imperfecte observato, dum literae alphabeticae eo ordine collocantur in formula, quo noscuntur dispositae in Alphabeto. Sed ut perfectus sit ordo, nihilque artificii characteristici omittatur, quod nos in consideratione producti juvare possit, loco unius formulae ponamus $10x^3+11x^2+12x+13x=0$, et loco alterius $20x^2+21x+22=0$, adhibendo pro literis numeros fictitios ad quantitates coefficientes designandas. Ita enim ex solo charactere coefficientis inspecto agnoscere possumus, quicquid de coefficiente quaeri potest, nempe tum ad quam formulam pertineat,

tum cujusnam ipsius x potentiae sit coefficiens. Habet enim character hic seu numerus duas notas, dextram et sinistram. Sinistra indicabit formulam, dextra potentiam ad quam refertur. Sic 21 est coefficiens ipsius x seu x^1 ob notam sinistram 1, et quidem in formula secunda ob notam dextram 2. Hoc modo etiam conservatur lex Homogeneorum, in quavis formula coefficienti eam ascribendo dimensionem, quam nota ejus dextra indicat. Ita quivis terminus formulae prioris erit tertiae, quilibet posterioris secundae dimensionis. Jam productum intueamur

$$\left.\begin{array}{llll} 10.20x^5+11.20x^4+12.20x^3+13.20x^2 & & & \\ \quad +10.21 \quad +11.21 \quad +12.21 \quad +13.21x & & & \\ \qquad\qquad +10.22 \quad +11.22 \quad +12.22 \quad +13.22 & & & \end{array}\right\} = 0$$

In eo omnia sunt mire ordinata et harmonica, ita ut extemporanea scriptione exhiberi possint sine calculo et meditatione. Lineae horizontales multiplicantur per eundem numerum formulae unius, prima per 20, secunda per 21, tertia per 22. Lineae transversales (ut 10.20, 10.21, 10.22) multiplicantur per eundem formulae alterius, prima per 10, secunda per 11, tertia per 12. In ejusdem columnae quolibet membro idem est aggregatum notarum dextrarum, quod exponenti potentiae x in eadem columna supplemento est ad exponentem potentiae supremae, scilicet hic quinarium. Quin amplius tot sunt ejusdem columnae seu termini membra, quot sunt modi id aggregatum conficiendi. Quodvis autem membrum est combinatio numeri ex una et numeri ex alia formula. Denique si numeri supponant pro quantitatibus ejus dimensionis, cujus exponens est nota ipsorum dextra, etiam in producto lex homogeneorum observatur. Ut alia taceam, quae aspectus subministrat. Si productum ex pluribus consideremus, multo adhuc manifestior est usus. Unum illud Theorema, quo Vieta suum opus clausit, Cartesius cepit, ex ordinata illa multiplicatione statim resultans; quanti sit usus ad constitutionem aequationum indagandam, jam ab aliis est explicatum. Nempe si in se invicem ducas $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ etc., fiet

$$\begin{array}{lllll} x^n+1x^{n-1} & +1.2x^{n-2} & +1.2.3x^{n-3} & +1.2.3.4x^{n-4} & \text{etc.} \\ \quad 2 & \quad 1.3 & \quad 1.2.4 & \quad \text{etc.} & \\ \quad 3 & \quad 1.4 & \quad 2.3.4 & & \\ \quad 4 & \quad 2.3 & \quad \text{etc.} & & \\ \quad \text{etc.} & \quad 2.4 & & & \\ & \quad 3.4 & & & \\ & \quad \text{etc.} & & & \end{array}$$

ubi secundus terminus omnes uniones, tertius omnes biniones, quartus omnes terniones absolutorum in radicibus continet, et ita porro.

Sed pergendum est ab Multiplicationibus ad Divisiones, in quibus Resultantia magis sunt implicata. Peculiares schedas calculis in eam rem implevi. Nempe dividendos $20, 20x+21, 20x^2+21x+22, 20x^3+21x^2+22x+23, 20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$, et ita porro, dividendo per divisores nempe $10, 10x+11, 10x^2+11x+12, 10x^3+11x^2+12x+13$, et ita porro, reperientur regulae seu harmoniae tales: Numerator in omni quotiente divisionis componitur ex residuis anterioribus ejusdem divisionis, et ita quidem ut coefficiens primi termini quotientis fiat ex quotiente primi termini primi residui, coefficiens secundi termini quotientis ex coefficiente primi termini secundi residui, et ita porro, tantum multiplicando coefficientem per potentiam ipsius 10 sublatam ad eum gradum, qui aequetur gradui potentiae cujus in quotiente debet esse efficiens. Ita si dividas $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$ per $10x^2+11x+12$, erit quotiens

$$\begin{array}{rrrr} 10^3.20x^3 & +10^3.21x^2 & +10^3.22x & +10^3.23 \\ & & & -10^2.11.22 \\ & -10^2.11.20 & -10^2.11.21 & -10^2.12.21 \\ & & -10^2.12.20 & +10.11^2.21 \\ & & +10.11^2.20 & +(2)10.11.12.20 \\ & & & -11^3.20 \end{array}$$

divis. per 10^4, cujus numeratoris coefficientes fiunt sic: nempe coefficiens ipsius x^3 ex 20 mult. per 10^3, et coefficiens ipsius x^2 ex $10.21-11.20$ multipl. per 10^2, et ita porro. Est autem 20 residui initium in divis. $20x+21$ per $10x^2+11x+12$, et $10.21-11.20$ est residui initium in divis. $20x^2+21x+22$ per idem $10x^2+11x+12$, et ita porro.

Stante expressione nostra, manenteque eodem divisore, Quotientes sequentes seu dividendorum altiorum quoad coefficientes scilicet ejusdem in ordine termini continent quotientes inferiorum, adeoque, manente eodem divisore, quocunque existente dividendo, idem est in omnibus quotientibus coefficiens termini primi, idem est in omnibus quotientibus coefficiens termini secundi, et ita porro. Sic in omnibus divisionibus factis per $10x^2+11x+12$ coefficiens termini primi in quotiente est $20:10$, et coefficiens termini secundi in quotiente est $10.21-11.20,:10^2$, coefficiensque termini tertii est $10^2.22-10.11.21-10.12.20+11^2.20,:10^3$, et ita porro.

Atque ita ejusdem divisoris Quotientes inferiores fiunt ex superioribus, quorum scilicet dividendi sunt altiores, eo ipso scilicet dum membra quotientis altioris continentia characteres dividendi altioris, in inferiore deficientes, in quotiente inferiore evanescunt. Hoc praevideri poterat, revera enim eodem modo dividitur, manente eodem divisore, quantumcunque descendat dividendus, nec discrimen est nisi in gradibus ipsius x, non vero in coefficientibus, ut sive $20x^3+21x^2+22x+23$ sive $20x^2+21x+22$ dividas per $10x+11$, nihil refert in quotientibus quoad coefficientes.

Similis est nexus inter Residua, anteriora et posteriora, non tamen ejusdem divisoris, nec ejusdem dividendi, sed earum divisionum, quarum Residua sunt similia, seu in quibus eadem est differentia inter Exponentes potentiae ipsius x in termino primo divisoris et dividendi. Ita si dividas $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$ per $10x^2+11x+12$, vel si dividas $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$ per $10x^3+11x^2+12x+13$, residui terminus primus primo, secundus secundo coincidet, sed tertius terminus qui est in posteriore divisione, non habet locum sed evanescit in priore, quia ubique ingrediuntur characteres 25 vel 13, qui in priore divisione absunt. Et generaliter, cum eadem est differentia exponentum terminorum maximorum ipsius x, divisiones inferiores continentur in superioribus tanquam casus speciales quoad quotientes pariter et residuos. Idque praevideri poterat, nam

$$\frac{20x^4+21x^3+22x^2+23x+24}{10x^2+11x+12} \text{ nascitur ex}$$

$$\frac{20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25}{10x^3+11x^2+12x+13},$$

ponendo tam 25 quam 13 esse nihilo aequales.

In omni divisione Residuus est quaedam continuatio Quotientis suae divisionis. Nam si continuari posset divisio, terminus primus Residui daret novum quotientem, quod proinde fit in dividendo altiore.

Hinc eodem existente divisore, inter se consentiunt (in Numeratoribus scilicet et Coefficientibus) Terminus primus Residui in Divisione et Terminus ultimus Quotientis in Divisione proxime altiore.

Sic dividendo per $10x^2+11x+12$, terminus primus residui in divisione residui ubi dividendus est $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$ consentit cum termino ultimo residui in divisione, ubi dividendus

est $20x^5+21x^4+22x^3+23x^2+24x+25$, utrobique scilicet prodit $10^3.23-10^2.11.22-10^2.12.21+10.11^2.21+(2)10.11.12.20-11^3.20$. Atque hic consensus est omnimodus, non ut paulo ante, quasi unum in altero per modum casus generalis in regula speciali contineretur.

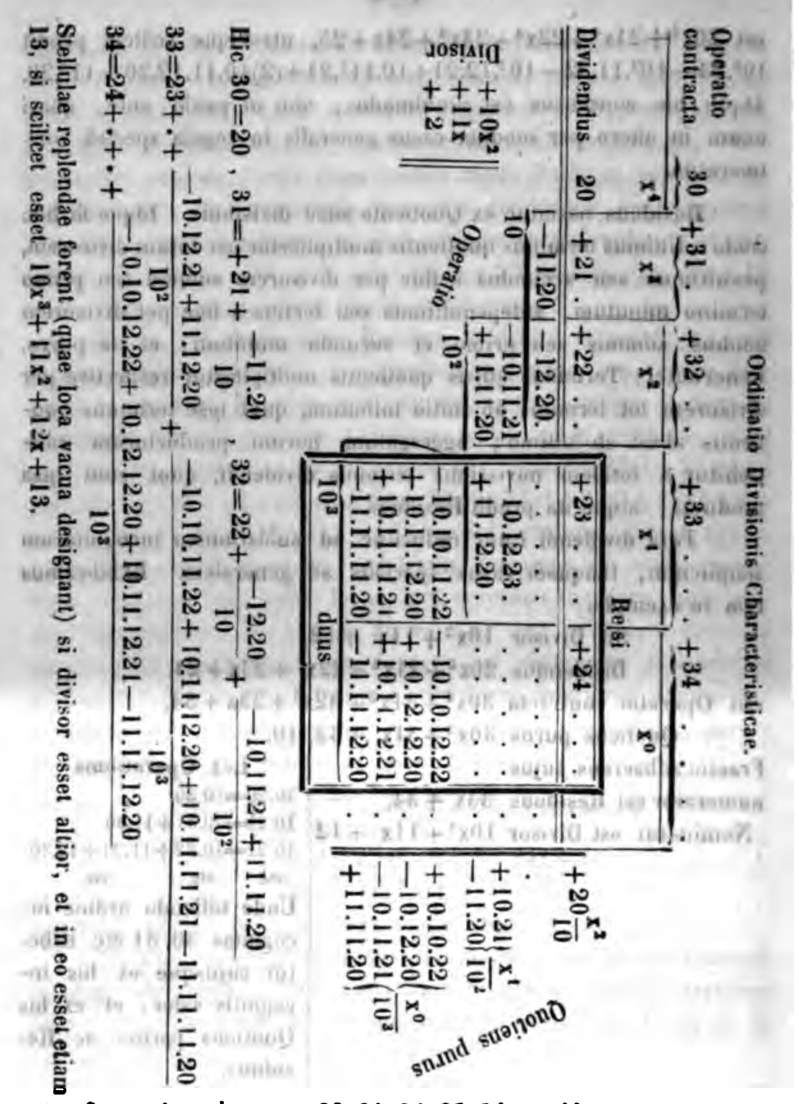
Residuus nascitur ex Quotiente suae divisionis. Idque fit hoc modo: Ultimus terminus quotientis multiplicetur per totum divisorem, penultimus seu secundus a fine per divisorem summo seu primo termino minutum, antepenultimus seu tertius a fine per divisorem duobus summis seu primo et secundo minutum, et ita porro. Generaliter: Terminus quivis quotientis multiplicatur respective per divisorem tot terminis ab initio minutum, quot ipse terminus quotientis abest ab ultimo; aggregatum horum productorum subtrahitur a totidem novissimis terminis dividendi, quot sunt ipsa producta; atque ita prodit Residuus.

Tota dividendi ratio reducitur ad sublationem incognitarum simplicium, tanquam casus specialis ad generalem. Exhibeamus rem in exemplo.

Sit Divisor $10x^2+11x+12$,
Dividendus $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$,
erit Operatio contracta $30x^4+31x^3+32x^2+33x+34$,
Quotiens purus $30x^2+31x+32,\!10$,
Fractio adhaerens cujus numerator est Residuus $33x+34$,
Nominatur est Divisor $10x^2+11x+12$

Lex Operationis
$10.20=10.30$
$10.21=10.31+11.30$
$10.22=10.32+11.31+12.30$
etc. etc. etc.
Unde tollendo ordine incognitas 30, 31 etc. habetur cujusque ex his incognitis valor, et ex his Quotiens pariter ac Residuus.

Superest ut demonstremus valorem Quotientis ac Residui, itemque aequationes in Lege Operationis contentas. Itaque tota exempli Operatio explicita exhibeatur, ordinatione tali quae commodissima visa est:



Ordinatio Divisionis Characteristicae.

Operatio contracta	30	+31 .	+32 . .	+33 . . .	+34	
	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	Quotiens purus
Dividendus	20	+21 .	+22 . .	+23 . . .	+24 . . .	$+20\frac{x^2}{10}$
Divisor $+10x^2$ $+11x$ $+12$		$\frac{-11.20}{10}$	−12.20.	. . . . .	. . . . .	$\left.\begin{matrix}+10.21\\-11.20\end{matrix}\right\}\frac{x^1}{10^2}$
Operatio			−10.11.21	−10.12.23.	. . . . .	
			$\frac{+11.11.20}{10^2}$	+11.12.20.	. . . . .	
				−10.10.11.22	−10.10.12.22	$\left.\begin{matrix}+10.10.22\\-10.12.20\\-10.11.21\\+11.11.20\end{matrix}\right\}\frac{x^0}{10^3}$
				+10.11.12.20	+10.12.12.20	
				+10.11.11.21	+10.11.12.21	
				−11.11.11.20	−11.11.12.20	
				10^3 Resi-	duus	

Hic $30=20$, $31=+21+\frac{-11.20}{10}$, $32=22+\frac{-12.20}{10}+\frac{-10.11.21+11.11.20}{10^2}$

$$33=23+.+\frac{-10.12.21+11.12.20}{10^2}+\frac{-10.10.11.22+10.11.12.20+10.11.11.21-11.11.11.20}{10^3}$$

$$34=24+.+.+\frac{-10.10.12.22+10.12.12.20+10.11.12.21-11.11.12.20}{10^3}$$

Stellulae replendae forent (quae loca vacua designant) si divisor esset altior, et in eo esset etiam 13, si scilicet esset $10x^3+11x^2+12x+13$.

Jam valores ipsarum 30, 31, 32, 33, 34 consideremus:

$30=20$, $31=21-\frac{11.20}{10}$ seu $31=21-\frac{11.30}{10}$ seu $10.21=10.31+11.30$

$32=22-\frac{12.30}{10}-\frac{11.31}{10}$ seu $10.22=10.32+11.31+12.30$

$33=23-.-\frac{12.31}{10}-\frac{11.32}{10}$ seu $10.23=10.33+11.32+12.31$.

Evanescit hic 13.30, quia 13 abest. Et ita porro. Habemus ergo aequationes in Lege Operationis contentas. Apparet etiam ex nuda inspectione, valores Quotientis et Residui esse quales assignavimus.

Quoniam ergo Aequationes in Lege Operationum contentae simplici admodum regularitate procedunt, et earum incognitae sunt simplicis gradus, hinc regula divisionum reducitur ad regulam jam a me inventam tollendi simplices incognitas, ejusque harmoniis suas proprias seu speciales addit. Sed placet adjicere modum inveniendi valores Terminorum Operationis 30, 31 etc. maxime proprium et analysi convenientem, qui consistit in comparatione successus cum quaesito. Nempe Quotientis partem puram $30x^2+31x+32$ multiplicabimus per divisorem $10x^2+11x+12$, producto addamus residuum $33x+34$, et proveniet formula coincidens cum dividendo $20x^4+21x^3+22x^2+23x+24$. Unde habebuntur aequationes comparatitiae, easdem quas ante $10.20=10.30$, et $10.21=10.31+11.30$, et $10.22=10.32+11.31+12.30$, et $10.23=10.33+11.32+12.31$, et $10.24=10.34+ * +12.32$, ubi ex natura residui in ultima aequatione contingit hiatus per stellulam expressus, nempe abest 11.33. Cujus rei ratio est, quod Termini Operationis, qui residuum constituunt, hoc loco 33 et 34, non nisi per 10 multiplicantur, non vero per 11 et 12. Secus fuisset, si continuata fuisset divisio. In calculi executione fingere licebit, quasi etiam adesset 11.33, ascribendo ei notam seu includendo, ut regularitas melius servetur. Ex his etiam habebitur series infinita pro Quotiente inveniendo sine Residuo, continuata divisione. Item inquisitio maximi communis divisoris, si rursus divisorem dividas per residuum, ubi $10x^2+11x+12,:,33x+34=40x+41,:33,,+42:,33x+34$. Ubi si continuando nulla prodit communis mensura, sequitur sublatio literarum in aequationibus, et ultimus residuus, ut hoc loco 42, fit $=0$. Ita prodibunt omnes aequationes simplices necessariae ad sublationem literarum.

XVII.

DIVISIONES FORMULARUM REPERIRE.

Divisores formulae sunt ejusdem Generatores. Itaque magni ad analysin momenti est, ad inveniendas analogias, extractiones, depressiones, aliosque usus eruere latentes divisores formularum, sive literalium sive numericarum, quas assumta litera pro unitate possumus reducere ad literales. Formula autem hic utiliter considerari potest instar aequationis, quoniam divisores aequationis etiam formulae sunt divisores. Ex aequatione tollantur irrationales, et quidem quantum sine exaltatione aequationis licet. Aequatio secundum literam aliquam ordinetur, qualis x, quae vocetur litera ordinalis. Quodsi aequatio sit divisibilis per formulam, a qua litera ordinalis absit, oportet ut ultimus terminus aequationis et reliqua ejus pars habeant divisorem communem (facile nota methodo reperiendum) qui erit divisor aequationis, adeoque formulae datae. Deinde videbimus an aequatio divisibilis sit per formulam, in qua ipsa contineatur litera ordinalis, quae erit simplex vel quadratica vel cubica vel biquadratica etc. veluti $h+x$ vel $h+kx+xx$ vel $h+kx+lxx+x^3$ vel $h+kx+lxx+mx^3+x^4$, et ita porro. Id vero an fieri possit, et quomodo, sic investigabimus.

Ante omnia praeparetur aequatio data liberando eam a fractionibus, et summum ejus terminum a coefficiente, quod notum est semper fieri posse multiplicando radicem aequationis. Praeparata jam aequatione, investigetur an habeat radicem rationalem, seu an sit divisibilis per formulam simplicem $h+x$, ita enim habebitur valor rationalis ipsius x seu erit $x=-h$. Inventum jam est ab Harrioto, quantitatem h quaesitam fore unum ex divisoribus ultimi termini aequationis datae. Esto aequatio data $p+qx+rxx+sx^3+tx^4+x^5$; quaerantur divisores rationales integri ipsius p. Unus ex ipsis debebit esse 10, et si quaesitum succedit, unoque ex iis assumto pro 10, tentandum erit an $10+x$ dividat aequationem datam. Sed quia ubi plures sunt divisores (tam affirmativi quam negativi) saepius tentanda esset divisio, ideo minuatur vel augeatur radix aequationis datae, pro x ponendo $y+e$ eumque valorem substituendo in aequatione data, habebitur aequatio nova se-

cundum ordinalem y, cujus terminus ultimus erit $p+qe+ree+se^3+te^4+e^5$, nam reliquos ejus terminos investigare, nihil nunc quidem necesse est. Quodsi aequatio data est divisibilis, erit etiam nova divisibilis eodem modo, et cum datae divisor quaesitus debeat esse $h+x$, novae divisor erit $h+e+y$. Itaque $h+e$ debet esse unus ex divisoribus ultimi termini aequationis novae, qui vocetur (h), ergo $(h)-h=e$, ac proinde ex divisoribus ultimi termini aequationis datae seligatur ille, cujus differentia ab aliquo divisore termini ultimi aequationis novae sit quantitas assumta e. Quodsi plures divisores ex aequatione data hoc praestent, varietur quantitas assumta, pro e ponendo f et ex succedentibus divisoribus rursus deligatur is, qui ab aliquo divisore aequationis novae secundae differet quantitate altera assumta f. Et tam diu continuabitur variatio, donec divisor omnis, qui non constanter succedit, excludatur. Ita reperto h, tentanda est divisio per $h+x$. Quae si non succedit vel si nullus divisor non excluditur, impossibilis erit divisio quaesita, et aequatio data non habet radicem rationalem. Ut autem calculus facilior, loco ipsius e vel f vel g etc. quantitatis assumtae assumatur $1a$ vel $10a$ vel $100a$ vel $-1a$ vel $-10a$ vel $-100a$, literam a habendo pro unitate. Atque haec quidem jam habentur apud alios, repetenda tamen erant, ut caetera facilius intelligerentur.

Sed si aequatio sit divisibilis per formulam alicujus gradus, adeoque reducibilis licet non per valorem radicis rationalem, haec methodus nondum applicata habetur; reperi autem olim posse eam huc quoque promoveri magna facilitate nec minore fructu. Et quidem semper verum manet, ultimum terminum aequationis datae fore divisibilem per h, ultimum vel infimum terminum formulae dividentis quaesitae. Quodsi ea jam sit quadratica, nempe $h+kx+xx$, in ea pro x substituatur $e+y$ et terminus infimus novae secundum y prodeuntis erit $h+ke+ee$. quae quantitas sit (h) ut ante, unus nempe ex divisoribus termini ultimi aequationis novae, fiet $(h)-h$ divisibilis per e. Idem est in altioribus formulis, nam si esset cubica $h+kx+lxx+x^3$, pro x substituatur $e+y$, et ultimus terminus formulae novae erit $h+ke+lee+e^3$, id est (h) unus ex divisoribus ultimi termini aequationis novae, itaque rursus $(h)-h$ erit divisibilis per e. Generaliter ergo, ut investigetur an aequatio data alicujus rationalis integra sit divisibilis per talem formulam rationalem inferiorem secundum eandem literam ordinalem, velut x, notentur

omnes divisores ultimi termini aequationis datae, et pro x ponendo y+e, notentur divisores ultimi termini aequationis novae, et ex divisoribus prioribus seligantur illi quorum differentia a posterioribus sit divisibilis per assumtam quantitatem e, utcunque e varietur; ita facile excludentur divisores non succedentes, cum quaevis variatio ad excludendum servire possit. Quodsi nullus non excludatur divisor ultimi termini aequationis datae, non potest ea aequatio vel formula dividi per formulam talem inferiorem, cujuscunque sit gradus, idque adeo praeclarum huic methodo inest, quod omnes gradus una eademque opera excluduntur. Sed si post quotcunque variationes ipsius e aliquis supersit divisor (duos autem minimum superesse necesse est, sibi respondentes seu ultimum terminum producentes), ex hypothesi poterunt etiam inveniri caeteri coefficientes formulae dividentis k, l, m etc., prout ea scilicet minus aut plus assurgit. Et licet diversa nonnihil operatione opus est pro graduum diversitate, est tamen communis processus, ut mox patebit.

Incipiamus a Formula dividente quadratica h+kx+xx, quae transformata, pro x ponendo e+y, dabit formulam novam, cujus ultimus terminus erit h+ke+ee=(h). Ob inventas jam h et (h) notamque e, unam ex assumtis, cui respondet (h), habebitur et k=(h)—h—ee,:e, qui est integer, adeoque habebitur et formula dividens quaesita h+kx+xx, et porro quantitatem (h)—h—ee,:e quia recurret, per compendium vocabimus 110.

Si formula dividens sit cubica h+kx+lxx+x^3, fiet h+ke+lee+e^3=(h) et, quia (h)—h—e^3 dividi potest per e, proveniens compendio appellabimus 310 et fiet k+le=310. Sed pari jure pro e assumendo f, loco (h) sumatur (2h) et loco (2h)—h—f^3,:f assumatur 311, fiet k+lf=311, ergo fiet l=310—311,:, e—f =320, et fiet k=310—320 e.

Si formula dividens sit biquadratica h+kx+lxx+mx^3+x^4, fiet h+ke+lee+me^3+e^4=(h) et (h)—h—e^4,: e=410, adeoque k+le+mee=410, et pari jure faciendo (2h)—h—f^4,:f=411, fiet k+lf+mff=411; vocetur 420 et +el+eem=410—411, et 410
—f —ff
—411,:, e—f vocando 420 fiet l+em=420. Sed pari jure fa-
f
ciendo (3h)—h—g^4,: g=412, et 410—412,:, e—g=421, fiet l+em=421; habebimus (f—g)m=420—421, fiatque 420—421,:
g

$,f-g=430$, proditque $m=430$ et $l=420=(e+f)430$, et $k=410$ $-420e+430(g+f)e-430ee$, et fiet $k=410-420e+430ef$.

Si formula dividens sit surdesolida $h+kx+lxx+mx^3+nx^4$ $+x^5$, fiet $h+ke+lee+me^3+ne^4+e^5=(h)$. $(h)-h-e^5,:e=510$, adeoque $k+le+mee+ne^3=510$, et pari jure $k+lf+mff+nf^3=511$. Sit $510-511,:,e-f=520$, fiet $l+m(e+f)+n(ee+ef+ff)=520$, et pari jure ob g, fiet $l+m(e+g)+n(ee+eg+gg)=521$, unde $m(f-g)+ne(f-g)+n(ff-gg)=520-521$, et posito $520-521,:,f-g$ $=530$, fiet $m+n(e+f+g)=530$ et pari jure $m+n(e+f+\gamma)=531$ et $n(g-\gamma)=530-531$. Sit $530-531,:,g-\gamma=540$, et fiet tandem $n=540$ et $m=530-540(e+f+g)$ et $l=520-530(e+f)+$ $540(ee+2ef+ff+eg+fg)-540(e+ef+ff)$ seu fiat $l=520-530(e+f)$ $+540(ef+eg+fg)$ et

$$k=510-520e+530e(e+f)-540e(ef+eg+fg)$$
$$-530ee \qquad +540ee(e+f+g)$$
$$-540e^3$$

seu $k=510-520e+530ef-540efg$.

Sit ergo formula dividens aequatione data inferior eamque dividens quaecunque veluti $h+kx+lxx+mx^3+nx^4+x^5$, pro x substituatur $e+y$, fiet aliqua formula secundum y, cujus infimus terminus (h) erit $h+ke+lee+me^3+ne^4+e^5$, cujus maximus terminus quicunque e^c posito c exponentem gradus formulae dividentis, uti c hoc loco $=5$; fiat $(h)-h-e^c,:e=910$, adeoque erit $910=k+le$ $+mee+ne^4$. Similiter pro e ponendo f, et pro (h) ponendo $(2h)$, fiat $(2h)-h-f^c,:f=911=k+lf+mff+nf^3$, quarum duarum aequationum ope tollendo k, et faciendo $910-911,:,e-f=920$, fiet $920=l$ $+m(e+f)+n(ee+ef+ff)$; pro f assumatur g, cui respondeat $(3h)$, et ita fiet $(3h)-h-g^c,:g=912=k+lg+mgg+ng^3$ et 910 $-912,:,e-g=921$, prodibit $921=l+m(e+g)+n(ee+eg+gg)$, et fiet $920-921=m(f-g)+ne(f-g)+n(ff-gg)$. Sit $920-921,:$ $,f-g=930$, prodibit $930=m+n(e+f+g)$. Ita habetur et m, sed quia adhuc superest invenienda litera n, opus est adhuc una variatione, itaque loco ipsius g assumatur Θ, et fiat $931=m+$ $n(e+f+\Theta)$, et tollendo m fiet $930-931=n(g-\Theta)$, et sit $930-931,:$ $,g-\Theta=940$ et fiet $n=940$; itaque $m=930-940(e+f+g)$, $l=920$

$$-930(e+f)+940(e+f,e+f+g)$$
$$-940(ee+ef+ff)$$

seu $l=920-930(e+f)+940(ef+eg+fg)$;

denique $k = 910 - 920e + 930e\,(e+f) - 940e\,(ef+eg+fg)$
$\qquad\qquad +930ee \qquad\qquad +940ee(e+f+g)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -940e^3$

seu $k = 910 - 920e + 930ef - 940efg$.

Generale ergo theorema huc redit: Quaeritur formula aequatione data inferior eamque dividens $h + kx + lxx + mx^3 + nx^4 +$ etc. Ponamus h esse divisorem ultimi termini aequationis datae methodo superiore inventum, reliqui coefficientes k, l, m, n etc. sic inveniantur: posito quantitates assumtas variandae aequationi datae fuisse e, f, g, Θ etc. nempe pro x ponendo $y+e$ vel $\nu+f$ vel $\omega+g$ vel $z+\Theta$ etc. et divisores ultimi termini convenientes in quavis variatione fuisse (h) vel (2h) vel (3h) vel (4h) etc., erit

k=	910	—920e	+930ef	—940efg	+950efgΘ
l=		+920	—930e	+940ef	—950efg
			f	eg	efΘ
				fg	egΘ
					fgΘ
m=			+930	—940e	+950ef
				f	eg
				g	eΘ
					fg
					fΘ
					gΘ
n=				+940	—950e
					f
					g
					Θ
u					+950

posito non procedi variando ultra e, f, g, Θ, λ, seu non esse formulam dividentem plus quam quinque dimensionum, columnae et valores tot adjicientur (dementur) quot gradus accedent (decedent) formulae.

Postremo 910, 920, 930 etc. sunt integri quorum valores sic prodibunt:

910=(h) — h—e^c.,:l	911=(2h)—h – f^c,:f	912=(3h)—h —g^c,:g	913=(4h)-h-Θ^c.,:Θ
920=910—911,:,e-f	921=910 – 912,:,e-g	922=910-913,:,e-Θ	
930=920 – 921,:,f-g	931=920—922,:,f-Θ		
940=930—931,:,g-Θ			

et continuando quot aequationes accedent uni columnae horum novissimorum valorum, tot etiam caeteris adjicientur.

XVIII.

DE ORTU, PROGRESSU ET NATURA ALGEBRAE, NONNULLISQUE ALIORUM ET PROPRIIS CIRCA EAM INVENTIS.

Algebram esse scientiam praestantissimam summique usus, dubium nullum est; sed cum multum adhuc absit a perfectione, nihil magis progressus ejus impedit, quam quod iis, qui non nisi vulgatis quibusdam problematis sunt exercitati, aut nondum in ejus arcana penetrarunt, absoluta creditur. Errant etiam qui ab ea quidvis sibi pollicentur et de viribus ejus sentiunt immoderati et pro arte inveniendi atque analysi in universum ac scientiarum principe habent. Algebra certe sive Numerosa sive Speciosa, quam nonnulli pro recondita admodum arte venditant, per se nihil aliud est quam Scientia Numerorum indefinitorum seu generalium, et eundem plane modum procedendi habet quam Arithmetica communis, si recte advertas, potestatem vero majorem, quia enim numeros indefinitos perinde tractat ac certos, nullo discrimine datorum seu cognitorum et ignotorum seu quaesitorum. Hinc non tantum ad habitudines datorum et quaesitorum ostendendas variaque problemata indirecta solvenda inservit. sed et generalia detegit, et ipsius Arithmeticae communis fontes aperit. Exemplo facili res erit illustrior.

Sit numerus 12 seu $10+2$, vel $a+b$ (posito 10 esse a et 2 esse b) multiplicandus in se ipsum; conferantur jam varii processus:

I. communis	II. communis explicatus	III. Algebraicus per Numeros distincte processum exhibentes
12	1^0+2	$10+2$
12	1^0+2	$10+2$
24	2^0+4	$10.2+2.2$
12	$1^{00}+2^0$	$10.10+ \quad 10.2$
144	$1^{00}+4^0+4$	$10.10+(2)10.2+2.2$

IV. Algebraicus per literas

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+ab \quad \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

ubi processus III et IV ostendit, productum Numero ex duabus partibus a, b vel 10 et 2 constante, per semet multiplicato, sive quadrato, constare ex duobus quadratis partium aa et bb (seu 10.10 et 2.2), itemque duplo ab seu duplo facto ex partibus 10 et 2. Ex quo theoremate ducta est extractio radicis quadraticae in communi Arithmetica usitata. Patet autem hinc, Algebram ipsam literis alligatam non esse, pro literis enim scribi possunt aliae notae, adeoque et numeri quicunque, modo numeri instar literarum tractentur, hoc est tanquam notae generales, non tanquam numeri communes. Itaque multiplicando 10 in 2 algebraice, non scribo 20, sed 10.2, et multiplicando 2 in 2 scribo 2.2, non 4; unde bis 10.2 non scribo 40, sed (2)10.2, ubi (2) est numerus verus, 10 et 2 sunt supposititii seu generales, stantes pro numeris quibuscunque, ut appareat, quis non pro his tantum, sed et pro aliis omnibus debeat esse processus, cum alias in processu I vel II theorema illud generale, quod ex processu III et IV elucet, non deprehendatur. Utile autem saepe animadverti pro literis vulgo usitatis, ut in processu IV, adhibere numeros supposititios, ut in processu III, tum multas alias ob causas, tum quia hoc modo calculum algebraicum continue examinare possum in numeris imo per abjectionem novenarii, quod artificium cum egregii sit usus et summae facilitatis, miror tamen nondum fuisse usurpatum. Si igitur problema proponatur, Algebra potest semper literas vel etiam numeros supposititios (quod alias communiter tantum in regula falsi faciunt, sed processum literali similem non observando) assumere pro veris quaesitis, modo procedam ut in processu III aut IV. Verbi gratia postulatur a me numerus talis naturae, ut subtractus a suo quadrato relinquat triplum sui. Ponamus illum numerum esse 2, et cum eo procedamus, quemadmodum procederemus cum numero vero, si daretur, ut disceremus an satisfaciat, modo interim recordemur ipsum forte non esse verum, sed supposititium adeoque non actualiter addendum, subtrahendum, multiplicandum, sed tantum designative, ut in processu III. Sumamus igitur numerum 2, eumque subtrahamus a suo quadrato 2.2 fiet 2.2—2, qui debet esse aequalis triplo numeri seu (3).2, ubi 3 includo parenthesi quia est numerus verus, cum reliqui sint supposititii. Quoniam ergo 2.2—2 est aequale (3)2, hinc considerando an talis aequatio reddi possit simplicior, observo dividi posse utrumque latus per 2, fietque 2—(1) aequale (3), ergo addendo utrobique (1) ut numerus

supposititius ab uno latere solus habeatur; fiet 2 aequ. (3) + (1) seu 2 aequ. (4). Invenimus ergo numerum supposititium per verum; nempe 2 quaesitus seu suppositus valet (4), quod verum esse deprehenditur. Nam numerus 4 subtractus a suo quadrato 16 relinquit triplum sui, nempe 12. Breviter: 2.2—2 aequ. (3)2; ergo 2—(1) aequ. (3) adeoque 2 aequ. (4). In literis ita staret: aa—a aeq. 3a, ergo a—1 aequ. 3 adeoque a aequ. 4. Ex his paucis totius Algebrae fontes recte consideranti apparere arbitror.

Hinc autem causa apparet, cur Algebra seu Scientia numerorum generalium tractet de quantitate in universum. Id enim ideo accidit, quia revera omnis quantitas seu magnitudo exprimitur numero partium rei; ita magnitudo ulnae exprimi potest bipedalitate seu binario pedum, quia ulna ex duobus pedibus constat. Quoniam vero numerus partium rei quantitatem exprimens variat, prout alia atque alia unitas seu mensura assumitur, nam ejusdem ulnae magnitudo exprimetur per 24, si mensura seu unitas sit digitus sive pollex; hinc numerus quantitatem rei exprimens est indefinitus: Algebram autem de numeris indefinitis agere jam ostendimus, ergo et de rerum quantitatibus in universum. Hinc si numerus quantitatem ulnae exprimens sit ν, quadrata ulna exprimetur per $\nu\nu$, duae ulnae per 2ν, quadratum vero cujus latus sint duae ulnae erit $4\nu\nu$, quod deprehendetur verum, qualiscunque assumatur unitas; nam si unitas sit pes, ν valebit 2, ergo $4\nu\nu$ erit 16, itaque quadratum cujus latus sint duae ulnae, erit 16 pedum quadratorum. Sin unitas sit pollex, ν valebit 24 et $\nu\nu$ seu quadratum de 24 erit 576, et $4\nu\nu$ erit quater quadratum de 24 seu 2304, ac proinde quadratum cujus latus sint duae ulnae, erit 2304 pollicum quadratorum, quod cum 16 pedibus quadratis coincidit, et utraque significatio vel etiam alia quaecunque exprimetur per $4\nu\nu$.

Interim Algebra cum Mathesi universali non videtur confundenda. Equidem si Mathesis de sola quantitate ageret sive de aequali et inaequali, ratione et proportione, Algebram (quae tractat quantitatem in universum) pro parte ejus generali haberi nihil prohiberet. Verum Mathesi subesse videtur quicquid imaginationi subest, quatenus distincte concipitur, et proinde non tantum de quantitate, sed et de dispositione rerum in ea tractari. Itaque duae ni fallor sunt partes Matheseos generalis, Ars combinatoria de rerum varietate ac formis sive qualitatibus in universum quatenus distinctae ratiocinationi subjiciantur, deque simili ac dissimili, et

Logistica sive Algebra de quantitate in universum. Sane ars deciphrandi, ars ludendi latrunculis, similiaque quae ad Mathesin pertinere judicantur, magis Combinatoria quam Algebra indigent, et ipsa Algebra quatenus quantitates certis formulis exprimit, quae relationes quantitatum varias significant, arti combinatoriae subordinatur et per eam promoveri potest, ut suo loco ostendam. Longeque differt relatio quantitatum in genere ab ea specie, quae dicitur ratio seu proportio. Ita in circulo datur quaedam relatio (non vera proportio sive ratio) semper eadem inter sinum et sinum complementi, sed ad eam exprimendam assumendum est tertium quid nempe radius, interdum et alia plura, cum tamen ad proportionem intelligendam sola relata inter se comparari sufficiat.

Multo magis aberrant, qui Algebram pro arte inveniendi habent et tanquam omnium Scientiarum humanarum principem venerantur, quasi scilicet omnes relationes rerum per Algebram exprimi possint, quae tamen de solis agit relationibus numerorum, in genere et aliarum rerum quatenus numeri in iis considerantur. Tantumque abest ut cum Algebra coincidat illa Logicae pars praestantissima, ut potius videamus ipsam hactenus Algebram haerere in suismet praeceptis inveniendis et superioris artis auxilio indigere; multum enim adhuc abest a perfectione, veluti mox patebit. Quidam etiam Algebram cum Analysi, aut Analysin cum arte inveniendi confundunt, quorum utrumque erroneum est; quaedam enim operationes Algebraicae sunt syntheticae, ut quando certas aequationum formulas per genesin sive synthesin ex suis radicibus excito et deinde oblatam aequationem in harum Tabula quaero. Et longe differt Ars inveniendi ab Analysi, scilicet ut genus a specie, nam ut ex hoc exemplo apparet, quaedam per synthesin felicius inveniuntur. Et Tabulae, series, loca, revera instrumenta sunt syntheseos. Itaque si problema aliquod difficile soluturus incipiam a casibus facilioribus ejusdem problematis, aut ab aliis problematibus cognatis, ut scilicet progressionem aliquam deprehendam aut alioqui mihi viam ad quaesitum sternam, revera synthesin exerceo, et si integram aliquam Scientiam vel scientiae partem tractans secundum combinatoriae artis leges omnia problemata potiora percurram a simplicioribus ad magis composita procedens, et ita solutionem problematis alicujus quaesiti inter caetera quasi aliud agendo reperiam, id per synthesin invenisse censebor. Sed quatenus problema aliquod ita tracto ac si nullum aliud problema jam solutum vel ab

alio vel a me ipso uspiam terrarum extaret, eatenus analytice procedo, reducens scilicet problema propositum ad alia faciliora, et haec rursus ad alia adhuc faciliora, donec ad prima postulata reducatur, quae per se in potestate sunt; sed methodus pure analytica valde rara est, et vix in mortalium potestate, et plerumque aliquid synthoseos seu theorematum vel problematum praeinventorum admiscetur. Et sunt quaedam quae nisi per tabularum jam conditarum subsidia sive per quandam inductionem demonstrativam non invenientur. Est autem analysis rursus vel per saltum vel per gradus; posterior pulchrior est, sed nondum satis explicata, prior vulgo analyticis usitatior est, sed non aeque menti satisfacit, et saepe ad prolixos calculos ducit.

Sed et Calculus in universum et ars characterum longissime distat ab Algebra; imo certum est, ne omnem quidem calculum Mathematicum ab Algebra et a Numeris pendere. Dantur enim Calculi quidam ab hactenus usitatis plane diversi, ubi notae sive characteres non quantitates sive numeros definitos vel indefinitos, sed alias plane res, verbi gratia puncta, qualitates, respectus significant. Exempli gratia (ut taceam calculum figurarum et modorum in Logica, ubi literae significant propositionum quantitates et qualitates) datur analysis quaedam peculiaris calculusque sui generis Geometriae proprius a me excogitatus, ab omni hactenus recepto toto coelo diversus, non quantitates sed situs directe exprimens, cum calculus Algebraicus situm ad magnitudinem detorqueat, adeoque in ambages abducat. Unde prolixi calculi algebraici nonnunquam oriuntur, ex quibus vix multo studio exculpitur apta constructio, quam aliquando situs inspectio communi Geometrarum Methodo nullo negotio exhibuisset. Verum quia communis illa Methodus attentione ad figuras imaginationem fatigat, et in implicationibus aegre ad exitum pervenit, hinc ipsamet quoque sui generis calculo sublevari potest; eique conjungenda est analysis Veterum per Data et Loca, cujus apud Euclidem, Apollonium, Pappum, Marinum vestigia reperiuntur.

Quoniam autem Algebra multos habet recessus non satis hactenus cognitos (neque enim insignis haec scientia satis comprehensa hactenus et in artis formam reducta est), placet ideam ejus aliquam paucis delineare. Soleo autem eam comparare cum Logica, et quemadmodum in Logica habemus Terminos simplices, Terminorum habitudines, hoc est propositiones, deinde syllogismos quibus

comprobantur propositiones, et ipsam denique Methodum quae omnes istas operationes mentis ordinat ad scopum praefixum: ita in Algebra considero Numeros, Numerorum habitudines seu quasi propositiones Algebraicas (quarum potissimae sunt aequationes et analogiae), modum unam habitudinem ex alia derivandi seu syllogismos Algebraicos, et denique Methodum quae praecepta ad inventionem quasi ordinat. **Numeri seu Termini simplices Algebraici** sunt vel positivi vel privativi, integri (iique simplices aut figurati) vel fracti, rationales vel surdi, et impuri vel affecti, sunt etiam numeri communes vel transcendentes, et denique possibiles vel imaginarii seu impossibiles, et generantur per operationes quae sunt vel syntheticae (additio, multiplicatio, potestatis ex radice excitatio), vel analyticae (subtractio, divisio, extractio radicis) et vel actu fiunt vel aliquando tantum faciendae designantur, quod in analyticis operationibus non semper evitari potest, quia non semper actualis analysis habet locum. Magnaque hujus analyticae pars in hoc consumitur, ut quando fieri potest fracti reducantur ad integros, surdi ad rationales, surdi affecti ad puros, imaginarie expressi ad possibiles, transcendentes ad communes; sed haec interventu sequentium fiunt. Nihil etiam prohibet inter terminos simplices integram seriem vel integrum locum plurium numerorum aut quantitatum simul spectari, quando de quolibet termino vel quantitate seriei aut loci accipi potest quod asseritur, praesertim cum etiam indefinitos numeros hic considerari jam monuerimus. Habitudines numerorum sunt aequalitas (Algebristis aequatio), majoritas et minoritas (seu limites), homogeneum, proportio, commensurabilitas, analogia proportionum, aliaeque relationes magis compositae, cum ad relationem duarum quantitatum exprimendam opus est tertiam ullam vel plures ipsi homogeneas assumi, ubi magni sus est dispicere quaenam sint Homoeoptata seu similiter relata, ut enim analogia seu similitudo proportionum est ad proportionem, ita **homoeoptosis** ad relationem; ex. gr. sinus rectus et sinus complementi in circulo sunt homoeoptata ad radium **Syllogismi Algebraici** sunt collectiones unius harum habitudinum ex alia, verbi gratia transformationes, emendationes, depressiones proportionum, aequationum et analogiarum, introductio vel abrogatio legis homogeneorum, ablegata vel adhibita unitate, inventio communis mensurae, conversio aequationis in analogiam vel contra, limites aequationum seu collectio majoritatis ex aequalitate, et

contra; reductio plurium aequationum ad unam ultimam vel saltem ad pauciores seu sublatio literarum, et contra dispersio unius aequationis in plures assumtis literis novis, denique extractio radicum ex aequationibus per inventionem valoris puri, quantum licet simplicis, quae est aequationum absolutissima. **Methodus** autem ipsa quae oeconomiam calculi totius dirigit, ostendere debet, quibusnam terminis, habitudinibus et habitudinum transformationibus et quo ordine sit utendum, ut ex datis quaesitum obtineatur, idque vel exacte (per expressiones quas natura rei patitur) vel per appropinquationes: ubi et considerandum est quaenam problemata sint definita, cum definitate ambigua (qui fons est irrationalitatis) vel plane indefinita; quo facto interdum satisfacit integra aliqua series seu locus (modo ad ipsum quoque definiendum conditiones adsint sufficientes) vel in eo maximum vel minimum. Interdum in nostra potestate est assumere aliquid cum certa quadam cautione determinante, et sane interdum dantur conditiones quaedam definientes quae admodum exoticae sunt nec ad aequationes aut alias habitudines communes facile, imo aliquando nullo modo revocari possunt, ut fit in multis problematis Diophanteis itemque in problematis Geometriae transcendentis. His denique subjici posset **Usus Algebrae in Geometria et aliis partibus Matheseos**, ubi inprimis ostendenda sunt haec duo nondum satis explicata, quomodo Geometricae conditiones ad calculum Algebraicum quam optime reducantur, ne postea depressionibus opus sit et contra quomodo ex absoluto jam calculo rursus constructiones Geometricae commode eliciantur, quorum prius est transitus a Geometria ad Calculum, posterius vero est reditus a Calculo ad Geometriam. Atque haec demum idea Algebrae mihi dignitati ipsius respondere videtur, quam nescio an hactenus animo satis complexi sint vel saltem prodiderint, qui de ea scripserunt.

Nunc de Historia Algebrae paucis. Platonem Pappus ait primum Methodo usum esse quaesitum assumendi tanquam inventum, quae potissimum in Algebra adhibetur. Literas vel alias notas sive species pro magnitudinibus exprimendis earumque habitudinibus intelligendis assumi nihil novum est, quid aliud enim fecit Euclides toto libro quinto? Qui Diophantum, imo qui Archimedem et Apollonium legit, ne dubitare quidem potest, quin Veteres calculo usi sint qualis in Algebra speciosa (a speciebus sive literarum notis dicta) hodie usurpatur, licet artem suppresserint. Primi

Arabes ejus Elementa quaedam videntur publicasse, forte ex libris quibusdam Graecis amissis, nisi suspicari malimus Sinensium aliorumve Indorum aut etiam Aegyptorum quaedam ad ipsos pervenisse. Scholastici quidam maxime Angli moliti sunt singulares quosdam calculos admodum subtiles circa intensiones et remissiones qualitatum et formarum, viresque ac motus, quos miror plane fuisse neglectos, ut ne quidem celeberrimus Wallisius licet ipse Anglus in sua Algebraicarum rerum historia eorum meminerit, cum tamen subsit aliquid solidi et specimen praebeatur quasi Metaphysicae cujusdam Mathematicae. Princeps eorum fuit Johannes Suisset dictus Calculator, cui addendi Thomas Bradwardinus, Nicolaus Ovem, et alii. Arabum porro Algebra circa Friderici II. tempora videtur et ad Europaeos pervenisse maximeque ab Italis primum fuisse exculta, quibus et inventio Computisticae Mercatoriae debetur. Regiomontanum nostrum intellexisse Algebram et in Geometria quoque exercuisse intelligi potest ex quibusdam problematis Geometricis, quae ipse ait se solvere posse per artem cosae, non vero Geometrice, id est in numeris, non in lineis. Circa tempora Typographiae repertae aut paulo post florebat quidam Frater Lucas de Burgo, cujus scripta Algebraica typis editorum prima sunt, etsi alios ante ipsum scripsisse ex ipsomet appareat. Porro hactenus eo res perducta erat, ut aequationes quadraticae possent solvi, quod jam habet et Diophantus. Primus mortalium Scipio Ferreus circa initium opinor superioris seculi altius ascendit modumque invenit resolvendi aequationes cubicas, neque enim ullum vel vestigium talis inventi ante ipsum hactenus apparet. Artem autem arcanam habuit dum vixit, nec nisi paucos discipulos docuit. Quorum unus forte in certamen doctrinae descendens cum Nicolao Tartalea Mathematico ingeniosissimo, proposuit ei problemata quae ad aequationes hujusmodi reducebantur. Tartalea aemulatione accensus et vinci impatiens, summa animi contentione idem inventum proprio marte feliciter extudit. Quod cum increbuisset, Hieronymus Cardanus, homo maximi ingenii et vastissimae doctrinae, invento diu inhiavit frustra, donec autoritate Gubernatoris Tartaleam Mediolanum acciri curavit, ab eoque demum artificium expiscatus est. Quo semel cognito rem variis additionibus et applicationibus locupletatam publicavit in libro, cui titulum dedit Artis magnae, ita tamen ut sibi inventionem non tribueret. Ex hoc Cardani opere apparet, sublationem secundi termini aliasque emendationes et trans-

formationes aequationum, imo et artem comparandi aequationes cum aliis similibus Cardano non fuisse omnino ignotam. Fuit autem juvenis quidam Bononiensis Cardano familiaris, cui nomen Ludovico Ferrario, cujus florente adhuc aetate extincti vitam scripsit ipse Cardanus, quae inter opera ejus extat. Hic Ferrarius praeclaro invento Algebram uno adhuc gradu promovit, primusque omnium invenit resolutionem quarti gradus seu aequationis quadratoquadraticae, docuitque eam reduci posse ad quadraticam interventu cubicae. Originem inventi totumque processum distincte exposuit Raphael Bombellus in Algebra, Italico sermone jam superiore seculo edita. Itaque fatendum est, Algebram totam quanta nunc habetur, quatenus in perfecta aequationum resolutione seu inventione generalis radicum valoris consistit, revera Italis deberi. Neque enim Vieta aut Cartesius vel hilum adjicere potuerunt, idque adeo verum est, ut ne nunc quidem quisquam dederit aliquid unde spes sit, generaliter aequationes surdesolidas seu quinti gradus atque altiores perveniri posse. Tantum adhuc abest ut Algebra perfecta dici possit. Unde etiam intelligi potest, tantum abesse ut Algebra sit ars inveniendi, ut contra ipsismet Algebristis haereat aqua, donec auxilio superioris alicujus artis aliquando expediantur. Ea autem est Combinatoria, per quam aditum demonstratum habeo ad generales aequationum resolutiones, quantum possibile est, de quo aliquando plenius, ubi calculos exsequi licuerit, quanquam illi per ipsam hanc artem mire contrahantur: nam Scipionis Ferrei et Ludovici Ferrarii artes sunt peculiares suis gradibus, in altioribus cessant. Cartesii quoque methodus pro quarto gradu (quae est Ferrariana transformata) quasi casu tantum succedit in hoc gradu, at pro sexto et aliis paribus minime; et methodi tales valde imperfectae sunt, quoniam qui eas aggrediebatur, praevidere non poterat se per eas exitum consecuturum esse. Quod in tenebris micare est.

Debet quoque nonnihil Algebra Ludovico Nonio Lusitano, qui de ea superiore seculo non male scripsit, observavitque ni fallor radicem esse divisorem ultimi seu absoluti termini, quod fortasse aliis occasionem dedit longius pergendi. Literas quoque pro numeris jam Algebraici superioris seculi usurpabant, inprimis quando occurebant secundae radices quas vocant, id est quando plures incognitae erant supponendae, quin et Gulielmus Gosselinus Cadomensis in sua Algebra Lutetiae 1575 edita literis utitur pene ad

Vietaeum morem. Nihilominus Franciscus Vieta, Consiliarius et Magister libellorum supplicum Regis christianissimi, Algebrae Speciosae quae nunc frequentatur, verus parens merito habetur; is enim calculum a numeris tam cognitis quam incognitis sic ad notas sive species traduxit, ut jam certae semper formulae generales et quasi Canones habeantur, et ita artis combinatoriae usus esse possit in Algebra, nam revera auxilio hujus artis (quae de formulis earumque similitudine et habitudinibus in universum agit) debetur quicquid Speciosa super communem Algebram praestitit, quanquam eadem per numeros supposititios instar literarum adhibitos multo adhuc majore fructu consequi liceat, ut alias ostendam. Hinc jam facile fuit Vietae sua praecepta de legibus Homogeneorum aequationumque examine condere, quin et Geometriam ex Algebra et rursus hanc ex illa illustrare, dum magnitudines per lineas rectas, potestates autem per rectas in continua progressione geometrica assumtas exprimit. Idem Vieta egregium inventum primus dedit, analysin scilicet aequationum generalem numerosam, ut scilicet radices quadraticae, cubicae, biquadraticae, surdesolidae, et affectae ex termino absoluto aequationis numericae perinde extrahantur ac vulgo radicem puram quadraticam, cubicam etc. ex numero extrahere solemus vel exacte vel quantum satis per appropinquationem, quando exacta radix non datur. Ipse autem Analysi Algebraicae per se (abstrahendo animum ab applicatione ad numeros definitos et lineas) nihil Vieta adjecit nisi quod radices plures ejusdem aequationis et genesin aequationum ex multiplicatione radicum in se invicem cognovit, ut ex ejus Sectionibus angularibus, item et Tabula sub finem operis posita intelligi potest. Caeterum Vietaea prosecuti sunt Alleaumius Andersonus, Alb. Girardus, Oughtredus, qui eleganter contraxit et plana reddidit aliasque notas compendiosas adjecit. Nec dubito quin praeclara quaedam ad Algebrae illustrationem pertinentia lateant in schedis Joachimi Jungii Lubecensis, viri excellentis (si quid ego judicare possum) cum Galilaeo et Cartesio conferendi, inter . . . . *) Algebraici habentur.

Porro novam lucem Algebrae attulit Th. Harriotus Anglus; is occasione eorum ut arbitror quae ex Nonio de divisoribus ultimi termini et ex Vieta de pluribus radicibus ejusdem aequationis

---

*) Schadhafte Stelle des Manuscripts.

paulo ante retulimus, cogitavit aequationes posse concipi tanquam formulas aequales nihilo, et ita produci altiores ex inferioribus in se invicem ductis, adeoque ex multiplicatione tot aequationum radicalium in se invicem, quot dimensionum est aequatio, ipsam aequationem generari. Hinc praecepta de numero radicum aequationis, de discernendis radicibus positivis et privativis, de radicum auctione et diminutione, multiplicatione et divisione, de depressione aequationum per divisionem, itemque de Aequationibus Canonicis seu generalibus, ex quarum signis et terminis datae aequationis natura, constitutio et genesis, numerusque radicum realium, positivarum, privativarum cognosci possit. Quae quidem omnia non nominato Harrioto in sua Geometria exhibuit Cartesius, Wallisio aliisque multis Harriotum exscripsisse non immerito visus, usque adeo enim omnia consentiunt ut in difficilioribus quae Harriotus inexplicata reliquit etiam Cartesius substiterit. Circa eadem tempora..... Fermatius in suprema curia Tolosana Senator feliciter prima fundamenta jecit pulcherrimae Methodi de maximis et minimis, quibus postea Huddenius et Slusius, excellentes Geometrae, inaedificaverunt; ego vero ni fallor edito in Actis Eruditorum schediasmate nuper mense... anni... colophonem imposui effecique invento novo calculi differentialis, ut jam fractas, irrationales et transcendentes non moretur quarum alias sublatio calculi laborem in immensum auget, praeterquam quod transcendentes non semper tolli possunt, quem fructum meae methodi nuper Joh. Craigius Scotus in erudito de Quadraturis libro agnovit et praedicavit.

Is status erat Algebrae, quando in scenam prodiit vir utique insignis Renatus Cartesius, edita Geometria quae licet sit egregia, tamen longe infra opinionem posita est, quam de ea vulgus concepit. Nam ipsi quidem Algebrae nihil plane quod sciam adjecit alicujus momenti, nisi forte quod comparationem aequationum (Vietae et anterioribus non ignotam) reddidit expeditiorem ac frequentius inculcavit. Circa applicationem tamen Algebrae ad Geometriam id unice in Cartesio laudo, quod linearum curvarum etiam altiorum graduum naturas aequationibus expressit. Poterat hoc et Vieta, quis dubitat? sed ille Veterum praejudicium secutus constructiones quae earum ope fiunt, tanquam parum Geometricas spernebat, quanquam et Cartesius postea eundem errorem erraverit, dum lineas illas Geometria exclusit, quae Algebrae communis calculo exprimi non possunt, et perinde locutus est ac si omnia

Geometriae problemata ad aequationes certi gradus revocari possent. Ex Cartesianae Methodi sectatoribus nemo quod sciam aliquid valde memorabile adjecit Algebrae, praeter Johannem Huddenium et Renatum Franciscum Slusium. Huddenii duae Epistolae perbreves magnam profundarum inquisitionum vim complectuntur. Slusius evitata ultima aequatione unius incognitae docuit facilius solvi problemata per loca seu per duarum incognitarum aequationes duas, Veterum artificia ad novas methodos recte accommodans. Cum vero interim et inventa Geometrica Cavalerii, Gregorii a S. Vincentio ac Guldini increbrescerent, quibus Archimedeae artes detectae sunt, mox in illis alii analytices Algebraicae beneficio multo longius processere, ex quibus excellunt Fermatius, Robervallius, Torricellius, Hugenius, Pascalius, Wallisius, Wrennus, Brounkerus, cum Heuratio Neilius, Jac. Gregorius, Barrovius, quorum praeclara inventa cum fere Geometrica potius sint quam Algebraica, nunc non membro. Nisi quod Wallisius edita Arithmetica infinitorum aliis egregiis meditationibus praelusit, quae antequam persequar, redeundum mihi est ad Johannem Pellium Anglum, Mathematicum plane insignem, qui jam antequam Cartesius increbresceret Algebraicum calculum suo quodam peculiari modo ordinavit pulchra et commoda ratione, cujus specimina extant in eleganti Algebra Joh. H. Rahnii Helvetii Germanice edita. Eundem Pellium audio habere modum aequationes omnis generis eo reducendi ut solvi possint per Tabulas Sinuum et Logarithmorum, quod si commode fieri potest, ego magni faciendum putarem, vereor tamen ut semper procedat. Novam porro lucem Algebrae et Geometriae attulit Methodus per series infinitas, cujus primus quod sciam specimen insigne dedit Nicolaus Mercator Holsatus, Geometra et Astronomus plane eximius, in Logarithmotechnia; sed longius rem provexit Johannes Neutonus Anglus, praestantissimi ingenii Mathematicus, qui ex quacunque aequatione radicem extrahit ope seriei infinitae. Ego vero ad series infinitas diversa plane ratione perveni, specimenque satis hodie notum dedi circa Circuli magnitudinem. Aliaque habeo, quibus series infinitae ni fallor in immensum promoventur. Multa etiam circa summas serierum vel progressionum sive finitarum sive infinitarum exhibendas reperi aliisque variis modis Algebram locupletavi. Pro literis Numeros (sed supposititios sive fictos) postliminio in Algebram reduxi multiplici fructu, quorum unus est quem supra tetigi quod ita semper calculum in numeris

possum examinare, imo per abjectionem novenarii, quod continue ad quamvis novam operationem faciendo, errores calculi, quibus nihil est molestius, mirifice praecaventur. Excogitato calculo differentiali......*) Tetragonisticum voco, Theoremata........... circa tangentes et quadraturas et his cognata, quae alii per lineas difficulter extuderunt, nullo negotio per singularem calculandi rationem antea ignotam exhibeo et in immensum augere possum, eaque ratione ni fallor Geometriam illam abstrusiorem ad alium plane statum traduxi. Deinde ut meam Machinam Arithmeticam taceam, quae a Baculis Neperianis toto genere differt, et multiplicationes (verbi gratia) nullis intervenientibus additionibus exhibet, aliud reperi diversae naturae instrumentum mire simplex et admodum parabile, quo omnes aequationes utcunque affectae sive lineares sive numericae, quae pro magnitudine instrumenti certum gradum non excedunt, solvuntur. Proposui et modum condendi certas Tabulas, quae idem quodammodo praestarent in Algebra quod Tabulae sinuum et logarithmorum in Trigonometria, et laborem calculi valde levarent, iisque habitis multa primo aspectu dignoscerentur. Praeterea novum plane aditum aperui Algebrae transcendentis, hactenus incognitae, in qua quantitates etiam quas communis calculus exprimere non potest designantur per aequationes finitas quidem, sed gradus indefiniti, ubi ipsa quantitas incognita ingreditur in exponentem. Verbi gratia $x^x + x$ aqu. 30, cui aequationi (quae gradus est indefiniti) satisfacit x aequ. 3, quia tertia potestas de 3 addita ad 3 facit 30. Sed plerumque valor nisi in transcendentibus impossibilis est, licet per Geometriam transcendentem, imo et per numeros appropinquantes exhiberi possit. Multa etiam alia in hoc studiorum genere habeo, sed quae nunc enumerare longum foret. Et jam finiendum est, ubi illud tantum subjecero, Carolum Renaldinum, apud Patavinos Professorem Medicum, multiplicis et accuratae doctrinae virum, duo volumina in folio, ut vocant, bonae frugis plena edidisse de Resolutione et Compositione Mathematica, quibus et communem et speciosam Algebram complexus est. Sed et Joh Kersey Anglum laudata industria quoddam Algebrae corpus edidisse, cui vellem ex Joh. Collinii, non tantum in his studiis versatissimi, sed et ad instar Mersenni cujusdam Angli aliorum in-

*) Das Manuscript ist an dieser Stelle schadhaft.

dustriam excitantis et inventa conservantis promoventisque, instructissima penu non vulgaria hujus artis locupletamenta accessissent. Novissime Historiam Algebrae, inspersis praeceptis variisque inventis suis, justo opere dedit celeberrimus Wallisius, cui quemadmodum jam supra notavimus, haec studia multum debent. Quae nos his cogitatis ejus et narrationibus adjecerimus, conferendo intelligentur.

XIX.

REMARQUE SUR UN ENDROIT DES NOUVEAUX ELEMENS D'ALGEBRE DE Mr. OZANAM.

L'Algèbre de Mr. Ozanam, que je viens de recevoir, me paroit bien meilleure que la plûpart de celles qu'on a vûes depuis quelque temps, qui ne font que copier Descartes et ses Commentateurs. Je suis bien aise qu'il fasse revivre une partie des préceptes de Viete, inventeur de la Spécieuse, qui méritoient de n'être point oubliés. On y trouve de plus quelques adresses très utiles dans les problémes à la mode de Diophante. C'est fort bien fait aussi qu'il cherche de pousser les divisions, qui se doivent faire par des Polynomes irrationels, ou d'ôter l'asymmetrie du Dénominateur d'une fraction, en le multipliant aussi-bien que le Numerateur, par une formule, laquelle, avec le Dénominateur, fait un produit rationel, et par conséquent de résoudre ce problème très utile: Trouver une formule, par laquelle multipliant un Polynome irrationel donné, le produit devienne rationel. Mais il s'est arrété en beau chemin, ayant crû (p. 77) que cela n'allait que jusqu'aux Quadrinomes dans les racines quarrées. C'est pourquoi je veux en donner la solution dans le Pentanome ou Quinome, comme il l'appelle, afin de l'encourager, ou quelqu'autre qui en aura le loisir à achever cette recherche qui le mérite assez.

Soit un Quinome $a+b+c+d+e$, où j'entends par ces lettres des quantités dont les quarrés sont rationels, par exemple $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$. Multiplions le Quinome proposé par $a+b+c-d-e$, et il vient $2ab+2ac+2bc-2de+mm$, supposant

$mm = aa + bb + cc - dd - ee$. Il est vrai que ce produit est encore un Quinome en effet; mais nous corrigerons ce défaut dans la suite. Multiplions ce produit par $2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm$, et il proviendra $-n^4 + 4mmde + 8abc(a+b+c)$, supposant $n^4 = m^4 - 4aabb - 4aacc - 4bbcc + 4ddee$. Ainsi ce produit nous est venu en multipliant le Quinome proposé par $a+b+c-d-e$, et en multipliant ce qui en vient, encore par $2ab+2ac+2bc+2de-mm$, ou en multipliant le Quinome proposé tout d'un coup par $(a+b+c-d-e)(2ab+2ac+2bc+2de-mm)$. Mais si au lieu de cela on multiplioit le Quinome proposé par $(a+b+c-d-e)(2ab+2ac+2bc+2de-mm)-8abc$, il est visible qu'il proviendroit $-n^4 + 4mmde + 8abc(a+b+c) - 8abc(a+b+c+d+e)$, c'est-à-dire $-n^4 + 4mmde - 8abc(d+e)$. Ce qui est un Quadrinome, et nous avons gagné. Mais qui plus est, ce Quadrinome a l'avantage de pouvoir être reduit d'abord au binome, en employant la seule multiplication par son contraire, sans passer par le trinome: et ainsi nous rattrappons ce que nous avions été obligés de perdre au commencement par une multiplication qui n'avançait pas d'abord. Car multipliant ce produit par $-n^4 + 4mmde + 8abc(d+e)$, il nous viendra $p^8 - 8q^6de$, supposant $p^8 = n^8 + 16m^4ddee - 64aabbcc(dd+ee)$, et $q^6 = mmn^4 + 16aabbcc$. Et ce produit étant enfin multiplié par $p^8 + 8q^6de$, nous aurons une quantité délivrée de l'asymmetrie, qui est $p^8 - 64q^{12}ddee$. Ce qu'il fallait faire. Et ce produit nous vient en multipliant le Quinome $a+b+c+d+e$ par le produit de ces trois quantités: $(a+b+c-d-e)$, $(2ab+2ac+2bc+2de-mm)$ $-8abc$, $-n^4 + 4mmde + 8abc(d+e)$, $p^8 + 8q^6de$.

Il y a démonstration que tout polynome, quelque puisse être le nombre et quelle que puisse être l'espèce des racines, pourra toujours être multiplié par une telle formule, que le produit soit rationel. Et en poussant le calcul des canons, on y trouvera une progression réglée qui nous épargnera la peine d'aller plus loin. J'appelle Canons, des formules générales, qui donnent d'abord ce qu'on demande. Par exemple, à l'égard des racines quarrées, il y aura

dans le Binome $a+b$, $a-b = aa - bb$

dans le Trinome $a+b+c$,	a^3	$-aab+2abc =$	a^4	$-2aabb$
	b^3	abb	b^4	$2aacc$
	c^3	aac	c^4	$2bbcc$
		acc		
		bbc		
		bcc		

Et non pourra calculer des canons semblables pour le Quadrinome, Quinome etc., ce qui donnera enfin la règle de la progression, qui est le canon des canons. J'ai coutoume de me servir d'expressions abrégées; par exemple, en disant dans le trinome $a, a^3 - aab + 2abc = a^4 - 2aabb$.

XX.

MONITUM DE CHARACTERIBUS ALGEBRAICIS.

Quoniam variant Geometrae in characterum usu, nova praesertim Analysi inventa, quae res legentibus non admodum provectis obscuritatem parit; ideo e re visum est exponere, quomodo Characteres adhibeantur Leibnitiano more, quem in his Miscellaneis secuturi sumus.

Literae minusculae a, b, x, y solent significare magnitudines, vel quod idem est, numeros indeterminatos; majusculae vero, ut A, B, X, Y puncta figurarum; ita ab significat factum ex a in b, sed AB rectam a puncto A ad punctum B ductam. Huic tamen observationi adeo alligati non sumus, ut non aliquando minusculas pro punctis, majusculas pro numeris vel magnitudinibus usurpemus, quod facile apparebit ex modo adhibendi. Solent etiam literae priores, ut a, b, pro quantitatibus cognitis vel saltem determinatis adhiberi, sed posteriores, ut x, y, pro incognitis vel saltem pro variantibus.

Interdum pro literis adhibentur Numeri, sed qui idem significant quod literae, utiliter tamen ursurpantur relationis exprimendae gratia. Exempli causa, sint binae aequationes generales secundi gradus pro incognita x, eas sic exprimere licebit: $10xx + 11x + 12 = 0$ et $20xx + 21x + 22 = 0$. Ita in progressu calculi ex ipsa notatione apparet quantitatis cujusque relatio, nempe 21 (ex gr.) per notam dextram quae est 1 agnoscitur esse coefficiens ipsius x simplicis, at per notam sinistram 2 agnoscitur esse ex aequatione ae-

cunda. Sed et servatur lex quaedam homogeneorum. Et ope harum duarum aequationum tollendo x prodit aequatio, in qua similiter se habere oportet 10, 11, 12 et 12, 11, 10; item 20, 21, 22 et 22, 21, 20; et denique 10, 11, 12 se habent ut 20, 21, 22, id est si pro 10, 11, 12 substituas 20, 21, 22, et vice versa, manet eadem aequatio. Idemque est in caeteris. Tales numeri tractantur ut literae, veri autem numeri, discriminis causa, parenthesibus includuntur vel aliter discernuntur. Ita in tali sensu 11.20 significat numeros indefinitos 11 et 20 in se invicem ductos, non vero significat 220, quasi essent numeri veri. Sed hic usus ordinarius non est, rariusque adhibetur.

Signa, Additionis nimirum et Subtractionis, sunt + plus, — minus, ± plus vel minus, ∓ priori oppositum minus vel plus. At (±) vel (∓) est nota ambiguitatis signorum, independens a priori, et ((±)) vel ((∓)) alia independens ab utraque. Differt autem Signum ambiguum a Differentia quantitatum, quae etsi aliquando incerta, non tamen ambigua est. Sic ±5∓3 (ubi signa adhibentur ambigua) significat vel +5 — 3, id est 2, vel —5 + 3, id est —2. Sed si differentia exprimenda sit inter a et b, non sufficit scribere ±a∓b; si enim sic pro a et b substituas 5 et 3, patet hoc modo non semper prodire differentiam +2, sed vel +2 vel —2. Sed differentia inter a et b significat a—b si a sit majus, et b—a si b sit majus, quod etiam appellari potest moles ipsius a—b, intelligendo (exempli causa) ipsius +2 et ipsius —2 molem esse eandem, nempe +2; ita si a—b vocemus c, utique mol. c seu moles ipsius c erit +2, quae est quantitas affirmativa, sive c sit affirmativa sive negativa, id est sive sit c idem quod +2, sive c sit idem quod —2. Et quantitates duae diversae eandem molem habentes semper habent idem quadratum.

Multiplicationem plerumque significare contenti sumus per nudam appositionem; sic ab significat a multiplicari per b. Numeros multiplicantes solemus praefigere; sic 3a significat triplum ipsius a. Interdum tamen punctum vel comma interponimus inter multiplicans et multiplicandum, velut cum 3,2 significat 3 multiplicari per 2, quod facit 6, si 3 et 2 sunt numeri veri; et AB, CD significat rectam AB duci in rectam CD atque inde fieri rectangulum. Sed et commata interdum hoc loco adhibemus utiliter, velut a,b + c, vel AB,CD+EF, id est, a duci in a+b, vel AB in CD+EF; sed de his mox, ubi de vinculis. Porro propria

nota Multiplicationis non solet esse necessaria, cum plerumque appositio, qualem diximus, sufficiat. Si tamen utilis aliquando sit, adhibebitur potius $\frown$ quam $\times$, quia hoc ambiguitatem parit, et ita AB $\frown$ CD significabit AB duci in CD.

Divisio significatur interdum more vulgari per subscriptionem divisoris sub ipso dividendo, intercedente linea; ita a dividi per b significatur vulgo per $\frac{a}{b}$; plerumque tamen hoc evitare praestat, efficereque ut in eadem linea permaneatur, quod fit interpositis duobus punctis, ita ut a:c significet a dividi per b. Quodsi a:b rursus dividi debeat per c, poterimus scribere a:b,:c vel (a:b):c. Etsi enim res hoc casu (sane simplici) facile aliter exprimi posset, fit enim a:(bc) vel a:bc, non tamen semper divisio actu ipso facienda est, sed saepe tantum indicanda, et tunc praestat operationis dilatae processum per commata vel parentheses indicari.

Cum idem multiplicatur per se ipsum, prodeunt Potentiae earumque notae seu Exponentes. Ita pro aa scribi etiam potest a^2, et pro aaa scribetur a^3, et ita porro. Interdum et scribitur: qu. AB, idque idem est quod quadratum rectae AB seu AB.AB; et cub. AB idem est quod AB, AB, AB vel $(AB)^3$. Et exponens interdum lineolis includitur hoc modo $\overline{\underline{|3|}}(AB+BC)$, quo significatur cubus rectae AB+BC. Exponens etiam interdum est indeterminatus, et significatur per literam, velut a^e, ubi non determinatur utrum e significet 2 an 3 vel alium numerum quemvis; et talis exponens interdum fit compositus, exempli gratia si a^e multiplices per a^n, productum erit $a^{\underline{e+n}}$, et utiliter interdum lineola subducitur, ne literae exponentiales aliis confundantur; posset etiam scribi $\overline{\underline{|e+n|}}\,a$.

Contrarium potentiarum sunt Radices, nam ut $\underline{|3}\,a$ est a^3 vel aaa, ita $\sqrt[3]{(a^3)}$ vel $\sqrt{(\overset{\frown}{\underset{\smile}{3}})}(a)^3$ rursus est a. Nota $\sqrt{\ }$ significat radicem, et si simpliciter scribimus nullo numero adjecto, significat radicem quadraticam, velut $\sqrt{2}$ significat radicem quadraticam ex numero 2, sed $\sqrt[3]{2}$ vel $\sqrt{(\overset{\frown}{\underset{\smile}{3}})}2$ significat radicem cubicam ex eodem numero, et $\sqrt[e]{2}$ vel $\sqrt{(\overset{\frown}{\underset{\smile}{e}})}2$ significat radicem indeterminati gradus e ex 2 extrahendam. Interim notandum est, certo sensu radices posse sub potentiis comprehendi, ut numeri fracti continentur sub numeris. Et generaliter, si sit potentia data a^e et e significet numerum ne-

gativum, prodit divisio; ponatur enim e idem esse quod —n, utique a^e vel a^{-n} vel $\overline{\lceil -n}$ a idem erit quod 1 : a^n. Quodsi e sit idem quod 1 : n seu a^e idem quod $a^{1:n}$, fiet a^e idem quod $\sqrt{(n)a}$, adeoque hoc idem est quod $\overline{\lceil 1:n}$ a.

His notis formantur varii termini, nempe integri iique affirmativi aut negativi; fracti item, ac denique surdi. Sed quia hi omnes sunt vel simplices vel variis modis compositi et ex membris conflati, hinc opus est **vinculis** quibusdam ad compositionem indicandam. Pro vinculis vulgo solent adhiberi ductus linearum, sed quia lineis una super alia ductis saepe nimium spatii occupatur, aliasque ob causas commodius plerumque adhibentur commata et parentheses. Sic $a, \overline{b+c}$ idem est quod a, b+c vel a(b + c), et $\overline{a+b}, \overline{c+d}$ idem est quod a + b, c + d vel (a+b) (c+d), id est +a+b multiplicatum per c + d. Et similiter vincula in vinculis exhibentur. Ita $\underline{a,bc+e\overline{f+g}}$ etiam sic exprimetur a(bc + e(f + g)), et $a\,\overline{bc+e\overline{f+g}+hlmn}$ potest etiam sic exprimi (a(bc+e(f+g))+hlm)n. Quod de vinculis multiplicationis, idem intelligi potest de **vinculis divisionis**; exempli gratia

$$\frac{\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}+\dfrac{e}{f+g}}+\dfrac{h}{\left(\dfrac{l}{n}\right)}}{n}$$ sic scribetur in una linea

(a:((b:c)+(e:,f+g))+h:(l:m)):n, nihilque in his est difficultatis, modo teneamus, quicquid parenthesin aliquam implet pro una quantitate haberi, tanquam litera vel numerus pro eo poneretur; idemque est de parenthesi aliam parenthesin includente, ut fit in radicibus quam universales olim vocabant exprimendis. Idemque igitur locum habet in vinculis extractionis radicalis. Sic $\sqrt{a^4+bc\sqrt{\overline{ef+g}}}$ idem est quod $\sqrt{}(a^4+bc\sqrt{}(e(f+g)))$ vel $\sqrt{}(a^4+bc(e,f+g))$, et pro

$$\frac{\sqrt{aa+b\sqrt{cc+dd}}}{e+\sqrt{f\sqrt{gg+hh}+kk}}$$ scribi poterit

$\sqrt{}(aa+b\sqrt{}(cc+dd)):,e+\sqrt{}(f\sqrt{}(gg+hh)+kk)$.

Hactenus notas exposuimus, quibus termini, id est numeri vel quantitates formantur, tanquam subjecta aut praedicata in veritatibus. Sequuntur notae quae explicant modum praedicationis, seu quomodo quantitates quae Terminos constituunt in propositiones conjungantur; potissimum autem de iis enuntiatur, **Aequales**

esse, vel majores vel minores aliis; itaque $a=b$ significat a esse aequale ipsi b, et $a \sqsupset b$ significat a esse majus quam b, et $a \sqsubset b$ significat a esse minus quam b.

Sed et Proportionalitas vel analogia de quantitatibus enuntiatur, id est rationis identitas, quam possumus in Calculo exprimere per notam aequalitatis, ut non sit opus peculiaribus notis. Itaque a esse ad b sic ut l ad m sic exprimere poterimus $a:b=l:m$, id est $\frac{a}{b}=\frac{l}{m}$. Nota continue proportionalium erit $\div\!\!\div$, ita ut $\div\!\!\div$ a.b.c etc. sint continue proportionales.

Interdum nota Similitudinis prodest, quae est $\sim$; item nota similitudinis et aequalitatis simul seu nota congruitatis $\simeq$. Sic $DEF \sim PQR$ significabit Triangula haec duo esse similia, at $DEF \simeq PQR$ significabit congruere inter se. Hinc si tria inter se habeant eandem rationem quam tria alia inter se, poterimus hoc exprimere nota similitudinis, ut $a;\ b;\ c \sim l;\ m;\ n$, quod significat esse a ad b ut l ad m, et a ad c ut l ad n, et b ad c ut m ad n.

Praeter aequalitatem, proportionalitatem et similitudinem occurrit interdum et ejusdem relationis consideratio quam significare licet nota $::$; exempli causa si sit $aa+ab=cc$ et simili forma $ll+lm=nn$, dici potest a, b, c habere inter se eandem relationem quam habent l, m, n, seu $a;\ b;\ c :: l;\ m;\ n$, id est, datur quaedam relatio inter a, b, c, in qua si pro his respective substituas l, m, n, vera manet enuntiatio. Unde patet, relationis convenientiam ad certam quandam referendi formam pertinere neque omnimodam semper in ipsis terminis relationum similitudinem inferre, ex. gr. si a, b, c se habeant invicem ut sinus totus, sinus rectus et sinus complementi, et l, m, n se itidem hoc modo inter se habeant, dici ob eam rem poterit esse $a;\ b;\ c :: l;\ m;\ n$. Sed hoc relativum est ad certum modum referendi.

Quas exposuimus Notas, ad Analysin communem pertinent seu ad Scientiam Finiti; sed novae adjectae sunt Notae, per detectam nuper Scientiam infiniti seu Analysin infinitesimalem quae potissimum versatur in differentiis et summis. Hic dx significat elementum, id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis x (continue) crescentis. Vocatur et differentia, nempe inter duas proximas x elementariter (seu inassignabiliter) differentes, dum una fit ex altera (momentanee) crescente vel decrescente; similiter d(xy) est tale elementum quantitatis

xy (continue) crescentis, quod explicatum dat $xdy + ydx$. Porro ddx est elementum elementi seu differentia differentiarum, nam ipsa quantitas dx non semper constans est, sed plerumque rursus (continue) crescit aut decrescit. Et similiter procedi potest ad $dddx$ seu d^3x, et ita porro; imo potest occurrere $d^e x$, cum exponens differentiae est indeterminatus.

Contrarium ipsius Elementi vel differentiae est summa, quoniam quantitate (continue) decrescente donec evanescat, quantitas ipsa semper est summa omnium differentiarum sequentium, ut adeo $d\int ydx$ idem sit quod ydx. At $\int ydx$ significat aream quae est aggregatum ex omnibus rectangulis, quorum cujuslibet longitudo (assignabilis) est y aliqua, et latitudo (elementaris) est dx ipsi y ordinatim respondens. Dantur et summae summarum, et ita porro, ut si sit $\int dz \int ydx$, significatur solidum quod conflatur ex omnibus areis, qualis est $\int ydx$, ordinatim ductis in respondens cuique elementum dz.

XXI.

EXPLICATION DE L'ARITHMETIQUE BINAIRE, QUI SE SERT DES SEULS CARACTÈRES 0 ET 1, AVEC DES REMARQUES SUR SON UTILITÉ, ET SUR CE QU'ELLE DONNE LE SENS DES ANCIENNES FIGURES CHINOISES DE FOHY.

Le calcul ordinaire d'Arithmétique se fait suivant la progression de dix en dix. On se sert de dix caractères, qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui signifient zero, un et les nombres suivans jusqu'à neuf inclusivement. Et puis allant à dix, on recommence, et on écrit dix par 10, et dix fois dix ou cent par 100, et dix fois cent ou mille par 1000, et dix fois mille par 10000, et ainsi de suite.

Mais au lieu de la progression de dix en dix, j'ai employé depuis plusieurs années la progression la plus simple de toutes, qui va de deux en deux, ayant trouvé qu'elle sert à la perfection de

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	0	1	1	3
0	0	0	1	0	0	4
0	0	0	1	0	1	5
0	0	0	1	1	0	6
0	0	0	1	1	1	7
0	0	1	0	0	0	8
0	0	1	0	0	1	9
0	0	1	0	1	0	10
0	0	1	0	1	1	11
0	0	1	1	0	0	12
0	0	1	1	0	1	13
0	0	1	1	1	0	14
0	0	1	1	1	1	15
0	1	0	0	0	0	16
0	1	0	0	0	1	17
0	1	0	0	1	0	18
0	1	0	0	1	1	19
0	1	0	1	0	0	20
0	1	0	1	0	1	21
0	1	0	1	1	0	22
0	1	0	1	1	1	23
0	1	1	0	0	0	24
0	1	1	0	0	1	25
0	1	1	0	1	0	26
0	1	1	0	1	1	27
0	1	1	1	0	0	28
0	1	1	1	0	1	29
0	1	1	1	1	0	30
0	1	1	1	1	1	31
1	0	0	0	0	0	32

etc.

la science des Nombres. Ainsi je n'y employe point d'autres caractères que que 0 et 1, et puis allant à deux, je recommence. C'est pourquoi deux s'écrit ici par 10, et deux fois deux ou quatre par 100, et deux fois quatre ou huit par 1000, et deux fois huit ou seize par 10000, et ainsi de suite. Voici la Table des Nombres de cette façon, qu'on peut continuer tant que l'on voudra.

On voit ici d'un coup d'oeil la raison d'une proprieté célèbre de la progression Géométrique double en Nombres entiers, qui porte que si on n'a qu'un de ces nombres de chaque degré, on en peut composer tous les autres nombres entiers au dessous du double du plus haut degré. Car ici, c'est comme si on disait par exemple, que 111 ou 7 est la somme de quatre, de deux et un, et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre et un. Cette proprieté sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids et pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de pièces.

100	4
10	2
1	1
111	7

1000	8
100	4
1	1
1101	13

Cette expressions des Nombres étant établie, sert à faire très facilement toutes sortes d'opérations.

Pour l'Addition par exemple.	110	7	101	5	1110	14
	111	6	1011	11	10001	17
	..		....			
	1101	13	10000	16	11111	31
Pour la Soustraction.	1101	13	10000	16	11111	31
	111	7	1011	11	10001	17
	110	6	101	5	1110	14

Pour la Multiplication. ⊙

```
  11 | 3      101 | 5       101 | 5
  11 | 3       11 | 3       101 | 5
  --   -      ---   -       ---   -
  11          101           101
 11          101           1010
----   -    ----   --     -----   --
1001 | 9    1111 | 15     11001 | 25
```

Pour la Division.

```
15 | 1111 | 101 | 5
 3 | 1111
     11
```

Et toutes ces opérations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non plus de rien apprendre par coeur ici, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut savoir, par exemple, que 6 et 7 pris ensemble font 13, et que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table d'une fois un est un, qu'on appelle Pythagorique. Mais ici tout cela se trouve et se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précédens sous les signes ☽ et ⊙.

Cependant je ne recommande point cette manière de compter, pour la faire introduire à la place de la pratique ordinaire par dix. Car outre qu'on est accoutumé à celle-ci, on n'y a point besoin d'y apprendre ce qu'on a déjà appris par coeur: ainsi la pratique par dix est plus abregée, et les nombres y sont moins longs. Et si on étoit accoutumé à aller par douze ou par seize, il y auroit encore plus d'avantage. Mais le calcul par deux, c'est-à-dire par 0 et par 1, en récompense de sa longueur, est le plus fondamental pour la science, et donne de nouvelles découvertes, qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, et surtout pour la Géométrie, dont la raison est que les nombres étant reduits aux plus simples principes, comme 0 et 1, il paroit partout un ordre merveilleux. Pour exemple, dans la Table même des Nombres, on voit en chaque colonne régner des périodes qui recommencent toujours. Dans la première colonne c'est 01, dans la seconde 0011, dans la troisième 00001111, dans la quatrième 0000000011111111, et ainsi de suite. Et on a mis de petits zéros dans la Table pour remplir le vuide au commencement de la colonne, et pour mieux marquer ces périodes. On a mené aussi des lignes dans la Table, qui marquent que ce que ces lignes renferment revient toujours sous elles. Et il se trouve encore que les Nombres Quarrés, Cubiques et d'autres puis-

sances, item les Nombres Triangulaires, Pyramidaux et d'autres nombres figurés, ont aussi de semblables périodes, de sorte qu'on en peut écrire les Tables tout de suite, sans calculer. Et une prolixtié dans le commencement, qui donne ensuite le moyen d'epargner le calcul et d'aller à l'infini par règle, est infiniment avantageuse.

Ce qu'il y a de surprenant dans ce calcul, c'est que cette Arithmétique par 0 et 1 se trouve contenir le mystère des lignes d'un ancien Roi et Philosophe nommé Fohy, qu'on croit avoir vécu il y a plus de quatre mille ans et que les Chinois regardent comme le Fondateur de leur Empire et de leurs sciences. Il y a plusieurs figures linéaires qu'on lui attribue, elles reviennent toutes à cette Arithmétique; mais il suffit de mettre ici la Figure de huit Cova comme on l'appelle, qui passe pour fondamentale, et d'y joindre l'explication qui est manifeste, pourvû qu'on remarque premièrement qu'une ligne entière — signifie l'unité ou 1, et secondement qu'une ligne brisée -- signifie le zéro ou 0.

¦¦¦	000	0	0
¦¦│	001	1	1
¦│¦	010	10	2
¦││	011	11	3
│¦¦	100	100	4
│¦│	101	101	5
││¦	110	110	6
│││	111	111	7

Les Chinois ont perdu la signification des Cova ou Linéations de Fohy, peut-être depuis plus d'un millenaire d'années, et ils ont fait des Commentaires la-dessus, où ils ont cherché je ne sçai quels sens éloignés, de sorte qu'il a fallu que la vraie explication leur vint maintenant des Européens. Voici comment: Il n'y a guères plus de deux ans que j'envoyai au R. P. Bouvet, Jésuite Français célèbre, qui demeure à Pekin, ma manière de compter par 0 et 1, et il n'en fallut pas davantage pour lui faire reconnaitre que c'est la clef des figures de Fohy. Ainsi m'écrivant le 14 Novembre 1701, il m'a envoyé la grande figure de ce Prince Philosophe qui va à 64, et ne laisse plus lieu de douter de la vérité de notre interprétation, de sorte qu'on peut dire que ce Père a déchiffré l'enigme de Fohy, à l'aide de ce que je lui avois communiqué. Et comme ces figures sont peut-être le plus ancien monument de

science qui soit au monde, cette restitution de leur sens, après un si grand intervalle de tems, paroitra d'autant plus curieuse.

Le consentement des figures de Fohy et ma Table des Nombres se fait mieux voir, lorsque dans la Table on supplée les zéros initiaux, qui paroissent superflus, mais qui servent à mieux marquer la période de la colonne, comme je les y ai supplées en effet avec des petits ronds pour les distinguer des zéros nécessaires, et cet accord me donne un grande opinion de la profondeur des méditations de Fohy. Car ce qui nous paroit aisé maintenant, ne l'étoit pas tout dans ces tems éloignés. L'Arithmétique Binaire ou Dyadique est en effet fort aisée aujourd'hui, pour peu qu'on y pense, parce que notre manière de compter y aide beaucoup, dont il semble qu'on retranche seulement le trop. Mais cette Arithmétique ordinaire pour dix ne paroit pas fort ancienne, au moins les Grecs et les Romains l'ont ignorée et ont été privés de ses avantages. Il semble que l'Europe en doit l'introduction à Gerbert, depuis Pape sous le nom de Sylvestre II, qui l'a eue des Maures d'Espagne.

Or comme l'on croit à la Chine que Fohy est encore auteur des caractères Chinois, quoique fort altérés par la suite des tems; son essai d'Arithmétique fait juger qu'il pourroit bien s'y trouver encore quelque chose de considerable par rapport aux nombres et aux idées, si l'on pouvoit déterrer le fondement de l'écriture Chinoise, d'autant plus qu'on croit à la Chine, qu'il a eu égard aux nombres en l'établissant. Le R. P. Bouvet est fort porté à pousser cette pointe, et très capable d'y réussir en bien des manières. Cependant je ne sçai s'il y a jamais eu dans l'écriture Chinoise un avantage approchant de celui qui doit être necessairement dans une Caractéristique que je projette. C'est que tout raisonnement qu'on peut tirer des notions, pourroit être tiré de leurs Caractères par une manière de calcul, qui seroit un des plus importans moyens d'aider l'esprit humain.

XXII.

DE DYADICIS.

§ 1. Definitio. Numerus dyadice expressus est dcba, si idem significet quod simul sumti $\left\{\begin{array}{l} a \\ b0 \\ c00 \\ d000 \end{array}\right.$ et b0 idem sit quod bis b, et c00 idem quod bis bina c seu quater c, et d000 idem quod bis quaterna d seu octies d, et ita porro.

§ 2. Itaque 10 est 2, et 100 est 4, et 1000 est 8, et 10000 est 16, et ita porro. Patet ex praecedenti, si pro a, b, c, d ponatur 1, 1, 1, 1, et generaliter Numerus progressionis Geometricae a binario incipientis exprimitur dyadice per unitatem tot nullitatibus praefixam, quot sunt unitates in progressionis Geometricae exponente seu $2^e = 10^e$, Tabulaque ita stabit:

1	1 =	2^0
10	2	2^1
100	4	2^2
1000	8	2^3
10000	16	2^4
100000	32	2^5
1000000	64	2^6
10000000	128	2^7
100000000	256	2^8
1000000000	512	2^9
10000000000	1024	2^{10}

§ 3. Omnis Numerus dyadice potest exprimi, nullas alias adhibendo notas quam 0 et 1. Nam cum omnis numerus fiat additione continua unitatum, et unitas unitati addita faciat 10, ut nempe 0 scribatur in sede ultima, et 1 in penultima seu penultimae addatur, ibi ergo scribetur, si illic sit 0 seu si vacet. Sed si ibi jam 1 inveniat, rursus mutabit in 0 facietque tantum 1 addi in antepenultima, ut prius in penultima, et ita porro de sede in sedem. Unde patet, si semel incipiamus ab 1, uti faciendum sane est, non posse alias prodire notas quam 0 et 1, promota tantum sede.

§ 4. Quoties unitas transferenda seu addenda est sedi sequenti ex praecedente, memoriae ergo in sequenti sede notetur

punctum, verb. gr. si 11 et 1 (seu 3 et 1) in unum addi debeant, utique in sede ultima 1 et 1 est 10, scribatur 0, notetur 1 per punctum in sede sequenti.

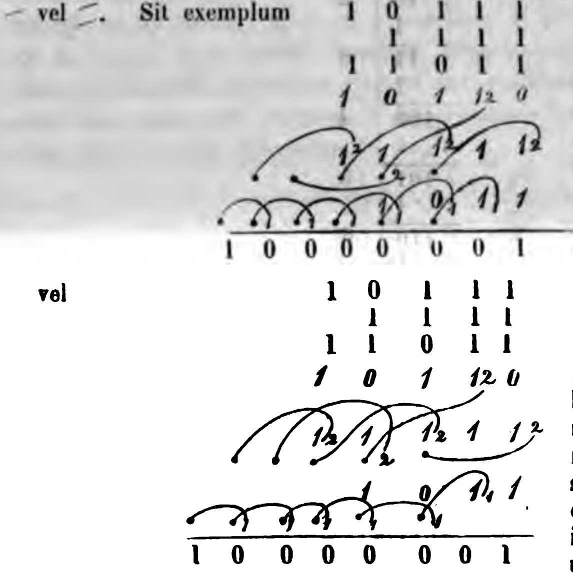
11
··1
100

Rursus in sede penultima 1 et 1 (nempe quia punctum ibi significat 1) fiet 10, scribatur 0 et notetur 1 in sede antepenultima. Jam in sede antepenultima non est nisi punctum seu unitas translata, quod significat 1 et fiet 100.

§ 5. Exhibeatur Generatio Numerorum per additionem unitatis continuam ab 1 ad 16:

0	0
1	1
1	
1	
10	2
1	
11	3
·1	
100	4
1	
101	5
·1	
110	6
1	
111	7
··1	
1000	8
1	
1001	9
·1	
1010	10
1	
1011	11
··1	
1100	12
1	
1101	13
·1	
1110	14
1	
1111	15
1	
10000	16

§ 7. Generalis praxis Additionis. Si sint quotcunque unitates in una sede expressae numero dyadico edcba, pro quavis ex his notis a, vel b, vel c, vel d, vel e etc. unitatem significante notetur punctum in sede tantum remota sinistrosum a sede praesente, quantum sedes notae remota est ab ultima, colligantur autem in ipsa sede praesente per ascriptas ultimae unitati cujusque progressionis duplae notas numerales vulgares. Hoc etiam observabo ut punctum in quavis columna fiat in primo loco, si est a columna proxime praecedente, in secundo si in altera, in tertio si in tertia, et ita porro, ita enim semper dignosci potest, unde punctum sit ortum, quod prodest revisioni nec possunt plura uno puncta incidere in eundem locum; praefero autem primum locum ab imo ascendendo. Pro notis numeralibus adhibere etiam licebit ⁔ vel ⩦. Sit exemplum



Lineas hic duxi a punctis ad numeros ex quibus oriuntur, ut rationem redderem processus, non quod his ductibus sit opus in praxi.

Praestat pro ⁔ vel ⩦ scribere 2 vel 3, sed malo quam I, ne confundatur I significans notam collectionis cum ipsa columnae unitate.

In columna ultima sumantur primum unitates maximi qui adest numeri progressionis duplae, nempe 4, et quartae seu ultimae ascribatur 2 (ob $4 = 2^2$) quod notat punctum signandum in columna abhinc secunda (nempe antepenultima), et quidem loco secundo seu inter notam ejus secundam et tertiam. Superest nullus amplius numerus progressionis duplae, sed 1, itaque debet 1 notari sub columna infra lineam sub omnibus columnis ductam. In columna penultima rursus ascribatur 2 unitati quartae et 1

secundae post hanc, nam $4=2^2$ et $2=2^1$. Et ob 2 notetur punctum in loco secundo columnae abhinc secundae, et ob 1 notetur punctum in loco primae columnae abhinc primae, et sub columna 0, quia nihil superest. In antepenultima seu 3tia eadem contingunt; in penantepenultima seu quarta rursus eadem, in antepenantepenultima seu quinta rursus eadem. In sexta occurrunt duae unitates, ergo secundae ascribo 1, et punctum signo in loco primae columnae primae abhinc, et sub columna sexta scribo 0. Eadem prorsus fient in 7ma columna. At in octava nil superest nisi 1, quae sub ea scribitur, et prodit 10000001.

§ 8. Subtractionis praxis haec est, ut si plura sint subtrahenda, vel subtrahantur sigillatim, vel prius addantur in unum, deinde summa subtrahatur. Utroque modo non nisi unius numeri subtractione est opus. Quo facto subtrahatur nota a nota ejusdem sedis, et si nota subtrahenda sit 1, sed ea a qua debet subtrahi sit 0, scribetur residuum 1, sed signetur punctum ad notam subtrahendi proxime sequentem, et si is jam sit unitas, iterum ad sequentem, et ita porro. Itaque ubi binae occurrunt unitates in subtrahendo, habentur pro 0, fietque subtractio non nisi 0 ab 1 vel 1 ab 1, ex quibus prior relinquit 1, posterior 0. Exempli gratia

```
1 1 0 1 0 0 1 1 0
  1 1 0 1 1 0 1 1
.  .    .  .    .  .
-------------------
  1 1 0 0 1 0 1 1
```

§ 9. Praxis Multiplicationis. Haec est facillima, quia notae multiplicantes sunt 0 et 1. Jam 0 in numerum multiplicandum facit 0, et 1 relinquit qualis erat. Sed 1 in sede secunda cum sit binarius, duplicat numerum multiplicandum, id est promovet in sedes proxime sequentes. Et 1 in sede tertia, cum sit quaternarius, quadruplicat numerum multiplicandum, id est promovet in sedes tertias, et ita porro.

```
      e d c b a
        1 1 0 1
    -----------
      e d c b a
  e d c b a 0
e d c b a
```

sepsum cum Fohianis characteribus animadvertit et ad me perscripsit, Tabula simul transmissa qua 64 characteres Fohiani tum in quadrato, tum rursus in circulo circumscripto continentur, hoc tantum discrimine, quod in quadrato ordinem nostrum sequuntur, in circulo vero semicirculus unus a summo descendens in sinistro latere continet characteres a 0 ad 31, sed alter semicirculus rursus a summo descendens in dextro latere continet characteres a 32 ad 63, ita enim sibi opponuntur e regione in eadem altitudine ii characteres qui non differunt nisi quod sinistrarum prima nota est 0 seu ⚋, dextrarum vero 1 seu ⚊. Ex. gratia 0 et 32, 1 et 33, 2 et 34

0	000000	100000	32
1	000001	100001	33
2	000010	100010	34
	etc.	etc.	

Ita mirum accidit, ut res ante ter et amplius annos nota in extremo nostri continentis oriente, nunc in extremo ejus occidente, sed melioribus ut spero auspiciis resuscitaretur. Nam non apparet, antea usum hujus characterismi ad augendam numerorum scientiam innotuisse. Sinenses vero ipsi ne Arithmeticam quidem rationem intelligentes nescio quos mysticos significatus in characteribus mere numeralibus sibi fingebant.*)

*) Leibniz hat bemerkt: Caetera alias prosequar, ostendamque generaliter summas seriei periodicae dare seriem periodicam, et columnas alterius columnae summatrices habere periodum, hoc modo, ut ad minimum periodus primae columnae summatricis sit longitudine dupla periodi summandae, secundae longitudine quadrupla, tertiae longitudine octupla etc. Tunc enim semper 0 incidit in columnae summatricis et summatricium praecedentium simul cum fine periodi, ita omnia ab integro prodeunt ut ante. Hinc apparet statim periodus naturalium. Ostendam et addendo in unum duas columnas periodicas fieri periodicam. Ergo addendo in unum quotcunque periodicas orietur periodica. Hinc demonstro numeros naturales et progressionis arithmeticae, et polygonos quosque, tum etiam quadraticos, cubicos etc. periodicas series dare.

XXIII.

DEMONSTRATIO, QUOD COLUMNAE SERIERUM EXHIBENTIUM POTESTATES AB ARITHMETICIS AUT NUMEROS EX HIS CONFLATOS, SINT PERIODICAE. *)

Omnis series numerorum rationalium, qui sint arithmeticorum potestates ejusdem gradus (exempli gratia series omnium x^4, posito x esse progressionis Arithmeticae numeros), continuatis quantum opus differentiationibus dat differentiam constantem.

Idem est, si series exprimi possit per formulam analyticam integram ex potestatibus conflatam, verbi gr. $4x^4 + 6x^2 - 7x + 11$.

Idem est, etsi formula habeat numeros in denominatore, modo termini sint numeri integri. Nam multiplicata per denominatorem communem dabit differentiando seriem arithmeticorum, ergo et non multiplicata, id enim aequalitatem differentiae non mutat. Exempli gratia numeri $\frac{xx+x}{2}$ sunt semper integri; itaque horum series aliquam differentiam (hoc loco secundam) habet constantem, primae vero differentiae sunt progressionis Arithmeticae.

Hinc etiam omnes series Figuratorum continuatis differentiationibus dabunt seriem Arithmeticorum. Et generaliter omnis series Numerorum integrorum, qua Analytice expressa per formulam, incognita non cadit vel in denominatorem (ut fit in progressione Harmonica) vel in Exponentem (ut in Geometrica) continuatis quantum opus differentiationibus dat seriem Arithmeticorum, vel quod idem est, vice versa omnis hujusmodi series produci potest per summationem arithmeticorum replicatam. Omnis enim series ex suis differentiis cujuscunque gradus continuatis summationibus conflatur.

Hinc jam pergo ad Numerorum expressionem per proportiones Geometricas sive Dyadicam sive decadicam aut aliam quam-

---

*) Auf dem Entwurf, der dieser Abhandlung zu Grunde liegt, hat Leibniz bemerkt: Berolini Novembr. 1701. Haec Dn. Angicourt demonstravi.

cunque. Et cum omnes series Arithmeticorum, sed manifeste imprimis dyadice expressae, habeant columnas periodicas, sequetur omnes series potestatum vel Numerorum figuratorum vel aliorum supra dictorum habere columnas periodicas, ubi ostensum fuerit, omnem seriem summatricem periodicae esse periodicam. Nam ita et summatrix summatricis periodica erit. Imo ex hoc sequitur, quod praesupposueramus, Arithmeticam seriem esse periodicam, cum sit summatrix seriei constantium, quae utique periodica est.

Ut ostendatur, **summatricem seriei periodicae esse periodicam**, quod sit **Lemma I**, consideremus initio separatim quamlibet columnam summandae seriei, tanquam ipsa haec columna sola esset summanda. Dico: Si series summanda periodica unius esset columnae, seriem summatricem habituram esse omnes columnas periodicas, ex. g. seriei summandae constantis ex columna

	N	M	L	A	
0	0	0	0	0	
0	0	0	1	1	
0	0	1	0	1	
0	0	1	0	0	
0	0	1	0	0	
0	0	1	1	1	
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	⊙
0	1	0	0	0	
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	1	
0	1	1	0	0	
0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	☽

A series summatrix constet ex columnis LMN etc., dico, quia A est periodica, etiam L,M,N etc. esse periodicas. Nempe ubi evenit, ut periodo (simplici vel replicatae) columnae A respondeat 0 in columnis summatricibus, omnia in iisdem columnis redeunt ut ante. Id pro columnis L et M fit in loco ⊙, ubi simplex columnae A periodus finitur. At pro columnis L, M, N id fit in loco ☽, ubi finitur duplicata columnae A periodus, quae etiam ipsa per se integram periodum constituit. Praevideri autem potest, quota replicatione periodi columnae A incidat 0 in summatricem. Nam constat, quot periodus simplex summandae A habeat unitates, v. g. hoc loco 4. Jam semel 4 dat 100 dyadice adeoque 0 in prima et secunda columna summatrice; sed columna duarum periodorum columnae A seu bis 4 est 1000 dyadice, id est, dat 0 etiam in tertia columna summatrice etc. Si periodus simplex habuisset unitates tres, tunc fuisset

semel 3   bis 3   ter 3

$$1.3=11 \text{ et } 2.3=110 \text{ et } 3.3=1001 \text{ et } 4.3=1100 \text{ etc.}$$

Et ita primae columnae summatricis periodus foret dupla periodi columnae summandae, secundae columnae summatricis periodus foret quadrupla periodi columnae summandae, tertiae foret octupla etc. idque contingit, quoties summa periodi ipsius A est numerus impar.

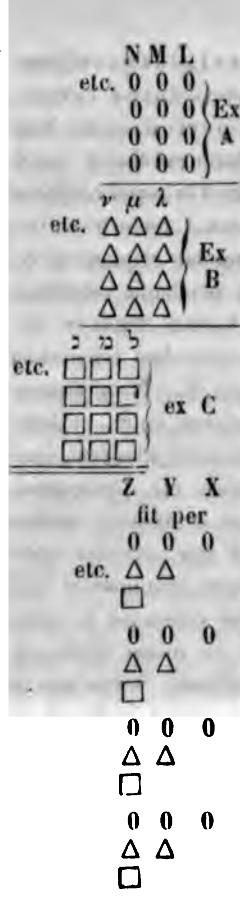
Assummo jam **Lemma alterum: Duae vel plures columnae periodicae in unum additae, ita ut addatur terminus termino respondenti, dant seriem periodicam.** Nam si duae sint columnae addendae D, E, semper addetur aut 0 et 0, aut 0 et 1, aut 1 et 1. Primo casu prodit 0 in seriei conflatae F, G prima columna F, secundo casu 1, tertio 0 seu 10; id esto cum translato 1 in columnam sequentem G; nec ex duabus D, E conflatis prodeunt columnae nisi binae F et G, et utraque harum sequitur periodum columnae ex duabus prioribus longissima periodo praeditae, quae hic est E. Nam semper post hanc redeunt priora. Suppono enim, ut semper in nostris Dyadicis, periodum majorem continere minorem, esse scilicet ejus duplam vel quadruplam vel octuplam etc. [quanquam si una alteram non metiretur, tamen periodus communis tandem haberetur facta ex numeris periodicis, ut si una periodus esset terminorum 3, altera 4, periodus communis foret terminorum 12]. Hinc sequitur rursus etiam tres vel plures alias columnas in unum conflatas ita scilicet, ut termini respondentes in unum addantur, dare seriem periodicam, cum utique tertia columna periodica sit addenda conflato ex duabus prioribus, quod uti jam ostendimus, ex columnis periodicis constat.

G	F	E	D
	0	0	0
	1	1	0
1	0	1	1
1	0	1	1
	1	1	0
	1	1	0
	1	0	1
1	0	1	1

Hactenus diximus de sola columna A summanda; nunc consideremus seriem summandam datam posse constare ex pluribus columnis A, B, C etc. et quamlibet suas habere summatrices, ut A ipsas L, M, N etc., B ipsas λ, μ, ν etc., et C ipsas ל, מ, נ etc.; ipsam autem seriem summatricem habere columnas X, Y, Z etc.; dico X fore L, sed Y fieri ex λ et M, et Z fieri ex ל, μ, N; et ita porro. Vel ut clarius res exprimatur: ipsius columnae A summatrices columnae L, M, N habeant terminos designatos per circellos, ipsius columnae B summatrices columnae λ, μ, ν habeant designatos per triangula, et ipsius C summatrices, nempe ל, מ, נ, habeant designatos per quadratula; patet X constare ex meris circellis columnae L, Y conflari ex circellis columnae M et triangulis columnae λ, Z denique conflari ex circellis columnae N, triangulis columnae μ

	C	B	A
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
	.	.	.
		et	caet.

	Z	Y	X
	.	.	.
etc. .	.	.	.
etc. .	.	.	.
etc. .	.	.	.
etc. .	.	.	.
		et	caet.



et quadratis columnae ל, et ita porro. Vel si verbis enuncies: X prima columna seriei summatricis XYZ constat ex L (columna prima summatrice primae columnae summandae A), sed Y secunda columna seriei summatricis conflatur ex M (secunda columna summatrice primae columnae summandae A) et ex λ (prima columna summatrice secundae columnae summandae B), et Z tertia columna seriei summatricis conflatur ex N (tertia columna summatrice primae columnae summandae A) et ex μ (secunda columna summatrice secundae columnae summandae B) et denique ex ל (prima columna summatrice tertiae columnae summandae C), et ita porro.

Cum autem (per Lemma 1) singulae columnae conflantes sint periodicae, etiam conflata erit periodica per demonstrationem praecedentem seu per Lemma 2, et licet inter conflandum rursus aliquid rejiciatur in columnas sequentes), manifestum tamen est, id ipsum quoque esse periodicum, adeoque id addendo caeteris periodicis columnas tandem periodicas constitui debere. Q. E. D.

XXIV.

ZWEI BRIEFE LEIBNIZENS AN JOH. CH. SCHULENBURG.

I.

Etsi Dom. Sanderus plus petierit meo nomine quam ipse ego fuissem ausus, qui tempore Tuo abuti nollem, plurimum tamen lucri inde ad me pervenit literis a Te acceptis humanissimis et muneribus etiam quibus plurimum sum delectatus, et gratias debeo

singulares. Utraque dissertatio, quam misisti, argumenti mihi pergrati est. Nam urnae repertae sub tumulis, de quibus Blumianae Theses, antiquitates harum regionum illustrant. Calculi vero Mathematici applicatio ad usum, ac praeterea ratiocinia in Metaphysicis Semi-Mathematica, quae utraque in Knolleanis reperi, plane sunt ad palatum meum. Velim delineatas haberi urnas, caeteraque quae praefatione memoras, et Dom. Knolleum pergere optem in his quae ornare coepit studiis illustrandis. Ejus meditatio Metaphysica habere mihi visa est aliquid pulchri et profundi et si hoc quoque addere licet congrui ad sensus meos.

Nimirum fines seu limites sunt de essentia creaturarum, limites autem sunt aliquid privativum consistuntque in negatione progressus ulterioris. Interim fatendum est, creaturam, postquam jam valorem a Deo nacta est qualisque in sensus incurrit, aliquid etiam positivum continere seu aliquid habere ultra fines neque adeo in meros limites seu indivisibilia posse resolvi. Ac proinde etiam ex ipsiusmet thesium Autoris puto sententia postulatum, ex quo resolutionem in meros fines seu mera indivisibilia infert, ad creaturam cum valore sumptam applicari non posse. Atque hic valor, cum consistat in positivo, est quidam perfectionis creatae gradus, cui etiam agendi vis inest, quae ut ego arbitror substantiae naturam constituit, adeo ut valor ille a Deo tributus revera sit vigor seu vis indita rebus, quam quidam frustra negant, non animadvertentes sese ita praeter opinionem incidere in doctrinam Spinosae, qui Deum solum facit substantiam, caetera ejus modos.

Atque haec est origo rerum ex Deo et nihilo, positivo et privativo, perfectione et imperfectione, valore et limitibus, activo et passivo, forma (i. e. entelechia, nisu, vigore) et materia seu mole per se torpente, nisi quod resistentiam habet. Illustravi ista nonnihil origine numerorum ex 0 et 1 a me observata, quae pulcherrimum est Emblema perpetuae rerum creationis ex nihilo, dependentiae quae a Deo. Nam adhibita progressione simplicissima, nempe dyadica loco decadicae vel quaternariae, omnes numeri exprimi possunt per 0 et 1, ut in Tabula adjecta patebit, in qua genesi numerorum, quae maxime naturae convenit, multa latent mira ad meditationem, imo et ad praxin, etsi non pro usu vulgari.

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8

Caeterum rogo, ut Dom. Knolleum data occasione etiam meo, si tanti videtur, nomine horteris, uti in praeclaris istis meditationibus pergat, qualium similes saepe ab ipso videre velim sive in Mathematicis, sive in Philosophia illa altiore. Excitandum etiam putem ad colendam illam sublimiorem Mathesin, quae continet Scientiam Infiniti, cujus elementa quaedam a me sunt prodita, novo calculi genere proposito, quem Hugenius aliique praestantes viri non sine plausu excepere et quem nunc illustrarunt inprimis Dom. Bernoullii fratres et peculiari etiam dissertatione Dom. Marchio Hospitalius Gallus. Et compertum est, non alia melius ratione aperiri aditum a Geometria ad Naturam, quae per infinitos gradus intermedios in omni mutatione, ut ego arbitror, progrediens characterem habet Autoris infiniti. Quae olim mihi de nostro solis incolatu ex praeclari Astronomi Dom. Eimmarti placitis indicari curaveras, verissima arbitror, si intelligamus tellurem esse inter planetas seu satellites solis; sin altius aliquid subest, fatebor mentem Autoris mihi non esse perspectam. Newtonus, Mathematicus excellens, astrorum vortices tollendos putat, sed mihi, ut olim in Actis Lipsiensium prodidi, non tantum conservari posse, sed etiam pulcherrime procedere videntur circulatione harmonica, cujus admirandas deprehendi proprietates.

De observatis Eimmartianis vellem aliquando nosse distinctiora, ac Tuis etiam doctissimis cogitationibus frui; sed agnosco occupationes Tuas laboriosas, et valetudini etiam parum firmae indoleo, meliora precatus speransque, modo in tempore Tibi prospicias, quod faciendum puto. Vale. Dabam Hanoverae 29. Martii 1698.

II.

Valde Tibi obstructus sum non minus pro egregiis dissertationibus Tuis, quam pro elegantibus delineationibus urnarum, vellemque vicissim aliqua re demereri posse. Mentem meam circa progressionem dyadicam optime assecutus es, et praeclare etiam observasti, quam pulchra illic omnia ratione procedant. Puto autem, et utilitatem habituram ad augendam scientiam, etsi alioqui non sit transferenda ad communem usum calculandi. Certa etiam lege procedere deprehendentur notae pro variis proprietatibus numerorum. Nam regula generalis est: Ubicunque principia sunt ordinata, omnia etiam derivata ordinate progredi,

de quo jam hic meditari dudum coepi. Et primum patet, numeros naturali ordine dispositos ita procedere, ut nota prima dextra sit 01 etc., secunda 0011 etc., tertia 00001111 etc., quarta 0000000011111111 etc., quinta 0 (sedecies) 1 (sedecies), et ita rursus. Atque hoc modo apparet, in prima sede periodum semper redeuntem esse binariam 01, in secunda esse quaternariam 0011, in tertia octonariam, in quarta sedenariam, et sic porro. Verum quod notatu dignissimum est, eadem lex ordinis observatur, si sumas non omnes ordine numeros, sed uno omisso alterum quemque, nam tunc proveniunt vel omnes pares vel omnes impares; imo amplius, si sumas tertium quemque seu omnes ternarios sive divisibiles per 3; itemque in omnibus quaternariis, et quinariis, et ita porro, ut periodi eaedem sint quae naturalium. Ecce ternarios in exemplum, ubi in sede dextra prima 01 binaria periodus, secunda 0110 quaternaria, tertia 00101101 octonaria, quarta 0001110011100011 sedenaria, quinta 00000011111100000011111100000011111, et ita porro.

Et notandum, hic dimidiam cujusque periodi semper habere notas oppositas notis respondentibus alteri dimidiae ejusdem periodi, v. g. 0001110011100011 constat ex 00011100 et ex 11100011 ubi permutatio inter 0 et 1.

Has aliasque id genus observationes prosequendo via aperietur ad novas et miras atque etiam utiles numerorum proprietates. Et ut verbo dicam, latet in his quaedam novi generis Arithmetica theoretica, quam Tecum possimus divinam dicere, cujus tantum primos adhuc aditus videmus. Nec dubium est, etiam quadratos et cubos et alios numeros figuratos certas quasdam suae progressionis leges esse habituros.

Et si haec a viginti ac amplius annis jam in mente habuerim, ita raro tamen animum huc adjeci, ut de nominibus imponendis non cogitaverim,

0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15

etc.

0000000	0
0000011	3
0000110	6
0001001	9
0001100	12
0001111	15
0010010	18
0010101	21
0011000	24
0011011	27
0011110	30
0100001	33
0100100	36
0100111	39
0101010	42
0101101	45
0110000	48
0110011	51
0110110	54
0111001	57
0111100	60
0111111	63
1000010	66
1000101	69
1001000	72
1001011	75
1001110	78
1010001	81
1010100	84
1010111	87
1011010	90
1011101	93
1100000	96
1100011	99

etc.

quia potius soleo enuntiare ad morem vulgaris Arithmeticae 10 per decem, 100 per centum, etsi significent 2 et 4. Obiter adjiciam, ex hac expressione sine ulla demonstratione sequi, cur nummi et pondera progressionis Geometricae duplae apta sint, ut paucissimis datis caetera possint componi. Ex. gr. quinque ponderibus unciarum 1, 2, 4, 8, 16 combinatis confici potest pondus quodcunque unciarum infra 32. Hinc monetarum examinatores hac progressione in pondusculis suis utuntur. Ejus rei rationem varii indagarunt, et Schotenius inter alios in Miscellaneis, sed per ambages; hic verum primo obtutu patet, ex. gr. quia 29 est 11101, etiam 10000+1000+100+1 erit 16+8+4+1.

Cartesianos praejudicia vetera novis mutasse, dubium nullum est. Recte quidem illi omnia phaenomena specialia corporum per Mechanismos contingere censent, sed non satis perspexere, ipsos fontes Mechanismi oriri ex altiore causa, quanquam interim Malebranchio, Sturmio aliisque insignibus viris non assentiar, putantibus nihil esse virtutis actionisque in materia. Scilicet non satis percepere, quae sit natura substantiae valorisque, quem Deus contulit rebus qui in se involvit perpetuam actionem. Meo judicio longe aliud est in corporea substantia quam extensio et loci repletio, nempe cogitandum est, quid sit illud quod locum replet. Spatium, quemadmodum et tempus, nihil aliud sunt quam ordo possibilium existentiarum, in spatio simul, in tempore successive, realitasque eorum per se nulla est, extra divinam immensitatem atque aeternitatem. Vacuum nullum esse pro certo habeo. Interim materiae non tantum extensionem, sed et vim seu nisum adscribo. Latentque in his alia multo majoris momenti. Fateor olim mihi interstitiola vacua placuisse, hodie contra sentio, etsi ut dixi materiae naturam non collocem in extensione. Puto etiam a me monstratum, non esse verum quod ajunt, corpus eam quam perdit quantitatem motus alteri dare. De potentia tamen motrice id verum deprehendi. Et sane potentia aliquid reale est; motus vero nunquam existit, cum nunquam existat totus, non magis quam tempus. Reveraque etiam ex alio capite imaginaria involvit motus. In quo consistat unio animae et corporis commerciumque diversarum substantiarum, problema est quod puto me solvisse. Qua de re aliquando amplius. Atque haec ad Tuas dissertationes volui annotare paucis, unum hoc addens, causam parheliorum ab intersectione halonum a Gassendo allatam mihi quoque placuisse.

Et in parheliorum explicanda ratione Cartesium non recte versatum, apparebit credo quando Dioptrica Hugenii, posthumum opus, prodibit.

Specimina calculi infinitesimalis sive differentialis et summatorii a me propositi ante annos complures extant in Actis Eruditorum, ubi primum edidi Anno 1684. Inde Bernoulli Helvetii, Craigius Scotus, Marchio Hospitalius Gallus miro successu sunt secuti. Nieuwentyt Batavus partim carpere, partim in se mutatis notis transferre voluit: utrumque frustra, praesertim cum non satis intellexerit, nec aliquid per se in ea re potuerit praestare. In Germania neminem adhuc satis in haec ingressum esse sum miratus. Desunt nobis juvenes spei singularis; messis multa est, operarii autem pauci. Et cum Mathematicae artes liberaliter alant cultores suos, plerique etiam se discere velle profiteantur quae πρὸς τὰ ἄλφιτα faciunt, tamen magis magisque haec studia inter nostros homines sterilescunt, credo quod nunc plerique inania aut in speciem adornata sectantur quae delibare sufficit, a veris autem laboribus, quibus peritus excolendus est animus, abhorrent. Sed Tuo hortatu atque exemplo et paucorum Tui similium meliora imposterum spero. Vale. Dabam Hanoverae 17. Maji 1698.

GEOMETRICA.

In dem fünften Bande sind die Abhandlungen Leibnizens, die sich auf die Characteristica geometrica und auf die Analysis situs beziehen, zusammengestellt; von den hier folgenden enthalten die ersten noch einige Beiträge in Betreff des Ursprungs und der Anwendung dieser von Leibniz neugeschaffenen Disciplin. Von dem Inhalt der Abhandlung I: De constructione, ist bereits die Rede gewesen*); sie ist insofern von Interesse, als Leibniz darin über die Veranlassung und über die ersten Versuche, eine der Geometrie eigenthümliche Analysis zu schaffen, referirt. — Die Abhandlung II: Specimen Geometriae luciferae, beabsichtigte Leibniz in der vorliegenden Form nicht zu veröffentlichen; in ihrem Aeussern gleicht sie einem im schnellen Fluge hingeworfenen Tableau, durch das Leibniz die Ueberzeugung gewinnen wollte, wie aus den einfachsten Fundamentalbegriffen und mit Hülfe seiner geometrischen Charakteristik ein lichtvolleres Gebäude der Geometrie aufgeführt werden könnte, als bisher geschehen.

Die Nummern III und IV können als Probe dienen, dass Leibniz nicht verschmähte, auch den elementarsten Lehren eine eingehende Aufmerksamkeit zu widmen, wenn es darauf ankam, sie auf eine den Forderungen der Wissenschaft angemessene Weisee zu

---

*) Bd. V. S. 135 ff.

behandeln. Nach seiner Ueberzeugung war dies zugleich der beste Weg, sie der grössern Menge zugänglich zu machen. Eine ähnliche Tendenz verfolgt Leibniz in der Abhandlung V, in welcher er die Geometrie gegen die Angriffe des unwissenden Haufens in Schutz nimmt.

Die folgenden Abhandlungen sind von Leibniz selbst veröffentlicht worden.

I.

DE CONSTRUCTIONE.

Ex quo Algebram ad lineas accommodare Vieta inprimis et Cartesius seculum docuere, agnitum est a plerisque omnibus, ad solvenda in Numeris problemata in quibus rectarum quarundam comparatione cum aliis rectis designatarum valor ac descriptio quaeritur, nihil fingi posse praestantius, cum omnis difficultas problematis una aequatione inclusa sit, cujus tantum radices quaeruntur. Sed illud tamen semper a praestantibus Geometris objectum est, constructiones Geometricas calculi vestigiis nixas plerumque ab illa simplicitate atque elegantia longe abesse, qua Veteres implicata saepe problemata per synthesin absolvere. Exemplo nobis esse potest constructio problematum solidorum ope Circuli et Parabolae quam Cartesius tradidit, ubi aequationis quadrato-quadraticae aut cubicae secundum terminum tolli postulat, quo facto constat non mediocriter intumescere aequationem etiam suapte natura simplicissimam. Et ea tamen formula construendi Cartesio tantopere placuit, ut omnium quas quis exoptare possit perfectissimam et generalissimam affirmaverit.

Haec cum inter veteres novosque Geometras studio partium calentes agitarentur, moderatiores quanquam imperfectionem cognitae analyseos literalis in constructionibus apparere agnoscerent, non ideo tamen repudiandam putavere, tum ob ingentia commoda in ipsa inveniendi arte, quae nullis Veterum Datis supplerentur, tum quod spes esset posse aliquando ex ipsa Analysi aditum reperiri ad artem syntheseos, qua constructiones elegantes et veteribus dignae redderentur.

Mihi quaenam in hoc quoque argumentum incumbendi fuerit ratio, dicam vel ideo, quod plurimum inde lucis instituto meo accessurum arbitrer. Desarguesius et Pascalius filius, praestantes omnium consensu Geometrae, rem Veteribus, quantum ex servatis eorum scriptis judicari possit, intactam aggressi erant, universalia Conicorum demonstratione complecti, qua et harmonia sectionum coni appareret, et proprietates communes observarentur, et constructiones problematum quae in his lineis efficienda proponerentur fierent universales. Hoc illi institutum si absolvissent, totam nobis Geometriam solidorum sive secundi gradus perfectam insigni compendio dedissent. Sed quoniam synthetica methodo per theoremata praedemonstrata ad propositum eniti voluerant, mirum non est, aditum ad problemata difficiliora reperisse nullum, destituente eos patientia in ea itineris asperitate et anfractuum multitudine, quae schemata contemplantes et Conum mente versantes fatigabat. Quanquam autem opus imperfectum reliquissent, inimitabile tamen reddidisse visi sunt multis. Nam quas ipsi in solido et per synthesin generaliter demonstraverant Conicarum Linearum Harmonias, eas Analytici postea secuti re in planum traducta (quod fateor ingenti labore imaginationem absolvit) nondum exhibuere, ne ipso quidem summo Viro Johanne Wittio excepto, qui tamen Analysin Conicam omnium longissime promovisse videtur.

Hoc cum mihi de Analyseos ac Syntheseos comparatione sententiam dicenti nuper illustris Carcavius objecisset, agnoscentem vera dici ad tentandum excitavit, qua ratione eousque produci posset Analysis quo Synthesin perventuram pro desperato habebatur. Aggressus negotium vidi novis quibusdam characteribus opus esse, quibus variae signorum ambiguitates exprimerentur; vidi indivisibile atque infinitum calculo analytico misceri debere, quod unum non satis observasse videtur profundissimus caetera Cartesius; denique modum reperi analyticum, quo sectiones conicae perinde tractari possint, ac si unicum extaret figurae cujusdam genus sectionis conicae nomine, cujus figurae natura aequatione universali explicata centra, axes, vertices, focos, abscissas, ordinatas, tangentes, perpendiculares, nulla specierum Hyperbolae, Parabolae, Ellipseos, Circuli, Rectae mentione, statim prodat; unde theoremata universalia innumerabilia in promptu fuere, et ad omnium problematum conicorum aequationibus comprehensibilium solutionem communem mihi strata est via.

Restabat fastigium operis, problema scilicet problematum id genus omnium generale: *Formulam reperire, unam sectionibus Conicis et Aequationum formis omnibus communem, construendi problema solidum quodlibet ope sectionis conicae datae et circuli.* Hac enim formula reperta, problemata conica omnia (modo sursolida non sint) solo circulo et recta planorum instar construi, et quod non minoris est momenti, solutione Conicis omnibus communi comprehendi possunt. Sin desideretur, nec Universalia Conica ad finem perducta censeri possunt. Quod ut appareat, exemplum afferri utile est. Esto problema propositum: *ex puncto dato D* (fig. 30) *minimam sive perpendicularem DY ducere ad Conicam datam AY.* Patet hoc problema multos complecti casus, nam et quinque sunt Linearum Conicarum genera, Recta, Circularis, Ellipsis, Hyperbola et Parabola, et in qualibet trium inprimis posteriorum linearum specie quinque aut minimum quatuor habentur subdistinctiones pro vario situ puncti dati D; unde si quis problema plene solvere volet, in omnibus linearum specierum generibus et punctorum datorum casibus, ei novem minimum calculis constructionibusque separatis opus erit, et frustra sperabit absoluto uno calculo supplere caeteros conjectura: cum a me quidem calculo non magis operoso, quam si in uno tantum ex casibus difficilioribus fuisset laboratum, unica communis omnibus lineis casibusque aequatio reperta sit. Hanc jam aequationem communem, quae generaliter loquendo quadrato-quadratica est, fingamus esse:

$$y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2n + a^3p = 0,$$

valore scilicet linearum l, m, n, p ambiguo, ut alibi a me docebitur, patet opus esse formula construendi hanc aequationem generali, quae neque signa neque valores terminorum moretur, adeo ut quivis ex terminis cognitis l, m, n, p possit intelligi major minorve alio vel etiam nihilo aequalis; alioquin formula non esset omnibus problematis casibus communis. Praeterea formula opus est, quae sit omnibus Conicis communis, ita ut ope ejus centrum radiusque circuli, cujus intersectione cum conica data solvi debet problema, una eademque methodo investigetur, qualiscunque etiam sectio conica in problemate data sit.

Formulam autem hujusmodi, si dicendum quod res est, hactenus prodidit nemo. Cartesiana enim formula Parabolae propria est; Amplissimus Huddenius aliam pro Hyperbola dedit non minus

elegantem; uterque tamen opus habet praeparatione aequationis, quod calculos plerumque reddit prolixos. Inter eos quorum extant in hanc rem meditationes, longissime omnium progressus est Illustris Slusius, cui si in mentem venisset quaerere, quod ego mihi hoc loco proposueram, utique elegantius multo absolvisset; is ergo unam dedit formulam omnibus aequationum formis communem, nec praeparatione indigentem, sed non omnibus Conicarum speciebus: coarctatur enim ad intersectionem parabolae datae et circuli cujusdam inventi. Unde intelligi potest, rem constructionum non ita perfectam esse, uti nonnullis auditu potius aut superficiaria lectione quam attenta meditatione talia aestimantibus videri posset.

Mihi ergo necessarium visum est rem de integro red-ordiri. Quod dum facio, novisque artibus characterum ambiguorum usus institutum urgeo, primum in vias incidi jam impeditas ut pene de exitu desperarem; formulas enim prolixiores pro nihilo ducebam, nec nisi simplicibus atque elegantibus uti decreveram. Hoc me admonuit, non esse statim irrumpendum in calculum, sed accurata meditatione digerenda primum subsidia esse, unde aptiora eligi possint; alioquin evenit, ut in ipso limine superando defatigati aut resiliamus irriti coeptorum, aut non nisi recollecta mente novis viribus sumtis, sero ad exitum producamur. Nolo errationum mearum vestigia describere, quanquam id quoque profecto usus habiturum esset non contemnendos, nisi prolixitas deterreret; suffecerit hoc loco itinerarium dare cogitationum mearum, ex quo in veram viam coorta subito luce redierant.

Constructio est determinatio puncti quaesiti ductu linearum; ergo constructio eo censeri debet elegantior, quo lineae quas ducere necesse est simpliciores paucioresque sunt. Simpliciores autem censentur Geometricae mechanicis, et inter Geometricas eae quae gradus sunt inferioris, superioribus. Si duae sint ejusdem problematis constructiones, quarum altera paucioribus, altera simplicioribus lineis utatur, posterior praeferenda plerumque est; malim enim profecto decem describere circulos, quam conchoeidem unam, cum re accurate considerata ad descriptionem conchoeidis infinitis circulis, id est motu circuli integri per spatium, opus sit, cujus infinita vestigia pro totidem descriptis circulis haberi possunt. Hinc patet, non esse utendum linea superiore ad problema inferius, nisi ea linea superior jam tum adsit sive quod data sit in problemate, sive quod alia ex causa

describenda fuerit. Exempli causa, si quaestio sit de ratione inveniendi punctum flexus contrarii in conchoeide, constat problema sua natura esse solidum, sive sectionibus conicis efficiendum; quia tamen omnia problemata inferiora lineis superioribus solvi possunt, ideo rectius solvetur per conchoeidem datam et circulum; satius enim conchoeide jam descripta uti, quam novam curvam conicam describere.

Ex his intelligi potest, regulas constructionum elegantium easdem esse cum praeceptis parsimoniae ex arte oeconomica petitis, ne scilicet inutilibus utamur, aut ne quibusdam utilibus in nostra potestate sitis non utamur. Unde intelligitur data omnia minutim examinanda, ut appareat quid inde erui possit in rem nostram; datae autem sunt tum figurae sive lineae, tum quantitates sive valores quaesitarum linearum earumve potestatum. In datis lineis utique mutari potest nihil; sed quoniam constat, ad eandem lineam quaesitam dati valoris variis modis posse deveniri, pro vario datarum linearum usu, ideo quaeritur electio modi cujusdam prae caeteris facilis atque elegantis, id est valor simplicior dato factus ex dato linearum datarum facili in alias transmutatione. Sed quoniam ad ista non ante veniendum est, quam valor linearum pure habeatur, et vero saepe non ipsius lineae, sed potestatis ejus potestatumve diversarum aggregati valor habetur, ideo aequationis inde natae quaerendae sunt radices id est valores unus pluresve, qui lineae quaesitae tribuendi sunt ut aequationi datae respondere possit, iisque valoribus inventis, tum demum de ratione cogitandum est, qua reddi queant simplices. Verum quia saepe valores linearum quaesitarum puri per calculum exacte haberi non possunt, Geometria succurrit defectui Analyseos, et quod ista nominare non potest, efficit intersectione quarundam linearum. Hinc apparet, duo esse summa genera constructionum in Geometria, quemadmodum duo sunt genera operationum in Arithmetica: Algorithmum quem vocant quatuor specierum (qui additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem et horum combinationes varias complectitur) et Extractionem Radicum. Nam si sit $x \sqcap a - b + \frac{bc}{a} + d + \sqrt{da}$, patet ad habendam x additione quatuor quantitatum, subtractione unius b, multiplicatione ipsius b per c et divisione producti per a, ac denique radice ex da opus esse. Quae ut quam compendiosissime fiant, variae artes tum ab ips cal-

culo, tum a Geometria suppeditantur: a calculo, ut si addenda sint $1a+2a+3a+4a+5a \sqcap x$, ponendo numerum terminorum $5 \sqcap d$ et proxime majorem $6 \sqcap d+1$, fiet summa $\frac{ad^2+da}{2} \sqcap x$ seu 15a; a Geometria, ut si addenda sint b^2+c^2, tantum rectae b extremo uno altera c normaliter imponatur, punctisque reliquis duobus extremis alterius cujusdam lineae ducta, erit hujus lineae quadratum aequale duorum quadratorum datorum summae: quam sane praxin non calculus, sed Geometriae pars a calculo independens docet, sed artis foret. Ex quo intelligi potest, Geometriam, quanquam calculo Algebraico subordinata sit scientia, suam tamen quandam peculiarem analysin habere, qua theoremata ipsi propria demonstrentur, et constructiones ultimae, calculo quantum licet contracto, tandem in lineis efficiantur.

Hanc Analysin Geometriae propriam videntur agnovisse ac tenuisse Veteres, cum in eorum scriptis agnoscere mihi videor vestigia quaedam, Algebrae praeterquam ubi de numeris agebatur nulla. Et vero quas illi hac arte detexere propositiones, nisi dudum haberemus, aegre quibus nunc utimur methodis inveniremus. Ejus artis prima lineamenta mihi videor assecutus rationemque reperisse, qua inventis symbolis aptis constitutisque principiis quibusdam caetera quadam calculi imitatione fieri possint, ne lineas imaginatione persequi necesse sit, quod nescio an habuerint Veteres. Intelligo, Clarissimum Aleaumium, Vietae aequalem, peculiarem quandam sibi fecisse characteristicam, qua amici ab eo mira praestari agnoscebant, sed cujus post ejus mortem vestigia superfuere nulla.

Ego cum Euclidis elementa nuper attente legerem, quod fateor a me fieri perraro, aut potius si de integro libro quaestio sit, factum hactenus nunquam, tria esse vidi propositionum genera: aut enim ex calculo pendent, quales sunt quae de rationibus ab eo demonstrantur, ac de quadratis, atque incommensurabilibus nonnullae; aut ex linearum ductu, quales sunt quae prioribus libris habentur pleraeque, de angulis, de perpendicularibus, de parallelis; aliae denique ex utrisque subsidiis inter se junctis. Hae propositiones aut theoremata aut problemata sunt. Theorematum elegantium calculi pariter ac Geometriae haec est natura, ut non possint nisi casu inveniri, nisi quis omnes ordine combinationes notionum (delectu tamen aliquo fateor habito quod peculiaris quoque artificii est) instituere velit, quo facto eum in theoremata in-

signia omnia incidere necesse est; at Problematum diversa est ratio, dato enim problemate desideratur ars quaedam solvendi certa, ita ut semper in nostra potestate sit exitum reperire; sin minus, nota est scientiae imperfectae. Animadverti autem, multa problematum calculi genera esse in nostra potestate, at problematum Geometriae purae nulla: nam exempli causa problema illud simplicissimum, rectam lineam invenire cujus quadratum datarum duarum linearum rectarum quadratis sit aequale, quis solveret quaeso, nisi theorema Pythagoreum jam extaret? Unde intelligitur, horum aliorumque multorum Geometriae purae problematum solutionem non arti ac methodo, sed memoriae nostrae deberi, Veterum autem ingenio ac felicitati; nam forte nec illis methodus fuit. Ingenium autem et felicitatem jugenda esse constat, quando methodus deest; methodus enim hominem mediocrem, quantum ad exitus certitudinem, aequat ingenioso qui de suo invenire possit, aut experto qui memoria ab aliis inventorum polleat, etsi tempore semper distinguantur, quod inexercitatus ac hebes, sed methodo instructus sibi majus suo quodam jure postulat. Fatendum est ergo, Analysin Geometriae hactenus perfectam non esse, cum sint problemata quorum solutio non nisi per synthesin habetur. Fortasse nulla sunt problemata (de iis semper loquor, quae possunt aequatione comprehendi) quae ex iis quae per synthesin habentur in Geometria pura, accedente Analysi calculi, solvi non possint; sed elegantissimas omnium constructiones eligere ex calculo dato, res est non nisi ab illa quam supra tetigi arte symbolica, Geometriae peculiari, expectanda.

Hoc loco vero Symbolicam illam novam non attingemus, cum peculiaris sit operae speculatio, nec valores calculo invenire nec inventos contrahere docebimus: sed unum nunc explicabimus, quomodo radices aequationum, etiamsi analytice extrahi non possint, Geometrica constructione commode definiantur, ejusque artis specimen dabimus, prodita methodo generali construendi problema solidum quodlibet utcunque affectum sectione conica data circuloque invento, quam eo pluris faciendam arbitror, quo rariore connubio universalitatem junxit elegantiae ac brevitati.

Quaerimus Constructionem Aequationis solidae cujuscunque ope sectionis conicae cujuscunque et circuli. Quaeritur ergo linea, quae simul ad sectionem conicam indefinitam et circulum ordinata esse possit, ac proinde duos habeat valores duabus aequationibus

duas easdem incognitas habentibus seu duobus locis expressos: unde una denique unius incognitae fiat aequatio, similis datae, cum singuli termini, singulis terminis aequationis datae collati, definiant totidem lineas arbitrarias in locis exprimendis assumtas. Unde intelligitur, utile esse multiplicare numerum linearum arbitrariarum quoad ejus fieri commode potest, nam si quae post omnes aequationes collatitias resolutas supersint, poterunt a nobis definiri pro arbitrio; unde apparent modi infiniti construendi problema idem formula eadem, ex quibus elegantiores eligi possunt. Ut autem lineae arbitrariae multiplicentur, locus ad Conicam circulumve assumendus ille est, qui plurimas lineas recipit.

Quemadmodum inter multa ad eandem curvam loca quidam est simplicissimus, ita vicissim alius omnium maxime compositus habetur; quemadmodum autem ille ad naturam curvae concipiendam, demonstrandas proprietates, inveniendasque dimensiones, ita alter ad problematum constructionem utilior haberi debet. Lineae conicae simplicissimus locus hac ni fallor aequatione universali, conicis omnibus communi, exprimitur: $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, posito a latere recto, q transverso. Omissa Parabola, Hyperbolae atque Ellipsis communis aequatio simplicissima haec est: $a^2 \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, et circuli: $a^2 - x^2 \sqcap y^2$. Compositus maxime locus ad sectionem conicam tali aequatione exprimitur: $\mp \frac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$, cui respondet talis aequatio ad circulum:

$$-x^2 + cx + \Theta a \sqcap y^2 + \lambda y.$$

Facile autem cuivis Analytices perito ex ipso harum aequationum intuitu patet, nullas alias magis compositas ad sectionem conicam circulumve esse in natura rerum, cum harum quidem omnia loca sint completa, et ad gradus altiores ascendere non liceat. Tantum ergo peculiaris horum locorum descriptio determinatioque exhibenda est, ut ipsarum x et y pariter ac caeterarum b, c, d situs cognoscatur

Hoc autem via analyseos regia sic obtinebitur, si aequatio composita data reducatur ad simplicissimam; duos enim terminos dy et ca tollere in nostra potestate est, quia duas etiam incognitas pro arbitrio explicare possumus, nempe x et y. Quod ideo monere volui, quia viam aperit universalem ad loca altiorum etiam

curvarum examinanda. Hac enim arte facile intelligi potest. quaè loca possint esse ad eandem curvam quorum scilicet unus ex alio fieri potest; unde methodus apparet exhibendi loca curvarum altioris cujusdam gradus simplicissima, unde certus quoque earum numerus innotescet. Eadem methodo aperitur via ad investigandos modos describendi curvam datam: sane enim finitus est numerus locorum, si rectae incognitae x et y parallelae inter se intelligantur. Sed quoniam varios alios earum situs comminisci licet, ut si in Triangulum. coeant circa focos quosdam rotatile, ut fit cum Ellipsis aut Hyperbola ex focis quibusdam describitur, hinc fit ut infinita possint intelligi loca ad eandem curvam, quorum tamen pleraque ad constructiones problematum inepta sunt, ubi duabus curvis sese intersecantibus necesse est y incognitas non tantum ubique easdem, sed et x inter se parallelas esse, et coincidere y, vel contra. Est et alia locorum per abscissas ordinatasque explicatorum praerogativa, ut ad dimensiones inveniendas utilia sint.

Reliqua tamen loca ad descriptiones curvarum organicas usui esse possunt, puncta enim curvae cujusdam datae non tantum relatione ad quandam directricem per perpendiculares sive ordinatas, sed et relatione rectarum ad certa quaedam puncta ductarum designari possunt: quae sane expressio longe priore simplicior est, cum non nisi una saepe ordinata opus habeat. Data jam curva punctum quoddam unum plurave invenire, ad quod omnia curvae puncta relationem habeant adeo simplicem, ut una incognita exprimi possit, problema credo fuerit supra vires humanas, nisi Synthesis succurrat Analysi laboranti, nimirum quod supra dixi Theoremata elegantia vi quadam subita eruere non est in nostra potestate, sed si per combinationes idearum minutim procedas, ipsa sese ordine offerunt meditanti. Ergo primum cogitabimus, si una recta a quolibet curvae puncto ad idem punctum duci possit, eam esse circularem; si a quolibet curvae puncto ad duo quaedam puncta rectarum ductarum summa vel differentia sit cuidam rectae datae aequalis, lineam esse Ellipsin vel Hyperbolam; si a quolibet curvae puncto dato duae ductae lineae brevissimae, altera ad punctum quoddam, altera ad rectam quandam, sint inter se aequales, curvam fore Parabolam. Unde sumtis jam pluribus punctis, aliae possunt combinationes institui, quibus ordine omnes curvas Geometricas exhiberi posse non est dubitandum; idque ad Geometriae perfectionem plane necessarium est, ut habeatur ratio omnium com-

modissima describendi curvam. Quo perfecto de caeteris describendi modis infinitis non erit laborandum, nisi si qui peculiares quosdam usus habere possint. Quales sunt describendi rationes eccentricae, quibus portiones curvarum longissime a centro focove distantes exiguis tamen machinis perfici possint, quale quiddam in circuli sphaeraeve portionum eccentrica tornatione habetur, et memini Johannem Ottium, Analyseos peritissimum, simile quiddam nobis in Ellipsi, Hyperbola et Parabola promittere, quod ad altiores curvas generali methodo produci posse non dubito. Mihi rem consideranti, aptissimus ei usui videtur conus; habita enim exigua trianguli portione sufficiente, etiam coni sufficiens portio describi potest, ex quo secari potest portio curvae, utcunque focus ejus longissime absit; idem ad circulum traduci potest, quia circulus ex cono aliter etiam quam parallele ad axem secari potest, cum scilicet subcontraria quam vocant sectio est. Porro cum eadem sectio aliquando ex pluribus possit secari conis, eligendus est commodissimus in rem nostram. Addenda sunt in eam rem quae Hookius de descriptione eccentrica superficiei sphaericae explicuit; item quam Wrennus invenit admirabilem Hyperbolae proprietatem, ostendit enim in Conoeidis Hyperbolici superficie infinitas duci posse rectas, idque ad ejus descriptionem applicuit; demonstrationem dedit Wallisius libro de Motu. Caeterum videndum est, possitne reperiri Conoeidis genus, ex quo omnes aut certe plurimae secundi generis curvae secari possint. Et credibile est, ex trium Conoeidum, Parabolici, Hyperbolici, Elliptici, sectionibus omnes curvas secundi gradus effici posse. Addo, quemadmodum ex cono secari potest non tantum Parabola, Ellipsis, sed et recta et circulus, ita ex Conoeide quodam altiore, ut Hyperbolico, forte inferiores quoque lineas, ut ipsas conicas, imo et rectam circulumque posse secari, uti de recta id Wrennus ostendit. Haec utique non sunt usu vacua; neque enim despero posse aliquando sectiones conicas, imo et conoeidicas mechanismis quibusdam tolerabilibus exhiberi quantum satis est ad sphaericorum vitrorum speculorumve effectus repraesentandos.

Sed redeundum est ex diverticulo in viam, a locis ad descriptionem utilibus ad loca constructionibus aptiora. Dixi locum ad sectionem conicam maxime compositum reduci posse ad simplicissimum arte analytica tollendi terminos duos dy et ca. Sed hoc quidem necesse non est, nunc quidem, quoniam jam habetur

descriptio loci ad sectionem conicam, neque simplicissimi neque compositissimi, ad quem noster nullo negotio reducitur; id vero est:

$$\mp \frac{a}{q} z^2 + \aleph z \sqcap v^2 + \beth v \sqcap \quad \text{ad sectionem conicam indefinitam,}$$

et $$-w^2 + \gimel w \sqcap y^2 + \daleth y \sqcap \quad \text{ad circulum.}$$

Quarum descriptio haec est: Sit sectionis conicae datae centrum B, Axis seu latus transversum primarium duos vertices oppositos conjungens ABC. Centro eodem B rectangulum DEFG sectioni conicae inscribatur, ita scilicet ut aliquod ejus latus DE axi AC parallelum sit et anguli quatuor D, E, F, G in ipsam lineam terminentur. Sumto jam quolibet in linea puncto ut H, si perpendicularis inde in rectam DE, productam si opus est, demittatur, nempe HL, erit rectangulum DLE ad rectangulum MLH, ut sectionis conicae latus rectum RS ad ejusdem latus transversum AC. Quod in circulo fig. 31, Ellipsi fig. 32, Hyperbola fig. 33, Parabola fig. 34 non minus quam in ipsa recta fig. 35 verum esse constabit examinanti; demonstrationem enim generalem quae proliximuscula est, nunc quidam afferre alienum est ab instituto praesenti. Tantum in circulo considerandum est, quoniam latus rectum et transversum aequalia sunt, etiam haec duo rectangula aequari, quod et in certa Hyperbolae specie, quam circularem appellare possis, in qua scilicet latus rectum transverso sive axi aequatur, verum est; adde et in angulo rectilineo ERF, qui et ipse sectio superficiei conicae censeri potest, quando rectus est. In Hyperbola considerandum est harmoniae causa duas oppositas sectiones pro una figura habendas, cujus aliquod centrum B cogitari potest, non minus ac Ellipseos vel Circuli, etsi in his oppositae portiones concurrant in lineam in se redeuntem, quae in Hyperbola anguloque rectilineo divergunt. Angulus autem rectilineus eo tantum ab Hyperbola differre intelligi potest, quod latus ejus rectum transversumque sunt infinite parva, et puncta R, S, A, B, C concidunt. At Parabola considerari potest quantum in rem praesentem velut Hyperbola, sed cujus centrum et sectio opposita sint alterius mundi, id est infinite distent abhinc; neque enim aliter Parabola ab Hyperbola differt, quam quod latus illius transversum est infinitum; etsi ergo puncta B, C, D, G in Parabola exhiberi non possunt, nec linea DE vel AC duci queat, calculus tamen nihilo secius procedit.

In fig. 35. $EN^2 \sqcap \frac{a}{q} RN^2$; erit ergo $EN \sqcap RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et LM seu 2EN erit $2\, RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et $DE \sqcap 2RN$. Esto jam $EL \sqcap x$, erit $HL \sqcap x \frown \frac{RN}{RN}\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive erit $HL \sqcap x\sqrt{\frac{a}{q}}$. Rectangulum DLE erit $\sqcap 2RN + x, \frown x$ sive $2RNx + x^2$; rectangulum vero MHL erit $\sqcap 2RN\sqrt{\frac{a}{q}} + x\sqrt{\frac{a}{q}}, \frown x\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive $2RNx\frac{a}{q} + x^2\frac{a}{q}$; erit ergo Rectangulum DLE ad rectangulum MHL ut q ad a.

II.

SPECIMEN GEOMETRIAE LUCIFERAE.

Saepe notatum est a viris acri judicio praeditis, Geometras verissima quidem et certissima tradere, eaque ita confirmare ut assensus negari non possit, sed non satis illustrare animum, neque fontes inveniendi aperire, dum lector se captum quidem et constrictum sentit, capere autem non satis potest, quomodo inciderit in has casses, quae res facit ut homines Geometrarum demonstrationes magis admirentur quam intelligant, nec satis ex illis percipiant fructus ad intellectus emendationem, in aliis quoque disciplinis profuturam, quae tamen mihi potissima videtur demonstrationum Mathematicarum utilitas. Cum igitur de his rebus saepe meditanti plurima inciderint, quae ad reddendas causas fontesque recludendos facere videntur, eorum specimen placet exscribere familiari sermone ac liberiori structura, prout nunc in mentem venit, severiore illa exponendi ratione in aliud tempus servata.

Utuntur vel uti possunt Geometrae variis notionibus aliunde sumtis, nempe de eodem et diverso seu de coincidente et non coincidente, de eo quod inest vel non inest, de determinato et indeterminato, de congruo et incongruo, de simili et dissimili, de toto et parte, de aequali, majori et minori, de continuo aut interrupto, de mutatione, ac denique quod ipsis proprium est de situ et extensione.

Doctrina de coincidente aut non coincidente est ipsa doctrina logica de formis syllogismorum. Hinc sumimus quod quae coincidunt eidem tertio coincidunt inter se; si duorum coincidentium unum tertio non coincidat, nec alterum ei coincidere. Ita Geometra ostendit, punctum quo duo diametri circuli (id est rectae circulum secantes in duas partes congruas) se secant, coincidere cum puncto, quo duae aliae diametri ejusdem circuli se secant. Vid. fig. 36.

Doctrinae de eo quod inest alteri, partem aliquam etiam demonstrationibus complexus est Aristoteles in prioribus Analyticis, notavit enim praedicatum inesse subjecto, scilicet notionem praedicati notioni subjecti, quanquam etiam contra individua subjecti insint individuis praedicati. Et plura adhuc demonstrari possint universalia de continente et contento seu inexistente, utilia futura tam in Logicis quam Geometricis. Quorum et specimen dedi, ubi demonstravi, si A sit in B et B sit in C, etiam A esse in C fig. 37; item si A sit in L et B sit in L, etiam compositum ex A et B fore in L fig. 38; item si A sit in B, et B sit in A, coincidere A et B fig 39. Problemata etiam solvi, ut plura invenire numero quotcunque talia ut nihil ex ipsis componi possit novum, quod fit si ea continue in se invicem insint, ut si A sit in B et B in C et C in D etc. nihil ex his componi potest novum; quod et aliis modis praestari potest, ut si sint quinque A, B, C, D, E, et A(+)B coincidat C, et A sit in D, et denique B(+)D coincidat E, tunc nihil ex iis componi potest novi, utcunque combinentur. Unde etiam ostendo, quomodo plura dati numeri quoad coincidentiam et inexistentiam sese habere debeant, ut inde institui possint combinationes utiles ad componendum aliquid novum. Et in his versatur pars Scientiae Combinatoriae generalis de formulis universe acceptis, cui non Geometriam tantum, sed et Logisticam seu Mathesin universalem de Magnitudinibus et Rationibus in genere tractantem subordinari alias ostensum est.

Sequitur doctrina de determinato et indeterminato, quando scilicet ex quibusdam datis quaesitum ita circumscriptum est, ut nonnisi unicum reperiri possit, quod his conditionibus satisfaciat. Datur et semideterminatum, cum non quidem unicum, sed plura, certi tamen numeri seu numero finita exhiberi possunt, quae satisfaciunt. Sic datis duobus punctis A, B determinata est recta AB (fig. 40) seu via minima ab uno ad aliud; sed si in plano quaeratur punctum C,

cujus distantiae a punctis A et B datis sint magnitudinis datae, problema est semideterminatum, nam duo puncta in eodem plano reperiri possunt, nempe C et (C) quae satisfaciunt quaesito. At non nisi unicus reperiri potest circulus cujus circumferentia per data tria puncta A, B, C transeat. Et proinde si duo circuli sint propositi, et inter ratiocinandum reperiatur, unumquemque eorum per tria proposita puncta transire, certum est circulos nomine tenus duos revera esse unum eundemque seu coincidere. Utrum autem conditiones datae sint determinantes, ex ipsismet cognosci potest, quando tales sunt, ut rei quaesitae generationem sive productionem contineant, vel saltèm ejus possibilitatem demonstrent, et inter generandum vel demonstrandum semper procedatur modo determinato, ita ut nihil uspiam relinquatur arbitrio sive electioni. Si enim ita procedendo nihilominus ad rei generationem vel possibilitatis ejus demonstrationem perveniatur, certum est problema esse penitus determinatum.

Hinc porro multa insignia Axiomata maximique usus deduxi, quae tamen non satis video observata. Ex his potissimum est, quod determinantia pro determinato aliud rursus determinante, in hac nova determinatione possunt substitui, determinatione hac salva. Sic si rectam indefinitam per duo puncta A et B (fig. 41) transeuntem dicamus esse locum omnium punctorum determinate se habentium ad A et B seu sui ad A et B situs unicorum, demonstro inde duobus aliis punctis in eadem recta sumtis ut C et A (facilitatis nunc et brevitatis causa unum ex duobus prioribus hic rursus assumando) etiam eandem rectam ad haec duo puncta C et A esse determinatam, seu quodlibet punctum in eadem recta esse sui situs unicum ad A et C. Demonstratio est talis: Sit recta per A et B, cujus punctum quodcunque ut L est sui ad A et B situs unicum, ita ut non possit adhuc aliud punctum inveniri eodem modo se habens ad A et B (quod est proprietas rectae), seu A. B. L. un. (sic enim scribere soleo determinationem) sumaturque in eadem recta aliud punctum C, dico quodlibet punctum rectae, ut L, etiam esse sui situs unicum ad A et C, seu A. C. L. un. Nam A. B. L. un. (ex hyp.) et A. B. C. un. (quia C est in recta per A, B); jam in determinatione posteriore tollatur B ope determinationis prioris, pro B substituendo A, L (per hoc praesens axioma, quia B determinatur ex A. L); itaque in posteriori determinatione pro A. B. C. habebimus A. A. L. C. un. Sed repetitio ipsius A hic est inutilis,

seu si A.A.L.C. est un., etiam A.L.C est un. seu L est sui situs unicum ad A et C, quod demonstrandum proponebatur.

Unde videmus ex hoc exemplo nasci novum genus calculi hactenus a nemine mortalium usurpati quem non ingrediuntur magnitudines, sed puncta, et ubi calculus non fit per aequationes, sed per determinationes seu congruitates et coincidentias. Determinatio enim resolvi potest ope congruitatis in coincidentiam hoc modo: A.B.L. un. id est si situs A.B.L congruat cum situ A.B.Y, coincident L et Y. Soleo autem coincidentiam notare tali signo ∞, et congruitatem tantum tali signo ϖ. Et proinde A.B.L un. idem valet quod propositio conditionalis sequens: Si sit A.B.LϖA.B.Y, erit L∞Y, ubi literam Y adhibeo pro puncto indefinito, ad imitationem Algebraistarum quibus ultimae literae, ut x, y, significare solent magnitudines indefinitas. Nam quodcunque punctum assumas, ut Y, quod eodem modo se habeat ad puncta A et B, quo L se habet ad puncta A et B, id necesse est coincidere ipsi L, posito scilicet situm L ad A et B esse unicum, seu L esse in recta transeunte per A et B.

Transeamus igitur ad explicandas congruitates. Congrua sunt, quae nullo modo discerni possunt, si per se spectentur, ut in fig. 40 triangula duo ABC et AB(C) quorum unum nihil prohibet alteri applicari, ut coincidant. Sola igitur nunc positione discernuntur seu relatione ad aliquod aliud jam positione datum, ut aliquo puncto L dato fieri potest, ut ABC aliter se habeat ad L, quam AB(C) se habet ad L, verbi gratia si L sit propius ipsi C quam ipsi (C). Necesse est tamen, ut aliud L inveniri possit, quod eodem modo se habeat ad AB(C) quo L se habet ad ABC, ita ut congrua sint ABCL et AB(C)(L), alioqui si tale quid fieri non posset pro AB(C) quod fieri potest pro ABC (ita ut non posset (L) inveniri pro illo, ut L pro hoc), eo ipso discerni possent ABC et AB(C) seu non forent congrua. Et hoc ipsum est maximi momenti axioma, ut si duo sint congrua ABC et AB(C) et aliquid reperiatur L se certo modo se habens ad unum ABC, etiam aliquid detur seu possibile sit (L) quod eodem modo se habeat ad alterum AB(C). Designo autem ita (fig. 42) A.B.CϖL.M.N, quod significat eodem modo inter se sita esse tria puncta A, B, C, quo tria puncta L, M, N. Hoc autem intelligendum est respective secundum ordinem praescriptum, ut scilicet cum congruere seu coincidere seu sibi applicari posse intelliguntur A.B.C et L.M.N, coincidat A ipsi

L, et B ipsi M, et C ipsi N. Hinc si sit $A.B.C \infty L.M.N$, sequitur etiam $A.B \infty L.M$, et ita in caeteris. At vero ut colligamus $A.B.C \infty L.M.N$, opus est prius probari $A.B \infty L.M$ et $A.C \infty L.N$ et $B.C \infty M.N$, tum demum enim licebit secure componendo dicere $A.B.C \infty L.M.N$. Ita videmus (fig. 43) licet triangula ABC et LMN duo latera aequalia habeant, AB ipsi LM et AC ipsi LN, tamen quia tertia aequalia non habent, BC et MN, non esse congrua. Quomodo autem in universum congruitas combinationum gradus altioris possit colligi ex congruitatibus combinationum gradus inferioris, et quod non opus sit omnibus ternionibus ad inveniendam congruitatem quaternionis, sed tribus tantum, et ad colligendam congruitatem quinionum, quinque ternionibus; senionum, septem ternionibus, et ita porro in infinitum, infra apparebit, cum de similitudinibus dicemus.

Patet autem quoque generaliter ex respective congruis omnibus combinationibus unius gradus semper colligi posse congruas esse omnes combinationes alterius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus omnes terniones, quia ex omnibus combinationibus unius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus quatuor rerum congruis, colligi potest ipsa quatuor rerum combinatio totalis seu quaternio $A.B.C.D$ congrua cum $L.M.N.P$. Jam ex congruitate combinationum totalium sequitur quaelibet combinatio inferior seu quaevis ternio respondenti congrua, ergo ex omnibus binionibus omnes terniones.

Discimus ex his insigne discrimen congruitatum a coincidentiis et inexistentiis seu comprehensionibus. Nam (fig. 44) si recta AB coincidat cum recta LM, et simul recta AC coincidat cum LN, etiam recta BC coincidet cum recta MN. Eo ipso dum coincidunt AB et LM, coincidunt etiam puncta A cum L, et B cum M; et eo ipso dum coincidunt AC et LN, coincidet etiam punctum C cum puncto N; cum ergo puncta A, B, C ipsis L, M, N respective coincidant, adeoque B, C cum L, M, etiam rectae BC et MN coincident. Ex natura rectae quoad inexistentias alibi ostendi, si A insit ipsi L, et B ipsi M, etiam $A \oplus B$ inesse ipsi $L \oplus M$, et si $A \oplus B$ insit ipsi $L \oplus M$, et $A \oplus C$ ipsi $L \oplus N$, etiam $A \oplus B \oplus C$ inesse ipsi $L \oplus M \oplus N$, quem argumentandi modum in congruitatibus et similitudinibus imitari non licet.

Ex his jam quae diximus de discrimine inter coincidentias et congruitates, ratio porro profluit, cur congrua sint triangula ABC

et (L)(M)(N) (fig. 44), si latera AB et (L)(M) itemque AC et (L)(N) congrua sint, licet de tertiis AC et (M)(N) nulla fiat mentio, modo anguli ad A et (L) congrui sint. Nam si recta (L)(M) sit congrua rectae AB, et recta (L)(N) rectae AC, et angulus quoque ad (L) angulo ad A, tunc possunt rectae (L)(M) et (L)(N) transferri in AB et AC, salvo suo situ, adeoque (L)(M)(N) potest applicari ad ABC, ita ut coincidant AB et LM, item AC et LN; ergo ex natura coincidentiae coincident etiam BC et MN; itaque si tam rectae comprehendentes quam anguli earum sint congrui, etiam bases erunt congruae, totumque adeo triangulum triangulo.

Et ex hoc ipso exemplo insigne hoc Axioma magnique usus illustrari potest: quae ex congruis eodem modo determinantur, ea sunt congrua. Sic quia generaliter ex duabus rectis magnitudine datis, et angulo eorum positione et magnitudine dato, determinatum seu positione datum est triangulum, hinc si duo sint triangula ABC, (L)(M)(N) data, habentia crura AB cum (L)(M), et AC cum (L)(N) congrua, itemque angulum quem comprehendunt congruum, angulum A angulo (L), congrua erunt triangula ipsa. Similiter quia ex tribus rectis magnitudine datis, trianguli etiam anguli magnitudine dati sunt, adeoque omnia determinata sunt, quae diversa congruentiam impediunt; hinc si duo triangula tres rectas habeant respective aequales, ac proinde congruas (rectae enim aequales congruae sunt), ipsa triangula congrua erunt. Et haec attentius considerata deprehendetur coincidere cum methodo superpositionum Euclidea.

Sunt et alia axiomata huc pertinentia, ut quae congrua sunt eidem, congrua sunt inter se; et quae congrua sunt inter se, eorum unum si tertio incongruum sit, etiam alterum tertio incongruum erit, quae tamen corollaria sunt tantum axiomatum de eodem et diverso. In iis enim quae congrua sunt, omnia eadem sunt, praeter positionem, ita ut solo differant numero. Et in universum quicquid de uno congruorum fieri dicive potest, id de altero quoque fieri potest et dici, hoc uno excepto, quod ea quae in uno adhibentur, numero differunt seu positione ab iis quae in alio adhibentur. Ita congruere intelligemus non tantum duas ulnas seu duos pedes, sed et duas libras, abstracte sumtas, duas horas, duos aequales gradus velocitatis. Notandum est etiam si duorum corporum ambitus congrui sint, etiam ipsa corpora esse congrua, quia si termini actu congruant seu coincidant, etiam corpora coincident. At non necesse est superficies et lineas coincidere aut congruas

esse, quarum extrema coincidunt aut congrua sunt. Illud tamen in universum dici potest, duo extensa coincidere aut congrua esse, si coincidant aut congrua sint ea in ipso quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum externo possunt esse communia. Hinc superficies et lineae cum ubique ab externo attingi possint, non vero solida, terminos earum congruos esse aut coincidentes non sufficit. In genere autem ea est natura spatii, extensi (adeoque et corporis quatenus nihil aliud quam spatium adesse in eo concipitur), ut in internis sit ubique congruum et indiscernibile (ut si in media aqua agam aut in mediis tenebris palpem nec quicquam offendam) tantumque per ea discerni possit, quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum alio (cum quo nullam licet partem communem habet) communia sunt. Hinc quoque si duae superficies reperiantur uniformes aut lineae, extremis congruis aut etiam actu congruentibus, ipsae congruae erunt vel actu coincident.

Ex congruis oriuntur aequalia. Nempe quae congrua sunt, aut transformatione si opus sit congrua reddi possunt, ea dicuntur aequalia. Sic in fig. 45 triangula BAD, BCD, BCE, BFE sunt congrua, ideoque aequalia; quia et triangulum EBD aequale est quadrato ABCD, licet enim congrua non sint triangulum et quadratum, tamen hoc casu ex triangulo transpositione partium fieri potest quadratum priori congruum, nam si trianguli EBD unam partem BCD transferas in congruam BFE, manente altera parte ECB, tunc ex BFE et ECB fit quadratum BCEF congruum quadrato ABCD. Solemus autem aequalitatem designare signo =, hoc est A=B significat A et B esse aequalia.

Aequalia etiam dici possunt quorum eadem est magnitudo. At magnitudo est attributum quoddam rerum, cujus certa species nulla definitione potest determinari nullisque certis notionibus, sed opus est fixa quadam mensura quam liceat consulere, et proinde si Deus universum orbem cum omnibus partibus proportione eadem servata redderet majorem, nullum esset principium id notandi. Una tamen re fixa sumta, tanquam mensura, hujus applicatione ad alias res adhibitisque repetitionum numeris magnitudo quoque aliarum cognosci potest. Atque ita magnitudo determinatur per numerum partium, quae inter se sunt aequales, vel certa quadam regula inaequales. Et licet aliqua res sit incommensurabilis respectu mensurae vel respectu rerum, quibus mensura repetita

exacte congruit, tamen continuata in infinitum subtractione quoties fieri potest rei ex mensura vel mensurae ex re, residuique ex eo quod subtractum est, tunc ex progressione numerorum repetitiones exprimentium cognoscitur rei quantitas respectu mensurae. Et proinde aequalia sunt quae eodem modo se habent ad eandem mensuram respectu repetitionis, eaque eo ipso patet fieri posse congrua, cum in partes congruentes singulas singulis eodem modo resolvantur.

Ex his etiam intelligitur, quid Mathematici vocent rationem seu proportionem. Si enim duo sint A et B, et unum A accipiatur pro mensura, tunc alterius B **magnitudo** exprimetur per numerum aliquem (vel numerorum seriem certa lege procedentem) posito A exprimi per unitatem. Sed si neutra sit mensura, tunc numerus exprimens B per A, quasi A esset mensura seu unitas, exprimit rationem seu proportionem ipsius A ad B. Et in universum expressio unius rei per unam aliam homogeneam (seu in res congruas resolubilem) exprimit unius rationem ad aliam, ut proinde ratio sit simplicissima duorum quoad magnitudinem relatio, in qua scilicet nihil assumitur tertii ipsis homogenei ad magnitudinem unius ex magnitudine alterius suo valore exprimendam. Verbi gratia sint duae magnitudines A et B (fig. 46) velimusque earum rationem ad se invicem determinare, ponamus A esse majus et B minus, igitur ab A detrahamus B quoties id fieri potest, verbi gratia 2 vicibus, et restare C; hoc C necessario minus est quam B, ideoque a B ipsum C rursus subtrahatur quoties fieri potest, ponamus autem subtrahi posse 1 vice et residuum esse D, et a C detrahi posse D rursus 1 vice et residuum esse E, denique a D posse detrahi E 2 vicibus et residuum esse Nihil. Patet fore $A = 2B + C$ (1) et $B = 1C + D$ (2); ergo pro B in aequ. 1. substituendo valorem expressum in aequ. 2. $A = 2C + 2D + 1C$ (3) seu $A = 3C + 2D$ (4). Rursus $C = 1D + E$ (5); ergo (ex aequ. 4 et 5) $A = 5D + 3E$ (6), et (ex aequ. 2 et 5) $B = 2D + E$ (7). Denique $D = 2E$ (8). Ergo (ex aequ. 6 et 8) fiet $A = 13E$ (9) et (ex aequ. 7 et 8) $B = 5E$ (10). Unde videmus E esse communem omnium mensuram maximam, et posita E unitate, fore $A = 13$ et $B = 5$. Quaecunque autem assumatur unitas, tamen A et B esse inter se ut 13 et 5 numeros, et A fore tredecim quintas ipsius B seu $A = \frac{13}{5}B$ (id est $A = \frac{13}{5}$ si B esset unitas) nempe A est 13E, est autem E quinta ipsius B; contra B fore quinque decimas tertias ipsius A seu $B = \frac{5}{13}A$, nam

B=5E, at E est una tertia decima ipsius A. Patet autem quantitates homogeneas ipsis A et B hic provenientes ordine esse

A	B	C	D	E
13E	5E	3E	2E	1E

at numeros subtractionum seu quotientes esse 2, 1, 1, 2. Quodsi non possimus pervenire ad ultimum aliquod (ut E hoc loco) quod caetera omnia sua repetitione exacte metiatur, ita ut A et B in partes ipsi huic mensurae congruentes, atque adeo inter se, resolvi nequeat, tunc non quidem ad valores hujusmodi numeris expressos quos sola unitatum repetitio efficit, perveniemus, attamen ex ipsa progressione quotientium cognoscere possumus et determinare speciem rationis; ut enim hoc loco data serie quotientium 2, 1, 1, 2 datur ratio inter A et B ubi detractionibus factis talis quotientium series prodit, ita etiamsi series progrediatur in infinitum, quod fit in iis magnitudinibus quae inter se dicuntur incommensurabiles, tamen modo seriei progressio data sit, eo ipso ratio magnitudinum erit data, et quo longius continuabimus seriem, eo propius accedemus.

Sed tamen dantur infiniti alii modi exprimendi magnitudines sive per series sive per quasdam operationes aut quosdam motus. Sic a me inventum est quadrato diametri existente $\frac{1}{1}$, circulum esse $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. hoc est si quadratum diametri ponatur esse pes quadratus (diametro existente pede), Circulum esse quadratum diametri semel, demta (quia nimium sumsimus) ejus tertia parte, adjecta (quia nimium demsimus) ejus quinta parte, demta (quia nimium readjecimus) septima parte, et ita porro secundum seriem numerorum imparium continuatim intelligendo, series ista circuli magnitudine minus differt quam quaevis quantitas data, ac a proinde ei coincidit. Nam si dicamus $1-\frac{1}{3}$, error minor est quam $\frac{1}{5}$, alioqui addito $\frac{1}{5}$ non adderemus nimium; et rursus si dicamus $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, error minor est quam $\frac{1}{7}$, alioqui detracto $\frac{1}{7}$ non detraheremus nimium, et ita porro. Semper ergo aliquousque continuando error minor est quam fractio proxime sequens; at si data sit quantitas quaevis utcunque parva, reperiri potest fractio aliqua exprimens adhuc minorem.

Sed inprimis ad usum communem calculandi in numeris et praxin confert expressio magnitudinum per numerum partium progressionis Geometricae, verbi gratia decimalis. Sed quia ipsa in exigua figura bene exprimi non potest, adhibeamus Bimalem, quae et naturaliter prima et simplicissima est. Nempe rectam AB in

fig. 47 dividamus in duas partes aequales seu duas dimidias, et quamlibet dimidiam rursus in duas partes aequales, habebimus quatuor quartas, et quartas rursus bisecando habebimus octo octavas, et ita porro sedecim sedecimas etc. Eodem modo possimus rectam dividere in 10, 100, 1000, 10000 etc. partes. Sit jam quantitas CD aestimanda per scalam partium aequalium et geometrica progressione descendentium quam fecimus. Applicemus ipsam CD scalae AB et C quidem ipsi A, videamusque quorsum in scala nostra cadat altera extremitas D. Et primum conferamus D cum punctis majorum divisionum, inde gradatim progrediendo ad minores. Et cum CD sit minor quam scala AB (nam si major esset, prius ab ea detraxissemus scalam quoties id fieri potuisset) cadet D inter A et B; videmus autem esse $CD = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ et adhuc aliquid praeterea, minus tamen quam $\frac{1}{32}$; itaque si scala non sit ulterius subdivisa, expressio ista sufficiet saltem ad hoc, ut error sit minor quam $\frac{1}{32}$. Quodsi adhuc semel subdiviserimus, poterimus per scalam AB talem habere expressionem ipsius CD, ut error minor quam $\frac{1}{64}$. Et ita porro. Ita similiter, si scala divisa sit in partes 10, 100, 1000, 10000, et ita porro, efficere possumus ut error sit minor quam $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ etc.

Hac methodo insigne oritur commodum, ut omnes quantitates quae per fractas essent exprimendae, quantumlibet exacte in integris exprimantur. Sit enim septima pars pedis, aut quaecunque alia portio vel fractio. Sumamus 100000 etc. idque dividamus per 7 continuando quoad lubet, prodibit 1428571428571428 etc. seu $\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000}$ etc. seu $1x + 4x^2 + 2x^3 + 8x^4$ etc. posito $x = \frac{1}{10}$, et x^2 esse $\frac{1}{100}$ seu quadratum de $\frac{1}{10}$, et x^3 esse cubum de $\frac{1}{10}$, et ita porro. Semperque error minor est quam una ex portionibus ultimis, ubi destitimus, hoc loco minor quam $\frac{1}{10000}$, ubi id praeterea summe notandum est, quod semper prodit periodus, cum quantitas unitati propositae est commensurabilis, ut hoc loco 142857 recurrit in infinitum. Unde perfecte cognoscitur natura progressionis. Patet autem haec locum habere, sive per calculum sive actuali applicatione ad scalam propositam magnitudinem aestimemus. Progressio autem Bimalis hoc habet insigne, quod coefficientes seu numeri per quos potentiae x, x^2, x^3 etc. multiplicantur, sunt tantum 1 vel 0.

Sunt adhuc alii modi exprimendi magnitudines, licet enim ipsae sint incommensurabiles unitati, fieri tamen potest, ut quaedam

earum potentiae seu aliqua ex ipsis enata unitati seu scalae commensurari possint. Quod ut exemplo appareat, inspiciatur fig. 48, ubi recta est AB, verbi gratia pes, ejusque quadratum seu pes quadratus est ABCD. Sit alia recta BD aequalis ipsi AB, ita ut angulus ABD ad B sit rectus, et ducatur recta AD. Et super recta BD (= AB) sit quadratum BEFD, aequale quadrato ABCD (seu AC) ac denique super recta AD sit quadratum ADGH. Jam constat non tantum ex Euclideis Elementis, sed etiam ex ipsa inspectione figurae, quadratum ADGH esse duplum quadrati AC seu aequari quadratis AC et BF simul sumtis. Ductis enim diagonalibus AG, DH, se secantibus in L, resolutum erit quadratum ADGH in quatuor triangula ALD, DLG, GLH et HLA, aequalia et congrua inter se, at quadratum AC ducta diagonali DB resolvitur in duo hujusmodi triangula; est ergo quadratum ADGH duplum quadrati AC, et proinde quadratum seu potentia rectae AB (nempe quadratum AC) quadrato seu potentiae rectae AD (nempe quadrato ADGH) commensurari potest. Sed videamus jam an ipsae rectae AB et AD commensurari possint, sive ambo per numeros exprimi, rationales scilicet numeros, qui per repetitionem unitatis seu certae alicujus portionis aliquotae ipsius unitatis (quae repetitione sua unitatem exhaurit) exprimi possunt. Ponamus ergo AB esse 1 (nempe unum pedem), quaeritur quid sit AD; is debet esse numerus qui multiplicatus per se ipsum (seu quadratus) producat 2, duplum scilicet ejus quod AB quadratus producit. Verum talis numerus non potest esse integer. Nam debet esse minor quam 2 (quia 2, 3 vel alii majores quadrati seu in se ducti producunt plus quam 2, nempe 2 in 2 dat 4, et 3 in 3 dat 9 etc.), sed tamen debet esse major quam 1 (quia 1 in 1 dat 1, non 2), cadit ergo inter 1 et 2, ideo non potest esse integer, sed fractus. Verum nec ullus numerus fractus id praestat. Quia omnis numeri fracti quadratum est numerus fractus, at vero 2 est integer qui debet esse quadratum ipsius AD, ideo AD neque est numerus integer neque fractus, adeoque nec rationalis, sed surdus. Et ideo vel exprimitur Geometrice ductu linearum, ut in figura, vel calculo et quidem vel mechanice per approximationem, vel exacte, ut si dicam esse $\frac{1414}{1000}$ seu 1414 millesimae pedis vel accuratius $\frac{14142136}{10000000}$ (seu 14142136 decimo-millesimo-millesimae), nam haec fractio in se ducta dabit $\frac{20000001}{10000000}$ et paulo plus, ita ut differentia ejus a 2 sit minor una millesimo-millesima. Exacte exprimitur AD vel in numeris commu-

nibus per seriem infinitam, vel in numeris surdis. Quomodo per seriem infinitam exprimatur AD ex AB, hic exponere prolixius foret. Algebraice vel in surdis exprimitur AD per notam faciendae extractionis radicis quadraticae ex 2, seu posita AB=1, erit AD=$\sqrt[2]{2}$, hoc est radix quadratica de 2, seu numerus cujus quadratum est 2. Quae nota surda utilis est in calculo, quia per multiplicationem in se ipsam evanescit, quod de Nota Trisectionis Anguli vel aliqua alia cum calculo nihil commune habente dici non aeque potest.

Operae pretium autem hoc loco erit verum aperire fontem quantitatum incommensurabilium, unde scilicet ipsae in rerum natura oriantur. Horum igitur causa est ambiguitas, seu cum quaesitum ex datis est semideterminatum (de quo supra) ita ut plura (numero tamen finita) satisfaciant, nec datis aliqua ratio applicari possit unum ab altero discernendi. Quod in hoc ipso exemplo praecedentis paragraphi ostendamus, ubi quaerebamus numerum qui in se ipsum ductus faciat 2. Sciendum autem est tales numeros semper esse binos, nam 4 tam ex +2 in +2, quam ex −2 in −2 ducto produci potest. Itaque $\sqrt[2]{4}$ est numerus ambiguus, significatque tam +2 quam —2; similiter $\sqrt[2]{9}$ est numerus ambiguus significatque tam +3 quam —3. Ergo et $\sqrt[2]{2}$ est numerus ambiguus, tamque satisfacit $+\frac{1414}{1000}$ quam $-\frac{1414}{1000}$. Sua natura igitur seu generaliter $\sqrt[2]{a}$ non potest reduci ad quiddam rationale quia omne rationale est determinatum; per accidens tamen, hoc est in quibusdam numeris qui scilicet per talem involutionem sunt orti, procedit extractio. In lineis etiam ostendi potest ambiguitas. Sit (fig. 49) circulus cujus diameter BM sit 3 et portio ejus AB sit 1. Ex puncto A educatur ad angulos rectos ipsa AD occurrens circulo in D, erit AD=$\sqrt[2]{2}$ seu quadrat. AD erit 2. Nam ex natura circuli quadratum ab AD aequatur rectangulo sub BA seu 1 et sub AM seu 2, quod rectangulum est 2. Verum haec ipsa constructio ostendit pari jure quo punctum D invenimus, potuisse etiam inveniri punctum (D) rectam ab A educendo via contraria, et ideo si AD est $+\frac{1414}{1000}$, erit A(D) $-\frac{1414}{1000}$. Quae causa etiam est cur talia problemata non possint per solas rectas solvi, quia recta rectam tantum in uno puncto secat, at circulus a recta secatur in duobus punctis, ac proinde problemata hujusmodi ambigua solvit.

Imo hae surdae expressiones nobis etiam viam praebent quantitates impossibiles seu imaginarias calculo exprimendi. Nam recta

quidem omnis aliam rectam ejusdem plani (nisi parallelae sint) secat; at circulus rectam cujus distantia a centro major est circuli radio, non secat, et problema quod per talem intersectionem solvi deberet, est imaginarium seu impossibile, scilicet in quantitatis quaesitae valore occurrit $\sqrt[2]{-aa}$ (vel simile quid) cujus quadratum est $-aa$, quod ideo impossibile est quia talis numerus $\sqrt[2]{-aa}$ non est positivus neque privativus, seu linea quae quaeritur neque motu antrorsum neque motu retrorsum exhiberi potest. Sive enim positivus esset sive privativus, tamen quadratum ejus foret positivum, ut jam ante monuimus, cum tamen quadratum ejus negativum fiat. Inserviunt tamen etiam imaginariae istae quantitates ad reales exprimendas adeo ut reales quaedam calculo exprimi non possint, nisi interventu imaginariarum, ut alibi ostensum est, sed tunc imaginariae virtualiter destruuntur.

Sed nos explicata satis natura magnitudinis atque mensurae redeamus ad aequalitatis considerationem, ubi notandum est posse duo etiam ostendi aequalia, si ostendatur, unum neque minus neque majus esse altero, et tamen ea esse homogenea, seu unum transformari posse in aliud. Sic sphaerae Archimedes aequalem exhibet cylindrum quendam, parabolae aequale triangulum; patet autem utique sphaeram transformari posse in cylindrum, si liquidum sphaeram implens in cylindrum effundatur. Parabolam in triangulum transformari posse, seu triangulum et parabolam homogenea esse ostendi potest, quia eorum ratio potest inveniri eadem quae rectae ad rectam. Hoc ita probo: Sint (fig. 50) prismata seu cylindriformia corpora duo AE et LQ, unius AE basis seu sectio horizonti parallela sit parabola ut CDE (vel aliae ei congruae), alterius LQ basis sit triangulum NPQ. Ponatur prius AE esse liquore plenum usque ad altitudinem AB, qui si inde effundatur in LQ, ponamus hoc impleri usque altitudinem LM; portionem ipsius LQ impletam LMR aequalem esse portioni ipsius AE eodem liquore prius impletae, nempe ABF. Jam quantitates talium cylindriformium portionum fiunt ex altitudine ducta in basin, seu sunt in composita ratione altitudinum et basium, ergo cum aequales sint portiones, erunt bases reciproce ut altitudines seu CDE parabola ad NPQ triangulum erit, ut recta LM ad rectam AB; quodsi ergo aliud fiat triangulum, quod etiam sit ad triangulum NPQ ut recta AB ad rectam LM, quod per communem Geometriam fieri posse constat (et primo etiam mentis obtutu intelligitur ex natura similium

triangulorum, de qua mox), patet dari aequale triangulum huic parabolae, seu parabolam in triangulum posse transformari.

Etiam ex generatione seu motu cognoscimus magnitudines, ut hoc loco ex motu baseos per altitudinem, qua cylindriforme corpus generatur, datur ratio tale corpus aestimandi; sic ex ductu rectae in rectam aestimatur rectangulum sub duabus rectis comprehensum. Hac methodo superficies quoque et solida rotatione genita aestimantur, et huc pertinet praeclarum illud theorema, quod generatum motu alicujus extensi aequatur generato ex ipso extenso ducto in viam centri gravitatis, cujus ampliationes quasdam satis miras alibi dedi. Possunt tamen hae veritates demonstrari reductione ad absurdum, vel adhibita praecedenti methodo, dum ostenditur aliquid neque majus neque minus esse posse quam dicitur.

Methodus quoque per indivisibilia et infinita, seu potius per infinite parva, seu infinite magna, seu per infinitesima et infinitupla praeclari est usus. Continet enim resolutionem quandam quasi in communem mensuram, licet data quantitate quavis minorem, seu modum, quo ostenditur negligendo aliqua, quae errorem faciunt minorem quovis dato adeoque nullum, duorum quae comparanda sunt, unum in aliud esse transponendo transformabile. Sciendum est autem non componi lineam ex punctis, nec superficiem ex lineis, neque corpus ex superficiebus; sed lineam ex lineolis, superficiem ex superficieculis, corpus ex corpusculis indefinite parvis, hoc est ostenditur duo extensa posse comparari, resolvendo ipsa in particulas aequales vel inter se congruas, utcunque parvas, tanquam in communem mensuram, erroremque minorem esse semper una ex talibus particulis, vel saltem finitae ad ipsam rationis constantis aut decrescentis; unde patet errorem talis comparationis esse quovis dato minorem. Pertinet etiam huc Methodus Exhaustionum, nonnihil diversa a priore, quanquam tandem in radice conveniant. Ubi ostenditur quomodo series quaedam magnitudinum infinita sit, quarum haberi potest prima et ultima, quae continue ad quandam propositam accedunt, ita ut discrimen tandem fiat minus dato, adeoque in ultimo nullum, sive exhaustum sit. Itaque ultima seriei hujus magnitudo (quam haberi diximus) aequatur propositae Magnitudini; sed haec attingere tantum hoc loco visum est.

Nondum definivimus quid sit majus et minus, quod omnino faciendum est. Dico ergo, Minus aliquo esse quod parti ejus aequale est, seu (fig. 51) si duo sint A et B, et sit p pars ipsius A

aequalis ipsi B, tunc A appellamus **Majus**, et B **Minus**. Hinc statim demonstratur celebre illud Axioma, totum esse majus sua parte, assumto tantum alio axiomate per se vero seu identico, quod nimirum unaquaeque res quantitate praedita tanta est quanta est, seu sibi ipsi aequalis est, seu quod omne tripedale est tripedale etc. Demonstratio uno syllogismo comprehensa talis est: **Quicquid aequale est ipsi p parti totius A**, id est **minus est quam totum A** (ex definitione minoris); jam **p pars totius A aequalis est ipsi p parti totius A**, nempe **sibi ipsi** (per Axioma identicum seu per se verum), ergo **p pars totius A est minor quam totum A**, seu totum est majus parte.

Sed hic jam opus est, ut nonnihil explicemus quid sit totum et pars. Equidem manifestum est partem toti inesse seu toto posito eo ipso partem immediate poni, seu parte posita cum quibusdam aliis partibus eo ipso totum poni, ita ut partes una cum sua positione sumtae tantum nomine tenus a toto differant, ac nomen totius compendii causa pro ipsis tantum in rationes ponatur. Sunt tamen et aliqua quae insunt, etsi non sint partes, ut puncta quae sumi possunt in recta, diameter qui sumi potest in circulo; itaque pars debet esse Homogenea toti; et proinde si sint duo A et B homogenea et ipsi A insit B, erit A totum, et B pars, adeo que demonstrationes a me alibi datae de continente et contento seu inexistente possunt transferri ad totum et partem. Quid autem Homogeneum sit, partim attigimus, partim amplius explicabimus.

Ex his autem definitionibus aequalis, majoris, minoris, totius et partis complura axiomata demonstrari possunt, quae ab Euclide sunt assumta. Totum esse majus sua parte jam ostendimus. Totum aliquo modo ex partibus componi posse, seu assignari posse partes quae simul sumtae ipsi coincidant, patet ex dictis paragrapho praecedente, ex natura scilicet inexistentium. Minus minore est minus majore, seu si A sit minus B, et B minus C, erit A minus C, seu $A+L=B$ et $B+M=C$, ergo $A+L+M=C$. Axiomata autem illa, quod aequalibus addendo vel detrahendo aequalia, fiant aequalia, aliaque hujusmodi ex eo statim demonstrantur, quod Aequalia sunt quae sunt magnitudine eadem, seu quae sibi mutuo substitui possunt salva magnitudine, et si eodem modo respectu magnitudinis tractentur (secundum omnes modos tractandi determinatos, quibus unicum tantum producitur) aequalia prodeunt. Hinc statim apparet, aequalia aequalium additione, subtractione, multiplicatione

fieri aequalia; verum si ab aequalibus radices ejusdem denominationis extrahantur, sive purae, sive afflictae, non necesse est statim prodire aequalia, quia problema extrahendi radices sua natura et absolute loquendo est ambiguum. Itaque non licet dicere, quae in se ducta vel cum iisdem producant aequalia eodem modo, ea esse aequalia. Ita duo possunt dari numeri inaequales (nempe 1 et 2) quorum cujusque residuum a ternario (2 vel 1) ductum in ipsum numerum (1 vel 2) faciat aequale nempe 2.

Nunc tempus est, ut postquam de magnitudine et aequalibus diximus, etiam de specie seu forma et similibus dicamus; maximus enim similitudinis in Geometria est usus, natura autem non satis explicata habetur, unde multa per ambages demonstrantur, quae primo statim intuitu recte consideranti patent. Constat ex Euclidis libro Datorum, quaedam esse data positione, quaedam magnitudine, quaedam denique specie. Si quid ex quibusdam datis positione detur, tunc aliud quod ex iisdem eodem modo (determinato) datur, erit priori coincidens seu idem numero; si quid ex quibusdam magnitudine detur, et aliud ex iisdem vel aequalibus eodem modo (determinato) detur, erit priori aequale; si quid ex quibusdam specie detur, et aliud ex iisdem vel similibus eodem modo determinato detur, erit ejusdem speciei cum priore seu erit simile. Denique quae similia et aequalia sunt, ea congrua sunt. Et quae magnitudine pariter et specie data sunt, ea dici potest exemplo vel typo data esse, ita ut quae ejusdem typi vel exempli sunt, id est pariter qualitatis seu formae et quantitatis, ea congrua dicantur. Porro quae nullo modo discerni possunt, neque per se neque per alia, ea utique eadem seu coincidentia sunt, et talia in rebus quarum nihil aliud quam extensio consideratur, sunt quae eandem habent positionem seu quae eidem loco actu congruunt. At sunt aliqua quae per omnia conveniunt seu ejusdem typi sive exempli sunt, et tamen differunt numero, ut rectae aequales, duo ova per omnia similia, duo sigilla in ceram uniformem ex eodem typo expressa. Haec manifestum est si per se spectentur, nullo modo discerni posse, etsi conferantur inter se. Solo erga situ ad externa discernuntur. Ut si duo ova perfecte sint similia et aequalia, et juxta se locentur, saltem notari potest unum alio orientalius aut occidentalius, vel septentrionalius aut meridionalius, vel superius aut inferius esse, vel alteri alicui corpori extra ipsa posito esse propius. Et haec dicuntur congrua, quae talia sunt, ut

nihil prorsus de uno affirmari possit, quod non possibile sit etiam circa aliud intelligi solo discrimine numeri seu individui, seu positionis quae certo aliquo tempore cuique est, quia nec plura eodem tempore sunt in eodem loco, nec idem in pluribus. At similia sunt, quorum species seu definitio est eadem, seu quae ejusdem sunt speciei infimae, ut quilibet circuli sunt ejusdem speciei, et eadem definitio cuilibet competit, nec subdividi potest circulus in diversas species, quae aliqua definitione differant. Etsi enim alius possit esse circulus pedalis, alius semipedalis etc., tamen pedis nulla dari potest definitio, sed opus est typo aliquo fixo et permanente, unde mensurae rerum ex durabili materia fieri solent, et ideo quidam proposuit ut pyramides Aegypti, quae tot jam seculis durarunt et diu adhuc verisimiliter duraturae sunt, adhiberentur. Sic quamdiu ponimus nec globum terrae, nec motum siderum notabiliter mutari, poterit eadem investigari a posteris quantitas gradus terreni, quae a nobis. Si quae species eandem toto orbe et multis seculis magnitudinem servarent, ut cellae apum facere quibusdam videntur, hinc quoque sumi posset constans mensura. Denique quamdiu ponimus in causa gravitatis nihil mutari notabiliter, nec in motu siderum, poterunt posteri ope penduli discere mensuras nostras. At si quemadmodum alibi jam dixi Deus omnia mutaret proportione eadem servata, perisset nobis omnis mensura, nec possemus scire quantum res mutatae sint, quoniam mensura nulla certa definitione comprehendi adeoque nec memoria retineri potest, sed opus est reali ejus conservatione. Ex quibus omnibus discrimen inter magnitudinem et speciem, seu inter quantitatem et qualitatem elucere arbitror.

Itaque si duo sint similia, ea per se sigillatim discerni non possunt. Exempli causa duo circuli inaequales non discernentur, quamdiu unusquisque eorum sigillatim spectatur. Omnia theoremata, omnes constructiones, omnes proprietates, proportiones, respectus, qui in uno circulo notari possunt, poterunt etiam in alio notari. Ut se habet diameter ad latus polygoni cujusdam regularis inscripti vel circumscripti in uno, ita etiam se habebit in altero; ut circulus unus se habet ad quadratum suum circumscriptum, ita etiam alius ad suum; unde statim patet permutando circulos esse ut quadrata diametrorum, nam quia A est ad B ut L ad M (fig. 52) erit permutando A ad L ut B ad M. Et generaliter hinc patet, superficies similes esse ut quadrata homologarum rectarum, et

corpora similia ut cubos homologarum rectarum. Hinc et Archimedes assumsit, centra gravitatis similium figurarum similiter sita esse. Itaque ut duo similia, verbi gratia duo circuli, discernantur, non opus est eos tantum sigillatim spectari, et memoria rem geri, sed opus est ut simul spectentur sibique realiter admoveantur, vel communis aliqua realis mensura ab uno ad alterum delata ipsis applicetur, vel aliquid per applicationem realis mensurae jam mensuratum aut mensurandum. Atque ita demum apparebit utrum congrua sint vel non. Nam si duorum similium aliqua homologa sint congrua, v. g. diametri duorum circulorum, aut parametri duarum parabolarum, necesse est ipsa similia etiam plane congrua adeoque et aequalia esse. Illud verum non est, si similibus addantur similia aut detrahantur, provenire similia, nisi addantur aut detrahantur eodem modo utrobique. Et generaliter quae ex similibus similiter seu eodem modo determinantur, ea sunt similia; quod si semideterminentur, cum problema ambiguum est, saltem cuilibet semideterminatorum ab una parte respondebit unum ex semideterminatis ab alia, quod ipsi simile erit. Quod et de aequalibus, congruis et coincidentibus dici potest. Si duorum similium duo homologa coincidant, duo similia erunt congrua tantum, nam quae coincidunt, ea congrua sunt, at homologis similium congruis existentibus ipsa congrua sunt.

Porro similitudinem notare soleo hoc modo $\sim$ et $A \sim B$ significat A sim. B. Ex sigillatim autem similibus non licet ut dixi colligere etiam composita similia esse, et licet sit $AB \sim LM$ et $AC \sim LN$ et $BC \sim MN$, non tamen licet concludere $ABC \sim LMN$, alioqui cum quaevis recta cuivis sit similis, concludi posset quamlibet figuram cuivis esse similem, cum tamen in congruitatibus procedat talis argumentandi ratio. At in ternionibus et altioribus combinationibus talis argumentatio procedit, quod est notabile. Nempe si similes sint omnes terniones ab una parte omnibus ternionibus ab altera parte, etiam quaterniones, quiniones etc. inde conflatae erunt similes, seu si sit (fig. 53) $ABC \sim LMN$ et $ABD \sim LMP$ et $ACD \sim LNP$ et $BCD \sim MNP$, erit $ABCD \sim LMNP$. An autem una ternionum omitti possit seu ex caeteris concludatur, videamus, verb. gr. an omitti possit $BCD \sim MNP$. Sumamus triangulo ABC simile LMN et ipsi ABD simile LMP, patet dato ABCD et LMN (quod specie datum est) assumto magnitudine et positione pro arbitrio dari et LMP specie et magnitudine, cumque LM habeatur et po-

sitione (ob assumtam LM in LMN) patet P cadere in circulum triangulo LMP circa LM tanquam axem moto descriptum. In plano tamen hoc non nisi bis assumi potest P manentibus L et M, nempe vel in P vel in π (quia circuli hujus circumferentia planum in duobus punctis perforat). Ex quibus tamen P eligi debere excluso π, ostendit tertia similitudo, nam $ACD \sim LNP$, neque enim est $ACD \sim LN\pi$. Itaque in plano hoc modo omnia sunt determinata, seu ex solis tribus similitudinibus ternionum respondentium colligitur etiam similitudo quartae ternionis adeoque et quaternionis totalis, cumque in figura ascripta A, B, C, D sint in eodem plano, erunt utique etiam L, M, N, P in eodem plano. Sed absolute, in spatio si A, B, C, D utcunque posita intelligantur, videamus quid sit futurum similitudinibus ternionum ad colligendam similitudinem totalium quaternionum. Itaque cum ex duabus prioribus similitudinibus duo habeamus, LMN (assumtam positione et magnitudine, datam specie) et circulum axe LM puncto P axi firmiter cohaerente circa axem rotato descriptum, hinc ex $ACD \sim LNP$, cum habita jam LN, detur LP et NP, dabitur etiam circulus axe LN puncto P axi cohaerente circa ipsum rotato descriptus. Qui duo circuli non sunt in eodem plano, sunt tamen ambo in planis ad planum LMN rectis, seu sunt ipsi ambo recti ad planum LMN. Debent etiam necessario sibi occurrere, alioqui quaesitum esset impossibile, quod tamen esse possibile aliunde constat (ex generalibus postulatis, quod cuique ubique simile haberi possit), itaque hi duo circuli sibi occurrunt. Sed duo circuli ad planum in quo centra sua habent recti, eodem modo se habent respectu plani, tam supra hoc planum quam infra planum, ergo cum occurrunt sibi, occurrent sibi tam supra quam infra planum, adeoque in punctis duobus. Superest jam $BCD \sim MNP$, ubi cum MN detur positione, et MNP specie, utique dabitur MNP typo seu magnitudine et specie, seu iterum dabitur circulus axe MN a puncto P descriptus. Cumque quemlibet eorum secet in duobus punctis, et una minimum intersectio cum utroque coincidat, seu incidat in punctum ubi duo circuli priores sese ipsi secant, alioqui problema foret impossibile, necesse est ut ambae intersectiones coincidant cum duabus prioribus intersectionibus. Unde tertius circulus nihil exhibet novi, et sufficiunt proinde tres terniones ad concludendam quartam; sed problema est semideterminatum, et res eo recidit ac si propositum fuisset datis distantiis unius puncti a tribus punctis, invenire illud

quartum, quod problema est semideterminatum. Modus autem quo id hoc loco demonstravimus, egregius est et mentalis, methodusque ipsa qua inde ratiocinationem ad similia instituimus, etiam egregia est, cum prius tria puncta partim assumimus, partim obtinemus qualia oportet, unde problema pro quarto est determinatum, ut quaternio sit quaternioni similis. Pro quinione alteri simili inveniend inveniatur primum quaternio una similis, quod fit tribus triangulis seu ternionibus. Superest ad hoc unum punctum, idque plane ex datis determinatum est, datis scilicet distantiis ejus ex his quatuor punctis; itaque tantum duabus adhuc opus est ternionibus seu triangulis, quas novum punctum ingrediatur. Nempe ut ostendimus,

sint ipsis ABC ABD ACD,	erit ABCD	adeoque et BCD
similia LMN LMP LNP,	simile ipsi LMNP	simil. MNP

Quaeritur, ex quibus praetera concludatur ABCDE simile ipsi LMNPQ. Invenimus prius aliquod LMNP simile ipsi ABCD, hinc cum LMNP detur positione, adeoque magnitudine multo magis, et LMNPQ detur specie (quia datur ei simile ABCDE), necesse est LMNPQ dari etiam magnitudine, seu rectas LQ, MQ, NQ, PQ magnitudine dari; ergo punctum Q datur positione, nam ostensum alias est, punctum dato suo ad quatuor puncta non in eodem plano posita situ esse determinatum seu unicum. Sed ut ad terniones nostras redeamus, sufficit prioribus tribus ternionum similitudinibus addi has

ut sint ipsis ABE, CDE,	ut fiat ABCDE
similia LMQ, NPQ,	simile ipsi LMNPQ,

ita enim ob ABE∾LMQ, quia datur ABE et LM, dabitur et LQ et MQ, et ob CDE∾NPQ, quia datur CDE et NP, dabitur NQ et MQ. Pro duabus ABE∾LMQ et CDE∾NPQ potuissemus etiam adhibere ACE∾LNQ et BDE∾LPQ, vel ADE∾LPQ et BCE∾MNQ, observando semper ut in duabus similitudinibus quas conjungimus non nisi E et Q sint communia. Hinc patet etiam ex similitudine trium quaternionum dari similitudinem quinionis. Nam ex his quinque similitudinibus ternionum ita colligo tres quaterniones,

ex ABC, ABD, ACD	ex ABE, ACE, BCE	ex ACE, ADE, CDE
simil. $\overline{LMN}$, $\overline{LMP}$, $\overline{LNP}$	simil. $\overline{LMQ}$, LNQ, MNQ	simil. LNQ, $\overline{LPQ}$, NPQ
colligit. ABCD∾LMNP	coll. ABCE∾LMNQ	coll. ACDE∾LNPQ

Nam tribus minimum quaternionibus opus est, ut quinque terniones ad quinionem sufficientes quas lineola subducta notavimus, obtineantur. Pro seniorum similitudine si velimus ut ABCDEF fit

∾LMNPQR, faciamus ipsi ABCDE∾LMNPQ, ad quod opus est quinque ternionibus supra dictis. Deinde quia omne punctum ex situ suo ad quatuor alia dato satis determinatum est, tantum opus est ut inveniamus LR, MR, NR, PR, quod fiet eodem modo quo supra assumtis tantum binis ternionum similitudinibus, nihil praeter F et R commune habentibus, nempe ut sint ipsis $\overline{ABF}$, $\overline{CDF}$, unde similia $\overline{LMR}$, $\overline{NPR}$ junctis quinque similitudinibus superioribus colligitur senio ABCDEF∾LMNPQR. Itaque ex tribus ternionibus seu triangulis similibus colligi potest quaternionum duarum seu pyramidum ex ipsis conflatarum similitudo; ex quinque ternionibus seu triangulis similibus (vel ex tribus pyramidibus similibus) colligi potest duarum quinionum seu pentagonorum solidorum inde conflatorum similitudo; ex septem ternionibus seu triangulis similibus colligitur duorum hexagonorum solidorum ex ipsis conflatorum similitudo, et ita porro in infinitum, supponendo plura quam tria ex punctis non esse in uno plano. Ex ternionibus seu triangulis similibus

semel,	ter,	quinquies,	septies,	novies etc.
colligitur similitudo duarum ex ipsis conflatarum				
ternionum,	quaternionum,	quinionum,	senionum,	septenionum etc.
seu solidorum	tetragonorum, sive pyramidum	pentagonorum,	hexagonorum,	septagonorum etc.

ubi nota, ex numero angulorum solidorum non statim definiri numerum hedrarum. Operae pretium autem erit etiam progressionem indagare, qua ostendatur quomodo altiores combinationes ex quaternionibus seu pyramidibus, et ex quinionibus seu pentagonis solidis, et ita porro colligantur sufficienter quod ope ternionum sufficientium jam inventarum constituere nunc in proclivi est.

Verum illud hic potissimum notandum est, eadem quae de similitudinibus diximus circa altiorum combinationum similitudines colligendas ex ternionibus, quaternionibus, quinionibus etc., ea prorsus applicari posse ad congruitates. Eodem enim modo invenitur LMPN congruum ipsi ABCD (fig. 53) quo invenitur LMPN simile ipsi ABCD, hoc solo discrimine quod cum ad simile inveniendum possit assumi primum recta LM pro arbitrio, pro congruo inveniendo debet assumi LM aequalis ipsi AB, habita jam ipsa LM, unde jam triangulum LMN habetur typo (quippe simile dato ABC) quod deinde assumi potest positione, et locari ubi placet.

Unde jam cum distantiae puncti P a punctis L, M, N sint datae, haberi potest punctum P, fitque LMNP (solidum pyramidale) simile vel etiam congruum ipsi ABCD. Et notanda est haec methodus, quae enim sufficiunt ad aliquid construendum secundum praescriptam conditionem, hoc loco similitudinem vel congruitatem, ea etiam sufficiunt ad colligendam ex ipsis illam ipsam conditionem. Illud saltem privilegium habent congruitates, quod etiam ex congruitatibus binionum seu rectarum colligi possunt, at pro similitudinibus novis ex similitudine binionum seu rectarum nihil potest colligi, sunt enim omnes rectae similes inter se; at ex similitudinibus triangulorum seu ternionum colligi possunt similitudines aliorum polygonorum etiam solidorum. Et quia ad tetragonum in plano aut tetragonum in solido simile concludendum totidem similitudinibus triangulorum opus est, forte et in altioribus polygonis sive in plano sive in solido similibus colligendis, eodem numero similium triangulorum opus erit, quod nunc discutere non vacat.

Caeterum ut duae figurae similes sint, angulos earum congruos esse opus est, quod ita ostendo, quoniam alioqui si angulos respondentes seu homologos non haberent aequales adeoque congruos, tunc per se sigillatim possent discerni, nam si (fig. 54) angulus A non congruat angulo (A), hinc in AC sumendo AD=AB et jungendo DB, similiterque in (A)(C) sumendo (A)(D)=(A)(B) et jungendo (D)(B), non erit eadem ratio DB ad AB quae (D)(B) ad (A)(B), ergo vel hinc discerni possunt ABC et (A)(B)(C). Contra si anguli omnes sint iidem, triangula ipsa esse similia ita ostenditur, quia ex datis uno latere et omnibus angulis datur triangulum, sunt autem latus lateri simile (recta scilicet omnis omni rectae) et angulus angulo congruus, ergo triangula ex similibus et congruis eodem modo determinantur, adeoque similia sunt. Ad Tetragona, Pentagona etc. similia efficienda (sive in plano sive in solido) non tantum opus est omnes angulos esse aequales, quia ex dato uno latere et angulis omnibus non statim datur polygonum trigono altius, et ideo quot lateribus opus est ad tetragonum, pentagonum etc. cum omnibus angulis datis determinandum, eorum laterum etiam ratio eadem assumi potest quae in tetragono et polygono alio dato, atque inde angulis existentibus iisdem similis est figura, quoniam ex his lateribus et angulis etiam construi potest figura; et in universum sive omnia latera omnesque anguli, sive aliqua tantum latera et aliqui anguli modo data sufficientia sint ad

construendam figuram, et problema ex ipsis sit vel penitus determinatum (vel ita semideterminatum ut plura satisfacientia sint congrua aut similia inter se), tunc sufficit in his datis nullam posse notari dissimilitudinem, atque adeo angulos utrobique esse aequales, latera autem respondentia data utrobique proportionalia, ut figurae utrobique similes oriri cognoscantur. Quodsi autem duorum figurarum similium homologa aliqua vel semel sint congrua, reliqua omnia esse congrua jam supra notatum est. Ex coincidentia autem una homologorum coincidentia omnimodo colligi non potest; sed pro natura figurarum pluribus paucioribusve homologorum coincidentiis est opus ad omnimodam coincidentiam colligendam.

Hac jam arte dum anguli similium figurarum respondentes necessario sunt aequales adeoque congrui, effecere Geometrae ut non opus habeant peculiaribus praeceptis de similitudine atque adeo ut omnia quae de similitudinibus asseri possunt in Geometria possint demonstrari per congruitates. Quod quidem ad demonstrationes quae intellectum cogunt prodest, sed ita saepe opus est magnis ambagibus, cum tamen per considerationem ipsius similitudinis brevi manu, et simplici mentis intuitu eadem praenoscere liceat, analysi quadam mentali a figurarum inspectione atque imaginibus minus dependente.

Porro eodem fere modo quo ex congruis nascuntur aequalia, etiam ex similibus nascuntur Homogenea, quod notare operae pretium est, ut enim aequalia sunt quae vel sunt congrua vel transformando possunt reddi congrua, ita Homogenea sunt, quae vel sunt similia (quorum homogeneitas per se manifesta est, ut duorum quadratorum inter se, vel duorum circulorum inter se) vel saltem transformando possunt reddi similia; quae transformatio autem fit, si nihil auferatur nec addatur et tamen fiat aliud, ubi quaedam transformatio fit partibus quibusdam servatis, ut cum quadratum ABCD (in fig. 10) secamus in duo triangula ABD et BCD, eaque aliter reconjungendo (verbi gratia ABD transferendo in BCE) inde formamus triangulum DBE; quaedam vero transformatio nullas servat partes, ut cum recta transformanda est in curvam, superficies gibba in planum, et omnino rectilineum in curvilineum vel contra; tunc ergo sola minima servantur, et transformatio est cum ex uno fit aliud, saltem minimis iisdem manentibus idque in perfecta transformatione reali per flexile aut liqudum ita servatur. At in transformatione mentali pro minimis adhiberi possunt quasi

minima, id est indefinite parva, ut fiat quasi transformatio, quoniam et pro curvilineo adhibetur quasi curvilineum, nempe polygonum rectilineum; numeri laterum quantumlibet magni quodsi igitur quasi transformatio quam quaerimus hoc modo succedat; vel error seu differentia inter quasi transformationem et veram semper minor atque minor prodeat, ut tandem fiat minor quovis dato, concludi potest vera transformatio. Et quoniam aequalia sunt, quorum unum ex alio fieri potest transformando, patet etiam Homogenea esse inter se quae ipsa sunt similia, vel quibus aequalia saltem sunt similia.

Patet etiam Homogenea esse quae ejusdem rei continuo incremento aut decremento generantur, exceptis saltem minimis et maximis seu extremis. Ita si ponamus motu puncti continue crescere viam seu lineam, lineae ab uno puncto descriptae sunt homogeneae inter se, quin et lineae a diversis punctis generatae, licet enim sint dissimiles, patet dissimilitudinem illam oriri a peculiaribus quibusdam impedimentis quae non possunt mutare homogeneitatem. Idemque est de his quae motu lineae aut superficiei describuntur. Intelligendus autem est motus, quo punctum unum describens non incedit per vestigia alterius puncti describentis. Quin et continue imaginari possumus homogenea ex se invicem fieri, ut circulus transmutatus continue in ellipses alias atque alias transire potest per ellipses infinitas omnium specierum possibilium. Et in universum in Homogeneis locum habet illud axioma, quod transit continue ab uno extremo ad aliud transire per omnia intermedia; quod tamen ad angulum contactus non pertinet, qui revera medius non est, sed alterius planeque heterogeneae naturae.

Euclides Homogenea aliter definit, quorum scilicet unum ab alio subtrahendo et residuum rursus a subtracto idque semper continuando restat vel nihil vel quantitas data minor. Verum quia ista quantitas data, qua minor restare debet, etiam prius compertae homogeneitatis esse debet, compertae autem erit homogeneitatis, si sit similis alterutri, vel si alterutram repetendo metiatur. Itaque si duabus datis quantitatibus quasi mensura communis inveniri potest minor vera mensura alterutrius utcunque parva assumta tunc dici potest duo illa inter se esse homogenea, quae definitio vera quidem est, et utilis ad demonstrationes cogentes conficiendas, sed non aeque mentem illustrat, quam ea quae ex similitudinum

consideratione sumitur. Et vero altera ex altera consequitur, tali enim quasi resolutione in mensuram quasi communem ostenditur posse unum in aliud transformari, vel saltem in aliquid ei simile ita ut error quovis dato minor. Nam omnia quae mensuram communem habent, ea utique ita transformari posse, ut alterum alteri simile fiat, manifestum est.

Caeterum et de Continuo aliquid dicendum est et de Mutatione, antequam ad Extensum et Motum (quae eorum species sunt) explicandum veniamus. Continuum est totum, cujus duae quaevis partes cointegrantes (seu quae simul sumtae toti coincidunt) habent aliquid commune, et quidem si non sint redundantes seu nullam partem communem habeant, sive si aggregatum magnitudinis eorum aggregato totius aequale est, tunc saltem habent communem aliquem terminum. Et proinde si ab uno transeundum sit in aliud continue, non vero per saltum, necesse est ut transeatur per terminum illum communem, unde demonstratur, quod Euclides tacite sine demonstratione assumsit in prima primi, duos circulos ejusdem plani, quorum unus sit partim intra partim extra alterum, sese alicubi secare, ut si circulus unus (fig. 55) describatur radio AC, alter radio BC, sintque AC et BC aequales inter se et ipsi AB, manifestum est aliquid B quod in una circumferentia DCB est, cadere intra circulum alterum ACE, quia B est ejus centrum, sed vicissim patet D, ubi recta BA producta circumferentiae DCB occurrit, cadere extra circulum ACE, itaque circumferentia DCB, cum sit continua et partim reperiatur intra circulum ACE partim extra, ejus circumferentiam alicubi secabit. Et in genere, si linea aliqua continua sit in aliqua superficie, sitque partim intra partim extra ejus superficiei partem, hujus partis peripheriam alicubi secabit. Et si superficies aliqua continua sit partim intra solidum aliquod partim extra, necessario ambitum solidi alicubi secabit. Quodsi sit extra tantum, vel intra tantum, et tamen peripheriae vel termino alterius occurrat, tunc eum dicitur tangere, hoc est intersectiones inter se coincidunt.

Hoc autem aliquo calculi genere etiam exprimere possumus, ut si alicujus extensi pars sit $\overline{Y}$ (fig. 56) et unumquodque punctum cadens in hanc partem $\overline{Y}$ vocetur uno generali nomine Y; omne autem punctum ejusdem extensi cadens extra eam partem vocetur uno generali nomine Z, adeoque totum extensum extra illam partem $\overline{Y}$ sumtum vocetur $\overline{Z}$, patet puncta in ambitum partis $\overline{Y}$ ca-

dentia esse communia ipsi $\overline{Y}$ et ipsi $\overline{Z}$ seu partim posse appellari Y et Z, hoc est dici posse aliqua Y esse Z et aliqua Z esse Y. Totum autem extensum utique ex ipsis $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ simul componitur seu est $Y(+)Z$, ut omne ejus punctum sit vel Y vel Z, licet aliqua sint et Y et Z. Ponamus jam aliud dari extensum novum, verbi gratia AXB existens in extenso proposito $\overline{Y}(+)\overline{Z}$, et extensum hoc novum vocemus generaliter $\overline{X}$, ita ut quodlibet ejus punctum sit X, patet ante omnia omne X esse vel Y vel Z. Si vero ex datis constet aliquod X esse Y (verbi gratia A quod cadit intra $\overline{Y}$) et rursus aliquod X esse Z (verbi gratia B quod cadit extra $\overline{Y}$ adeoque in $\overline{Z}$), sequitur aliquod X esse simul et Y et Z. Unde cum alias in genere ex particularibus hoc modo nihil sequatur, tamen in continuo ex iis tale quid colligitur ob peculiarem continuitatis naturam. Ut igitur consecutionem in pauca contrahamus: Si sint continua tria $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ et omne X sit vel Y vel Z, et quoddam X sit Y, et quoddam Y sit Z, tunc quoddam X erit simul Y et Z. Unde etiam colligitur, $\overline{X}(+)\overline{Y}$ novum aliqud continuum componere, quia quoddam Y est Z seu quoddam Z est Y.

Possumus continuum aliquod intelligere non tantum in simul existentibus, imo non tantum in tempore et loco, sed et in mutatione aliqua et aggregato omnium statuum cujusdam continuae mutationis, v. g. si ponamus circulum continue transformari et per omnes Ellipsium species transire servata sua magnitudine, aggregatum omnium horum statuum seu omnium harum Ellipsium instar continui potest concipi, etsi omnes istae Ellipses non sibi apponantur, quandoquidem nec simul coexistunt, sed una fit ex alia. Possumus tamen pro ipsis assumere earum congruentes, seu componere aliquod solidum constans ex omnibus illis Ellipsibus, seu cujus sectiones basi parallelae sint omnes illae Ellipses ordine sumtae. Si tamen concipiamus sphaeram ordine transformari in aequales Sphaeroeides, tunc non possumus exhibere aliquod continuum reale ex omnibus istis sphaeroeidibus hoc modo conflatum, quia non habemus in sola extensione plures quam tres dimensiones. Si tamen velimus adhibere novam aliquam considerationem, verbi gratia ponderis, possumus quartam exhibere dimensionem, et ita reale solidum exhibere sed heterogeneum seu partium diversi ponderis, quod suis sectionibus eidem basi parallelis repraesentet omnes sphaeroeides. Verum ne opus quidem est ascendi ad quartam dimensionem aut pondera praeter extensiones adhiberi, tantum enim

pro sphaeroeidibus sumamus figuras rectas ipsis proportionales, quod utique fieri potest, et planum inde conflari poterit, cujus sectiones basi parallelae erunt sphaeroeidibus ordine respondentes proportionales atque adeo repraesentabunt continuam sphaerae in sphaeroeides transmutationem. Nam sufficit nobis assumi posse aliquam rectam AX (fig. 57) quae percurratur a puncto aliquo mobili X, incipiendo ab A, et ponamus cuilibet portioni rectae seu abscissae ut AX respondentem exhiberi posse statum sphaerae continue in sphaeroeides transmutatae salva magnitudine, repraesentatum per rectam XY seu ut rectae ordinatae XY sint ordine sphaeroeidibus respondentes, seu ut sit ordine XY ad AB ut rationes axium conjugatorum (per quas data magnitudine quae hic semper eadem est sphaeroeides determinatur) sunt ad unitatem (nam in sphaera est ratio aequalitatis). Sic enim patet, quomodo per rectam AX et lineam BY seu per planam figuram BAXYB repraesentetur mutatio continua, sed si non magnitudine retenta mutata fuisset species, sed retenta specie magnitudo, ipsae XY forent ipsis magnitudinibus seu statibus proportionales. Nunc vero ubi species mutatur, saltem proportionales sunt cuidam speciem determinanti. Verum re expensa sufficit sola recta AX, ita ut concipiamus cuilibet logarithmo rationis axium conjugatorum respondentem sumi posse portionem rectae, quae in A seu casu aequalitatis evanescit. Si vero non logarithmis, sed rationibus velimus respondentes sumere abscissas, tunc abscissa pro casu sphaerae vel circuli assumi debet CA, repraesentans unitatem, quae continue crescet, dum rationes axium crescunt. Continue autem decrescit cum rationes decrescunt, evanescit autem in C, quando circulus in Ellipsin vel sphaera in sphaeroeidem transformatur longitudinis infinitae parvae. Atque haec si in transmutando fit mutatio secundum unam tantum considerationem, ut hoc loco, sola mutatur ratio axium, quia Ellipses servata magnitudine non nisi uno modo variari possunt, sed si variare jubeamur circulum, infinities infinitis modis, nempe tam secundum magnitudinem, quam secundum speciem, ita ut transire debeat per omnes Ellipsium typos, tunc mutatio ista repraesentanda erit non per rectam seu lineam, sed per aliquam superficiem; idem est si servanda fuisset magnitudo circuli, sed transformari debuisset in Ellipses secundi gradus, quarum non tantum infinitae sunt species, sed et infinita genera, et sub quovis genere infinitae species, adeoque species infinities infinitae. Quod si jubeas circulum non

tantum per omnes Ellipsium secundi gradus species transmutari, sed et magnitudinem variare, adeoque transire per omnes typos Ellipsium secundi gradus, tunc status circuli erunt infinitis vicibus infinities infiniti, et mutationes omnes repraesentandae sunt per aliquod solidum. Quodsi circulus transire debeat per omnes typos Ellipsium sive Ovalium tertii gradus, non possunt exhiberi omnes variationes in uno continuo nisi per quartam dimensionem, adhibito verbi gratia pondere, vel alia heterogeneitate extensi. Et ita porro. Necesse est autem hoc modo uno momento infinitas, imo aliquando et infinities infinitas fieri mutationes, alioqui una aeternitas omnibus variationibus percurrendis non sufficeret.

Itaque ex his etiam mutationis continuae natura intelligitur, neque vero ad eam sufficit, ut inter status quoslibet possit reperiri intermedius; possunt enim progressiones aliquae excogitari in quibus perpetuo procedit talis interpolatio, ut tamen non possit inde conflari aliquod continuum, sed necesse est ut causa continua intelligi possit, quae quovis momento operetur, vel ut cuivis rectae alicujus indefinitae puncto respondens aliquis status assignari possit quemadmodum dictum est. Et tales mutationes intelligi possunt in respectu loci, speciei, magnitudinis, velocitatis, imo et aliarum qualitatum, quae hujus considerationis non sunt, ut caloris, lucis. Hinc etiam Angulus contactus nullo modo homogeneus est angulo communi, imo ne ei quidem est *συγγενής*, ut punctum lineae, sed se habet ad eum quodammodo ut angulus ad lineam; neque enim aliqua continua generatio certae legis excogitari potest, quae aeque transeat per angulos contactus et angulos rectilineos. Idem est de angulo osculi a me invento, aliisque altioribus. Angulus nimirum sectionis duarum linearum se secantium idem est qui rectarum eas tangentium, angulus contactus duarum linearum se tangentium idem est qui angulus contactus duorum circulorum lineas osculantium, ut alibi ostendi.

Antequam hinc abeamus, etiam aliquid dicendum est de Relatione sive habitudine rerum inter se, quae multum a ratione seu proportione differt, quippe quae tantum una aliqua ejus species est simplicior. Sunt autem relationes perfectae seu determinantes, per quas unum ex aliis inveniri potest; sunt relationes indeterminatae, quando quid ita se habet ad aliud, ut tamen notitia ejus habitudinis ad unum ex alio dato determinandum non sufficiat, nisi accedant novae res aut novae conditiones. Interdum autem tantum ac-

cedunt novae conditiones, interdum vero et novae res. Potest etiam in relationibus spectari homoeoptosis et heteroeoptosis. Nimirum si sit relatio quaedam inter res homogeneas A, B, C, et una quaeque harum trium rerum eodem modo se habeat, ita ut permutando eorum locum in formula, nihil aliud a priore relatione oriatur, tunc relatio erit absoluta quaedam Homoeoptosis; potest tamen et fieri, ut quaedam tantum rerum homogenearum in relationem cadentium se habeant homoeoptote, verbi gratia A et B, licet C aliter quam A vel B se habeat. Atque haec Homoeoptosis maximi est in ratiocinando momenti. Fieri etiam potest ut sit relatio quaedam inter A et B (ubi tamen oportet adhuc alia ipsis homogenea relationem ingredi) ubi ipsum A ex dato B sit determinatum, at vero B ex ipso A sit tantum semideterminatum, imo ut sit indeterminatum prorsus. Exemplo haec illustrare placet. Sit quadrans circuli ABCYA (fig. 58) cujus radii AC vel CB vel CY magnitudo vocetur a, at sinus recti YX magnitudo vocetur y, sinus autem complementi CX magnitudo vocetur x. Patet quadratum ipsius CY aequari quadratis de CX et de YX simul, seu aequationem haberi $xx+yy=aa$, quae exprimit relationem inter has tres res homogeneas x, y et a, cujus ope ex dato a et x seu ex dato radio et sinu complementi haberi potest y seu sinus rectus. In hac relatione patet x et y se habere homoeoptote, at a se habere modo ab ipsis diverso. Patet etiam relationem esse semideterminantem quoad positionem, etsi sit absolute determinans quoad molem; nam $y=\sqrt{aa-xx}$, quod est ambiguum et significat tam $y=+\sqrt{aa-xx}$ quam $y=-\sqrt{aa-xx}$, quorum priore significante XY, posterius significat X(Y). Sunt tamen XY et X(Y) congruae seu mole aequales. Patet etiam a seu magnitudinem radii esse constantem seu eodem modo se habere, et quaelibet x et y indefinita, quemadmodum enim ex dato CX et XY habetur radius (extrahendo radicem ex quadratorum ab his summis) ita ex C_2X et $_2X_2Y$ eodem modo habetur radius. Quales constantes magnitudines eodem modo se habentes ad alias indefinitas parametri solent appellari.

Quemadmodum vero hic exposuimus relationem punctorum quadrantis ut Y ad puncta recta X, seu modum quomodo data radii magnitudine et punctis A, B, C datis positione, ex puncto X rectae possit inveniri punctum respondens Y circuli (licet gemino modo seu semideterminate), ita poterimus etiam relationem aliam dare simpliciorem, quomodo ex punctis unius rectae positione datae

puncta respondentia alterius rectae, etiam positione datae, in eodem plano ordine determinari possint, quae relatio reperietur multo simplicior. In fig. 59 sint rectae $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ ejusdem plani sese secantes in puncto A, ita ut aliquod X sit A, et aliquod Y sit etiam A, eoque casu sit $X \infty Y$. Jam datis positione rectis X et $\overline{Y}$ et puncto communi A, dabitur et angulus quem faciunt, adeoque et ratio rectarum AX et XY posito XY esse ordinatam normalem ad AX; ea ratio exprimatur per numerum aliquem n eritque aequatio AX ad XY (seu x ad y) ut 1 ad n seu ut unitas ad hunc numerum fietque $y = nx$. Unde patet relationem istam inter x et y tam esse simplicem, ut non opus sit assumi tertium aliquod ipsis homogeneum, seu alia aliqua linea, multo minus extensio altior; nam n quod assumsimus est numerus tantum seu magnitudo nulla indigens positione, sed sola specie seu notione determinata nec rectis illis homogenea. Et haec simplex relatio duarum Homogenearum magnitudinum nihil aliud est quam ratio, hoc est data est relatio inter duas has rectas, in eodem plano dato existentes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, quia si una ex ipsis positione sit data, et datum sit punctum commune ipsis A, ratio denique inter XY et AX seu inter ordinatam y et abscissam x eadem quae inter n numerum et 1 unitatem; data erit positione etiam altera recta.

Omnem autem relationem inter duas homogeneas solas seu inter duas tantum res magnitudine praeditas homogeneas ita ut nihil aliud praeterea accedat quam numeri, esse rationem sive proportionem, etsi aliquando involuta sit ut alterius naturae appareat, exemplo ostendam. Sit aequatio $x^2 + 2xy = yy$(1), quam nulla alia magnitudo realis ingreditur, quam hae duae inter se homogeneae x et y, quas ponamus esse rectas, ergo scribamus $\frac{y}{x} = n$(2) ita ut n sit ratio ipsius x ad y, vel saltem quotiens seu numerus relationem illam exprimens. Jam ex aequ. 1. divisa per xx prodibit: $1 + \frac{2y}{x} = \frac{yy}{xx}$(3) hoc est (per aequ. 2.) $1 + 2n = nn$(4); res ergo reducta est ad solam rationem, seu numerum eam exprimentem inveniendum; adeoque ex aequatione 1. nihil aliud datur, quam ratio inter y et x, licet illa hoc loco detur surde seu ambigue, fit enim $nn - 2n + 1 = 2$(5) seu extrahendo radicem $-n + 1 = \sqrt[2]{2}$ seu $n = 1 \pm \sqrt{2}$(6). Unde talis modus deduci potest, ex data x seu magnitudine ipsius CX (fig. 60) invenire y seu magnitudinem ipsius

CY vel ipsius C(Y). Fiat triangulum rectangulum isosceles CXA cujus basis sit CX=x, et centro A radio AX describatur circulus X(Y)Y rectam CA productam bissecans, nempe in Y et in (Y), dico rectam CY vel C(Y) esse quaesitam seu ejus magnitudinem exprimere y in aequatione $xx+2xy=yy$. Si CX sit x, tunc CY vel C(Y) fore y; est enim CY ad CX ut $\sqrt{2}+1$ ad 1 et C(Y) ad CX ut $\sqrt{2}-1$ ad 1, seu CX posita unitate sive 1 erit CY $=CA(\sqrt{2})+AY$ (seu 1) $=\sqrt{2}+1$ et $C(Y)=CA(\sqrt{2})-A(Y)$ (seu $-1)=\sqrt{2}-1$. Itaque posita x unitate, erit y summa vel differentia ex his duabus $\sqrt{2}$ et 1, ubi tamen notandum, radicem unam debere intelligi privativam seu falsam, id est etsi moles ipsius C(Y) sit $\sqrt{2}-1$, tamen huic praefigendum esse signum —, ut fiat $-\sqrt{2}+1$. Unde y est vel $1+\sqrt{2}$ vel $1-\sqrt{2}$. Patet etiam hinc porro, locum omnium punctorum Y esse rectam CY, si locus omnium punctorum X sit recta CX, modo talis sit rectarum angulus, ut ducta quacunque parallela ipsi primae XY jam inventae ut ${}_2X_2Y$ semper sit etiam C_2X ad C_2Y, quemadmodum diximus, seu secundum rationem quam aequatio 1 vel ratio inventa in aequ. 6. exprimit. Possunt autem relationes diversarum linearum inter se non tantum exprimi per rectas parallelas ab una ad aliam ductas, sed et per rectas ad unum punctum convergentes, et una saepe relatio alia est simplicior. Ita si (fig. 61) sit Ellipsis, cujus duo oci sint A et B, sumaturque quodlibet in Ellipsi punctum Y, tunc ea proprietas est Ellipseos, ut semper AY+BY sit aequalis constanti rectae, nempe CD axi majori Ellipseos, atque adeo ut AY +BY et A(Y)+B(Y) sint aequales inter se.

Porro ut lineae AYB (fig. 59) natura commode exprimi duabus rectis normalibus YX et YZ ex uno ejus puncto Y emissis ad duas quasdam rectas positione datas, inter se normales CA et CB, ita (fig. 62) lineae Y(Y) in nullo certo plano manentis natura exprimi potest, si ex puncto ejus quocunque ut Y in sublimi posito tres rectae normales in tria plana CXA, CZB, CVD inter se normalia ducantur, nempe YX, YZ, YV, quas vocabimus x, z, v. Quodsi jam duae dentur aequationes, una verbi gratia inter x et z, altera inter x et v, satis determinata erit natura lineae Y(Y). Prior aequatio exprimet naturam lineae Z(Z) a linea Y(Y) in planum CZB projectae, posterior naturam lineae V(V) ab eadem linea Y(Y) in planum CVD projectae. Possunt tamen tria plana esse non tantum normalia inter se, sed et qualiacunque anguli dati, unde si duo

saltem assumantur plana normalia, tertium vero ut CVD anguli indefiniti, possumus invenire utrum non tota linea Y(Y) cadat in aliquod planum, quod fiet si planum CVD arbitrarium tale sumi possit, ut linea V(V) et linea Y(Y) coincidant, seu ut rectae v fiant infinite parvae sive evanescant.

Hinc patet etiam natura locorum, nempe si punctum V (fig. 59) in plano positum sit denturque distantiae ejus YX et YZ a duabus rectis indefinitis CX et CZ in eodem plano positione datis, problema est determinatum, licet ambiguum, hoc est dantur certa puncta numero quatuor in eodem plano, quae satisfacere possunt. Si vero distantiae ipsae non sint datae, sed tantum relatio earum inter se invicem, cujus ope una ex alia data determinatur, tunc problema est indeterminatum, seu fit locus, verbi gratia in fig. 59. circulus, dicimusque puncta Y omnia esse ad circulum, si talis sint naturae, ut ductis a quocunque eorum ordinatis conjugatis normalibus YX et YZ ad duas rectas normales inter se CX et CZ, quadrata ordinatarum conjugatarum simul sumta semper tantundem possint seu eidem quadrato constanti aequentur, talium enim punctorum locus erit ad circulum, cujus centrum est C, radius vero est potentiae seu quadrati constantis latus. Similiter in solido (fig. 62) si puncti Y distantiae YX, YZ, YV a tribus planis CXA, CZB, CVD sint datae, determinatum est problema, licet ambiguum, certa enim puncta numero finita (nempe quatuor) satisfaciunt. Sciendum autem est, datas esse magnitudines assumta aliqua unitate, si tot sint datae aequationes, quot sint quaesitae; itaque si pro tribus rectis x, z, v inveniendis tres etiam dentur aequationes (a se invicem independentes), ipsae datae intelligentur, problemaque erit determinatum; quodsi vero duae tantum dentur aequationes, problema est indeterminatum primi gradus seu punctum quaesitum Y determinate non habetur, sed Y seu locus omnium Y seu linea Y(Y) cujus omnia puncta his conditionibus satisfacient. Si vero pro tribus illis magnitudinibus seu rectis inveniendis tantum data sit nobis una aequatio quam hae tres rectae ingrediuntur, tunc problema est infinities indeterminatum, seu est indeterminatum secundi gradus, et locus est ad superficiem seu superficies aliqua determinata habetur (vel semideterminata seu ambigua, nempe gemina, aut tergemina, aut quadrigemina etc.) cujus omnia puncta satisfaciunt huic conditioni sive relationi per hanc aequationem expressae. Unde jam intelligimus, quid sint loca ad punctum, lineam, superficiem, et quomodo

datis aequationibus sive relationibus per aequationes expressis puncta, lineae, superficies determinentur.

Haec eadem per compositiones motuum rectilineorum quoque explicari possunt. Nam (fig. 63) si per rectam $\overline{X}$ incedat regula RX in eodem semper plano et eodem semper angulo servato et interea in ipsa regula moveatur punctum aliquod Y, ita ut si in puncto A seu X seu Y incipiat motus utriusque, et deinde regula perveniente in ${}_2X, {}_3X$ etc. punctum perveniat in ${}_2Y, {}_3Y, {}_4Y$ (id est si in primo situ A_1R quievisset regula, in ${}_2Z, {}_3Z, {}_4Z$) linea aliqua $\overline{Y}$ seu ${}_1Y_2Y_3Y$ etc. composito hoc motu describetur, cujus data est natura ex data relatione inter AX et AZ respondentes; exempli causa si AZ sint ipsis AX proportionales seu si sit A_2X ad A_2Z (seu ad ${}_2X_2Y$) ut A_3X ad A_3Z, et ita porro, seu si sint A_2X, A_3X, A_4X ut A_2Z, A_3Z, A_4Z, linea AYY seu $\overline{Y}$ erit recta; si AZ sint in duplicata ratione ipsarum AX seu ut earum quadrata, linea $\overline{Y}$ erit parabola quadratica, si in triplicata, erit parabola cubica etc. Si AZ sint reciproce ut AX seu A_2X ad A_3X ut A_3Z ad A_2Z, idque ubique, linea Y erit Hyperbola, cujus Asymptotae sunt $\overline{X}$ et $\overline{Z}$. Atque ita porro aliae atque aliae lineae oriri possunt, quae persequi hujus loci non est.

Illud in genere notare praestat, quomodo ex hoc motu intelligatur, ad quas partes linea cavitatem aut concavitatem vertat, utrum habeat flexum contrarium, verticem seu punctum reversionis, maximasque aut minimas ejus periodi abscissas vel ordinatas. Primum ponamus in fig. 64 velocitates regulae seu ipsa abscissarum AX incrementa momentanea ${}_2X_3X, {}_3X_4X$ etc. (quae indefinite parva sunt) ipsis velocitatibus respondentibus puncti seu abscissarum conjugatarum AZ (seu ordinatarum XY) incrementis momentaneis ${}_2Z_3Z, {}_3Z_4Z$ etc. proportionales, tunc AYY est recta; sin minus, linea erit curva. Quodsi jam (fig. 63) ponamus velocitate regulae manente uniformi seu abscissarum AX incrementis momentaneis ${}_2X_3X, {}_3X_4X$ etc. manentibus aequalibus velocitatem puncti crescere seu incrementa abscissarum conjugatarum seu ordinatarum AZ incrementa momentanea ${}_2Z_3Z, {}_3Z_4Z$ etc. crescere, vel velocitate regulae crescente velocitatem puncti quae antea cum velocitate regulae eadem faciet, magis crescere; seu incrementis momentaneis abscissarum crescentibus incrementa momentanea ordinatarum magis adhuc crescere, tunc linea AYY (fig. 63) convexitatem obvertit directrici AX, si ambo simul, tam abscissae scilicet quam abscissae

conjugatae seu recessus a puncto fixo A tam regulae quam puncti mobilis in regula crescunt; quod ab initio supponendum est, si quidem initio tam regula quam punctum in ea mobile ab A recedere intelligantur. Itaque idem est si contra ambo tam regula quam punctum in regula continue accedere intelligantur ad A et velocitas ipsius regulae seu appropinquationes momentaneae ad A eaedem maneant, vel minus crescant quam velocitates seu incrementa momentanea ipsius puncti in regula. Sed cum hoc modo punctum tantum priorem viam relegere intelligatur, hoc annotare nihil attinet imposterum. Quodsi contingat fig. 65 velocitatibus regulae seu incrementis momentaneis abscissarum, ipsis scilicet ${}_2X_3X$ etc. decrescentibus, velocitates puncti in regula seu incrementa momentanea ordinatarum ${}_2Z_3Z$ etc. uniformia manere, vel crescere, vel saltem minus decrescere quam ipsa ${}_2X_3X$ etc., tunc etiam curva AYY ipsi directrici AX obvertit convexitatem.

Ex his jam contra statim patet, si incrementa momentanea abscissarum magis crescant, vel minus decrescant, quam incrementa momentanea abscissarum conjugatarum seu ordinatarum, tunc curvam concavitatem obvertere directrici (seu rectae in qua abscissae sumuntur) si modo ponamus curvam tam a directrice AX quam directrice conjugata AZ recedere, seu ad eam accedere, hoc est tam in una directrice quam in altera recedere a communi eorum puncto A vel ad id accedere, patet hoc inquam ex praecedentibus, si modo in fig. 63 vel 65 mutemus directricem et abscissas ejus in directricem conjugatam et abscissas conjugatas vel contra; manifestum enim est si curva uni directrici obvertit concavitatem, conjugatae ejus obvertere convexitatem et contra, quando scilicet simul recedit ab ambabus.

Hinc patet porro, quomodo oriatur curvae flexus contrarius. Nam fig. 66 si X punctis directricis ab A recedentibus etiam respondentia Z puncta directricis conjugatae ab A recedant, et cum antea ${}_2Z_3Z$ etc. incrementa abscissarum conjugatarum magis crevissent vel minus decrevissent, quam abscissarum principalium incrementa ${}_2X_3X$ ab A usque ad ${}_3Y$, at in ${}_3Y$ incipiat fieri contrarium, ibi linea habet flexum contrarium et ex concava fit convexa, quoad easdem partes. Hoc est si ponamus rectangulum ${}_4X_4Z$ secari a linea A_3Y_4Y in duas partes $A_4X_4Y_3YA$ et $A_4Z_4Y_3YA$, tunc cum lineae secantis pars A_3Y concavitatem obverterit parti spatii posteriori, altera pars ${}_3Y_4Y$ convexitatem obvertet parti spatii priori, hoc est cum recta seu

chorda quaevis in lineae parte A_3Y ut A_2Y, ${}_2Y_3Y$, ceciderit in spatii partem posteriorem, nunc chorda quaevis in lineae parte ${}_3Y_4Y$ cadit in partem spatii priorem.

Quodsi vero porro ponamus vel ambarum abscissarum, principalis scilicet et conjugatae, vel alterius saltem incrementa continue decrescere, sumamusque eam quae sola vel saltem magis decrescit, ejusque velocitatem ponemus tandem evanescere, atque ita porro continuata mutatione mutari in contrariam, hoc est lineam curvam respectu ejus abscissae non amplius recedere ab A, sed ad A potius accedere, ibi habemus puncta reversionum. Exempli causa fig. 67 velocitas ipsius X decrescit usque ad ${}_4X$, ubi evanescit, nempe ${}_1X_2X$, ${}_2X_3X$, ${}_3X_4X$ quae velocitates repraesentant continue decrescunt, donec evanescant in ${}_4X$, ubi velocitas progrediendi mutatur in regressum, et X a ${}_4X$ tendit in ${}_5X$, ${}_6X$ rursusque accedit ad A, crescente rursus (aliquamdiu saltem) velocitate regressus, interea vero Z uniformi velocitate progreditur; ordinata autem ${}_4X_4Y$ ex loco reversionis puncti X, nempe ex ${}_4X$ ducta ad curvam, eam tangit in ${}_4Y$. Potest fieri ut puncta X et Z simul revertantur versus A, sed hoc singulare admodum est, eoque casu curva in puncto reversionis infinitas habet tangentes, ut fig. 68 patet, curvam AYH simul tangi a duabus rectis ad se invicem perpendicularibus XY et ZY; unde patet cum tota curva cadat intra rectangulum XZ, ideo omnem rectam per Y ductam extra triangulum cadentem, curvam tangere, et dubitari videtur posse, an sit una curva an potius duae AY et HY se secantes in H; verum cum tales generationes pro una curva excogitari possint, et exemplum habeamus in cycloidibus secundariis, nihil prohibet, quin totum AYH pro una curva habeatur. Quodsi autem curva non habeat infinitas tangentes, seu non X et Z simul revertantur, seu si in fig. 68 linea AY non tendat ad H, sed ad L, tunc patet, una ordinata ab X, nempe XY, curvam tangente in Y, alteram ZY, quae utique ipsi XY adeoque tangenti est perpendicularis, ipsi quoque curvae AYL esse perpendicularem, adeoque esse maximam vel minimam ordinatarum hujus periodi, maximam quidem quando curva in Y ipsi AZ directrici obvertit concavitatem, minimam vero cum ei obvertit convexitatem.

Jam porro inter se conjungamus ambas variationes lineae, unam quae est secundum convexum et concavum, alteram quae est secundum accessum et recessum respectu directricis. Equidem potest linea tam accedere quam recedere respectu directricis, cui

concavitatem aut convexitatem obvertit, ut fig. 69 in (H) concava recedit, in (B) concava accedit, in (C) convexa recedit, in (D) convexa accedit; verum si duabus directricibus simul conferatur, tunc quando ab ambabus recedit, uni obvertit concavitatem, alteri convexitatem, ut in (H) et in (C); quando vero uni accedit, ab altera vero recedit, tunc ambabus concavitatem vel ambabus convexitatem obvertit, ut in (B) et (D). Atque ideo ad casum nunc veniendum est, quo linea ab una directrice recedit, ad alteram vero accedit, seu quo X quidem ab A recedit, at Z ad A accedit, ubi linea Y ambabus directricibus obvertit concavitatem vel convexitatem, convexitatem quidem ut in fig. 70 si $_2X_3X$ ad $_3X_4X$ recedendo ab A minorem rationem habeat, quam $_2Z_3Z$ ad $_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice aut crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in altera minus crescunt aut magis decrescunt. Contra in fig. 71 concavitatem linea utrique directrici obvertit, si $_2X_3X$ ad $_3X_4X$ recedendo ab A majorem rationem habet quam $_2Z_3Z$ ad $_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in alia magis crescunt aut minus decrescunt.

Hinc intelligitur, quomodo fieri possit, ut linea quae antea directrici obvertit convexitatem, nunc ei obvertat concavitatem, vel contra, licet non habeat flexum contrarium, sed maneat ad easdem partes cava, quando scilicet in ea directrice occurrit reversio ut fig. 72 si motus ipsius X sit $_3X_4X$ recedens ab A et $_4X_5X$ accedens ad A, ubi patet ex (H),(B),(C),(D),(E),(F),(G),(K), quam variis modis fieri possit reversio, ut eidem rectae AX, cui concavitas prius obversa fuerat, postea convexitas obvertatur, vel contra, ubi patet in (H) et (B) linea recedente ab AX et ab AZ et in reversionis puncto recedente adhuc ab AX, sed accedente jam ad AZ, prius convexitatem postea concavitatem ipsi AX obverti; idem est in (B), ubi linea prius accedit ad AX, deinde semper ab eo recedit, accedit in 1, recedit in (B) et in 2, et ab AZ recedit usque ad (B), deinde ab eo recedit. Verum in (C) ad 1 prius concavitas obvertitur ipsi AX, deinde ad 2 convexitas, et utrobique receditur quod obtinetur ope ventris, qui unum continet regressum respectu AZ, sed binos regressus respectu AX. Tale quid etiam in (D) inclinate posito. Caeterum ventre in punctum evanescente ex (C) fit (E), et ex (D) fit (F), et ideo reversiones tam secundum AZ quam secundum AX ibi coin-

ciduat, unde in puncto illo infinitae possunt esse tangentes, quale quid jam attigimus supra. At si idem venter simul contineat flexum contrarium, ut in (G) et (K), tunc ventre illo evanescente ut inde nascatur (L) vel (M) vel (N), atque ita flexu contrario coincidente cum puncto reversionis fit ut non obstante reversione linea convexitatem aut concavitatem ei obvertat cui prius, cum enim duplex concurrat causa mutandae obversionis, se mutuo tollunt et manet obversio qualis ante erat ad directricem AX, scilicet (L), (M), (N) ipsi tam ante quam post regressum obvertunt concavitatem; si inverterentur, tam ante quam post regressum obverterent ei convexitatem.

Caeterum hinc intelligitur, quod duplex causa est cur linea mutet obversionem, et quae ante concavitatem directrici AX obverterat, nunc obvertat convexitatem: una, regressus puncti X in illa directrice moti (ut fig. 73), linea YY a $_3$Y ad $_4$Y obvertit ipsi AX convexitatem, at post regressum in $_4$Y obvertit ei concavitatem in $_5$Y, quia punctum X ab A recedit a $_3$X ad $_4$X, sed ad A accedit item seu regreditur a $_4$X ad $_5$X; altera vero causa est flexus contrarius, cum ipsa linea revera ex convexa fit concava, vel contra, ut in fig. 74, ubi linea in $_4$Y habet flexum contrarium, ita ut recta tangens cum prius cecidisset ad unum latus curvae post $_4$Y cadat in aliud latus, in ipso autem puncto $_4$Y tangens est nulla vel potius tangens et una secans coincidunt, nam (fig. 75) recta tangens lineam flexu contrario praeditam in L secat eandem alibi in M, cumque continue magis magisque sibi admoveri possint L et M, fit ut tandem coincidant in N, ubi nulla est tangens, aut potius eadem simul est certo respectu tangens et secans, unde et in puncto flexus contrarii tria curvae puncta alioqui diversa in unum coincidunt, duo ob tangentem (omnis enim tangens intelligitur secare lineam in duobus punctis coincidentibus), unum ob secantem. Et apparet in puncto flexus N duarum partium LN et MN coincidere, quemadmodum si duae curvae diversae LNS, MNR obversis convexitatibus se tangerent in N, unde transeundo ex una in alteram fieri potest flexa LNM vel flexa RNS.

Ex his autem duobus modis inter se diversis, quibus obversio lineae ad aliquam directricem mutatur, poterimus definire periodum intra quam intelligitur aliqua esse maxima aut minima, cum enim curva multos flexus contrarios multaque puncta reversionis habet, diversas habet maximas aut minimas pro sua quaque periodo.

Nimirum (fig. 76) linea Y recedit a sua directrice AX usque ad B, inde rursus accedit, ordinata igitur ad B est maxima (si ibi curva directrici obvertit concavitatem); porro linea a B accedit directrici AX, simulque recedit a directrice AZ usque ad C, ubi est punctum reversionis, seu ubi accedit quidem adhuc ad AX, sed non amplius recedit ab AZ; sed a C (ubi ordinata ad AX tangit curvam) usque ad D accedit simul directrici AX et directrici AZ, ubi iterum incipit recedere a directrice AX, sed adhuc pergit accedere ad AZ usque in E, ubi tam ab AZ quam ab AX iterum recedit. Periodos igitur faciunt puncta reversionis, quae obversionem mutant. Sic prima periodus est ABC qua linea directrici AX obvertit concavitatem, cujus periodi maxima est ordinata ad B, altera periodus est CDE, ubi linea directrici AX obvertit convexitatem cujus minima est ordinata ad D. Porro linea CDE producta seipsam secare potest in F. Et si totus venter coincidere intelligatur in punctum, ibi coincidit duplex reversio respectu directricis AZ cum simplici respectu directricis AX. Atque ita quia duplices reversiones se mutuo tollunt, hoc modo fieri potest ut linea (Y)(B)(F)(G) (in eadem fig. 76) quae a (B) usque ad (F) recessit ad directricem AX, post (F) rursus ab ea recedat, sine ullo flexu contrario pariter ac sine ulla reversione respectu alterius directricis conjugatae AZ, quorum tamen alternatio alias opus est, ut linea a directrice ad quam accessit iterum recedat. Sed redeamus ad priorem lineam AYBCDEFG, et post duas periodos ABC et CDE quaeramus tertiam EGH a puncto novissimo reversionis E ad punctum flexus contrarii proximi H, cujus periodi maxima est ordinata ad G. Quarta periodus est HJK a puncto flexus contrarii H ad novum punctum reversionis K, cujus periodi minima est ad punctum J. Ubi notandum est, etsi duae periodi sibi immediatae, quarum quaelibet suam habet maximam aut minimam respectu ejusdem directricis AX, inter se distingui debeant vel puncto aliquo reversionis respectu directricis conjugatae AZ vel puncto aliquo flexus contrarii in ipsa curva, tamen neque punctum reversionis directricis conjugatae neque punctum flexus contrarii statim periodum facere quae maximam vel minimam habeat, imo nec plura puncta flexus contrarii facere necessario periodum novam, ut patet ex serpentina KLM, verum plura nova puncta reversionis ad directricem conjugatam AZ necessario faciunt periodum novam aut periodos novas maximarum aut minimarum pro hac directrice AX, si flexus con-

trarii in curva absint. Quod ita demonstro, quoniam punctorum reversionis ad directricem conjugatam sunt ordinatae maximae et minimae ad directricem conjugatam, hinc si plura dentur puncta reversionis ad directricem conjugatam, dantur plures ordinatae tales ad directricem conjugatam, ergo et periodi maximarum aut minimarum pro directrice conjugata, quia quaevis maxima aut minima habet propriam periodum; hae autem periodi ad directricem conjugatam AZ necessario limitantur vel per puncta flexus contrarii vel per puncta reversionis ad directricem primam AX, absunt autem hic puncta flexus contrarii ex hypothesi, ergo adesse debent puncta reversionis respectu directricis AX, adeoque et maximae et minimae atque adeo et periodi respectu directricis AX, quod asserebatur. Denique notandum est, periodos (ad eandem directricem) regulariter tales esse ut maxima et minima sese alternis excipiant, exceptio tamen est in casibus quibusdam, ut in linea (Y)(B)(F)(G) eadem figura 76 sese immediate excipiunt duae maximae, ordinata a B ad AX et ordinata a G ad AX (nisi ordinatam ex F simul velimus computare, quae tamen periodum propriam nullam habet, quippe quae evanuit), cujus ratio est quod ibi duo puncta reversionis tacita sunt seu sese mutuo supprimunt, quae si expressa intelligantur numerenturque, vera manet regula alternationis. Similiter fieri potest ut punctum reversionis et flexus contrarius coincidant, et ita alternatio. Ut si in eadem figura N nova sit periodus KLMNP a puncto reversionis K ad punctum flexus contrarii P, ejusque periodi maxima sit ordinata ex N ad directricem AX, et rursus nova periodus PQR a P puncto flexus contrarii ad R punctum reversionis, cujus periodi maxima est ordinata ex puncto Q ad directricem AX, inde rursus nova periodus RST a puncto reversionis R ad punctum T (quod quale sit ex continuatione lineae patere deberet) cujus periodi maxima est ordinata ex S ad directricem AX. Et hactenus quidem semper servatur alternatio maximarum et minimarum; sed si totus venter VPQRV evanescere ponatur in unum punctum V, tunc ordinata ex V ad AX non poterit dici maxima aut minima ordinatarum, quia lineam NVST non secat, sed tangit; ergo periodi MNV maximam ordinatam, nempe ex N in directricem AX, excipit statim periodi VST maxima ordinata, nempe ex S ad directricem eandem, scilicet quia R et Q puncta reversionis et flexus contrarii in unum coincidentia sese mutuo compensant et tollunt.

Atque ita hic semina quaedam jecimus, ex quibus generalia quaedam curvarum elementa enasci, curvaeque a sua forma in certas quasdam classes dispesci possint. Possunt multa alia ex his principiis demonstrari, ut quod eadem est directio puncti curvam describentis, quae rectae tangentis; possent etiam elementa explicari curvarum linearum quae in solido describuntur compositione trium motuum, dum scilicet (fig. 62) planum unum CD incedit in alio CB a CE versus BF, et in plano CG movetur regula CG, accedit ad ED vel inde recedit, et in regula CG movetur punctum C versus G vel recedit a G. Potest et ex his modus quoque duci curvarum ducendi tangentes inveniendique maximas aut minimas; sed non id hoc loco agimus, nec plenam tractationem, sed gustum quendam atque introductionem damus.

Tantum hac vice.

III.

Quaerebam*) aliquando demonstrare Theorema Pythagoricum ex natura triangulorum similium. Itaque hoc usus sum

---

*) Leibniz hat auf dem Manuscript bemerkt: Hic specimen dare placuit Analyseos Anagogicae a vulgari Algebristis usitata, quam Metagogicam seu transsultoriam vocare possis, diversae, in demonstrando theoremate reductione continua ad alia theoremata simpliciora per gradus, cum vulgaris Analysis eat per saltum. Et cum Pappus dixerit, quaesitum vel demonstrandum assumi in Analysi pro vero, atque inde deduci alias enuntiationes donec incidatur in jam notas, quod Conringius et alii reprehendunt, volui hic evidenti specimine ostendere quod olim Conringio respondi, etsi alias ex vero falsum duci posset, nihil tale hic esse metuendum, quia non adhibentur nisi ratiocinationes reciprocae; itaque hic modum loquendi mutavi nec dixi ut initio volebam, ex Pythagorico Theoremate sequi articulum (6), ex hoc (supposita triangulorum similium proportionalitate laterum) sequi articulum 10 aliunde jam demonstratum vel demonstrabilem, sed malui dicere et ostendere verum fore Theorema Pythagoricum, si verus articulus (6), et hunc rursus, si verus articulus (10). Ita Analysis ista non minus rigorose demonstrat quam ipsa Synthesis.

processu Analytico: Assumo quaesitum et video unde possit duci. Erit autem verum (1) $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (fig 77), si (2) $AB^2 = AC^2 - BC^2$, seu si (3) $AB^2 = AC + BC, AC - BC$. Jam centro C radio CA describatur circulus secans rectam BC productam in D et in E, et erit (4) $BE = AC + BC$ et (5) $BD = AC - BC$. Ergo (3) erit verum per (4 et (5), si verum (6) AB esse med. prop. inter BD et BE. Theorema ergo propositum reduximus ad hoc, quod in circulo ordinata est media proportionalis inter segmenta diametri. Hoc vero rursus verum erit, si (7) angulus DAB = ang. AEB, ita enim triangula rectangula ABD et EBA erunt similia adeoque DB ad BA ut BA ad BE, uti habet articul. (6). Jam quia (8) ang. AEB + ang. EAB = recto (ex eo quod trianguli rectanguli EBA tres anguli sunt 2 rectis aequales) et (9) ang. DAB + ang. EAB = ang. DAE, ergo erit verus artic. (7) per (8) et (9) si (10) ang. DAE (in semicirculo) sit rectus. Nam per (10) et (9) erit (11) ang. DAB + ang. EAB = recto. Ergo per (8) et (11) erit DAB = ang. AEB, ut habebat artic. (7). Res reducta est ergo articulo (10) ad hoc theorema, quod angulus DAE in semicirculo est rectus. Quod sic ostendemus. Ex centro C in AE agatur normalis AF. Ergo si verum sit (12) esse angulum ad centrum ACE duplum anguli ad circumferentiam ADC, ideo cum (13) sit angulus ECF dimidius anguli ACE, erit per (12) et (13), (14) angulus ADE aequalis angulo ECF. Ergo (15) rectae AD, FC sunt parallelae. Ergo (15) cum ex constructione angulus CFE sit rectus, erit (16) etiam angulus DAE rectus, ut habebat articulus (10) Res ergo iterum ad aliud theorema reducta est est in articul. (12), cujus itidem facilis est demonstratio. Nam (17) ang. DCA + ang. CDA = 2 rect., ut per se patet. Sed (18) ang. DCA + ang. CDA + ang. CAD = 2 rect., ergo per (17) et (18) erit (19) ang. ACE = ang. CDA + ang. CAD. Jam (20) ang. CDA = ang. CAD, ergo ex (19) et (20) sequitur artic. (12) seu angulum ad centrum (DAE) esse duplum anguli ad circumferentiam (ADC), ubi tantum assumsimus artic. (18) trianguli tres angulos esse 2 rectis aequales. Quod ipsum si quis demonstratum velit, ita facile satisfiet. Ex C ponatur duci CF parallela ipsi DA, erit (21) ang. FCE = ang. ADC, sed rursus (22) ang. CAD = ang. ACF cum sint alterni. Ergo ex (21) et (22) fit (23) FCE + ACF - ADC + CAD = (24) ACE. Ergo per (44) et (17) habetur artic. (18) seu demonstratum est, in Triangulo tres

angulos esse 2 rectis aequales. Quodsi adhuc desideretur demonstratio artic. (22) seu theorematis, quod alterni aequales, id facillime fiet. Producantur CA in G, et BA in H. Ob parallelas AH et CF sunt (25) anguli ACF et GAH aequales. Sed (26) aequales sunt oppositi GAH et CAD. Ergo per (25) et (26) aequantur alterni ACF et CAD, ut habebat artic. (22). Omnia ergo reduximus ad veritates evidentes, quales sunt: Triangula similia habere latera proportionalia (ad 7), CF normalem ad AE bisecare angulum ACE in triangulo ACE, quod ob circulum cujus centrum C est isosceles (ad 13 et 20), item angulos qui sibi deinceps DCA et ACE aequari 2 rectis (ad 17 et 24), parallelas ad eandem facare angulos aequales ad easdem partes (ad 16 et 25).

IV.

EPISTOLA AD VIRUM CELEBERRIMUM, ANTONIUM MAGLIABECCIUM, UBI OCCASIONE QUORUNDAM PROBLEMATUM A BATAVIS FLORENTIAM MISSORUM DE USU ANALYSEOS VETERUM LINEARIS ET IMPERFECTIONE ANALYSEOS PER ALGEBRAM HODIERNAE DISSERITUR, NOVUMQUE TRIGONOMETRIAE SINE TABULIS INVENTUM ATTINGITUR.

Vorbemerkung. Von einem Ungenannten waren den Mathematikern zwölf Aufgaben vorgelegt worden, an deren Behandlung der Neapolitaner Antonio de Monforte sich versucht hatte. Er veröffentlichte seine Lösungen in einem an den berühmten Magliabecchi gerichteten Schreiben, das „Neapoli nono Cal. Janu. an. 1676" datirt ist. Dieses Schriftchen gerieth in die Hände Leibnizens; er machte, wie er zu thun gewohnt war, seine Bemerkungen darüber und stellte sie in dem folgenden ebenfalls an Magliabecchi gerichteten Schreiben zusammen.

Das Programm, in welchem der Ungenannte die zwölf Aufgaben bekannt machte, lautet wie folgt:

Geometra post tabulam latens, quae sequuntur Problemata, Matheseos Professoribus resolvenda proponit.

1. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorundem, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

2. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet laterum aggregatum circa verticem ad lineam aliquam datam, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

3. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aggregatum laterum circa verticem recta data multatum, ad rectam aliquam itidem datam, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

4. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

5. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet rectangulum sub lateribus circà verticem ad datum planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

6. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum unius e lateribus circa verticem auctum rectangulo sub iisdem, vel plano utcunque ejusdem multiplici ad quadratum alterius lateris, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

7. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet laterum aggregatum circa verticem ad alterutrum e lateribus, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

8. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum lateris alterutrius circa verticem ad rectangulum sub aggregato ex differentia praedicta et latere minori et sub eadem quoque differentia, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

9. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum aggregati ex praedicta differentia et latere alterutro circa verticem ad excessum, quo idem supererat quadratum praedictae differentiae, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

10. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aliquota pars rectanguli sub lateribus circa verticem, datum planum assumens ad aliud datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

11. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet aggregatum quadratorum e lateribus circa verticem ad datum planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

12. Data differentia segmentorum baseos, una cum ratione quam habet quadratum aggregati laterum circa verticem, assumens datum planum ad datum itidem planum, datoque alterutro angulorum ad basim, reperire triangulum.

Viro Celeberrimo

Antonio Magliabeccio.

Incidit*) nuper in manus meas inscripta Tibi Epistola doctissimi ut apparet Antonii Monfortii. Quam cum evolvissem, vidi duodecim problemata Trigonometrica Lugduno Batavorum summissa ab eo tractari, quae Geometra nescio quis, qui se post tabulam latere ait, Mathematicis solvenda proposuit, quibus omnibus hoc commune est, ut in Triangulo quaesito detur differentia segmentorum baseos, et angulus aliquis ad basim. Dantur praeterea in probl. 1. ratio lateris circa verticem ad differentiam eorundem, probl. 2. ratio aggregati horum laterum ad rectam datam, probl. 3. ratio ejusdem aggregati recta data multati ad rectam datam, probl. 4. ratio differentiae horum laterum ad alterutrum laterum, probl. 5. (secundum ordinem solutionis) ratio aggregati ad latus alterutrum, probl. 6. (secundum ordinem solutionis) ratio rectanguli sub dictis lateribus ad planum datum, probl. 7. (secundum eundem solutionis ordinem) ratio quadrati unius lateris rectangulo laterum aucti ad quadratum alterius lateris, probl. 8. ratio quadrati lateris minoris (semper circa verticem intelligo) ad rectangulum sub aggregato ex data differentia segmentorum basis et latere minore et sub ista data, probl. 9. ratio quadrati ab aggregato istius datae dictae, et lateris majoris ad excessum hujus quadrati supra quadratum ejusdem datae, probl. 10. ratio aliquotae partis rectanguli sub lateribus dato plano aucti ad datum planum, probl. 11. ratio aggregati quadratorum a lateribus ad datum planum,

---

*) Leibniz hat auf dem Manuscript bemerkt: optimum erit non nominari Monfortium, quia laudari non potest.

probl. 12. ratio quadrati ab aggregato laterum dato plano aucti ad datum planum. Quanquam autem problemata ipsa plane in potestate sint hominis analytica docti, qualia ego quidem aggredi non soleo cujus in eo potius versatur studium, ut ipsa Analyticae artis pomoeria proferam ad ea quae Algebram transcendunt, quoniam tamen Tibi inscripta video et Monfortianae solutiones quibusdam animadversionibus indigent, credidi veniam apud Te pariter et Cl. Monfortium libertati meae paratam fore, si providere studeam ne quid Mathematica exactitudo dissimulatione nostra detrimenti capiat, eaque occasione alia quaedam majoris momenti admoneam, quibus Geometriae contemplatio pariter et usus magnopere augeri possit. Et primum quanquam exiguum hoc sit, moneo tamen (ne imposterum in allegando confusio oriatur) in programmate proponentis, ut edidit Monfortius, problema septimum esse id quod solvit Monfortius loco quinto, ideo quintum et sextum proponentis sunt sextum et septimum Monfortii; caetera consentiunt. Illud vero magis notari meretur, problema primum et quartum esse unum et idem, nec differe nisi verbis, quod miror non animadvertisse Cl. Monfortium, quemadmodum alia incongrua quae mox ostendam. Primum enim problema est: Data differentia segmentorum baseos una cum ratione quam habet alterutrum laterum circa verticem ad differentiam eorundem datoque alterutro angulorum ad basin, reperire triangulum; problema quartum est: Data differentia segmentorum baseos una cum ratione quam habet differentia laterum circa verticem ad alterutrum laterum datoque alterutro angulorum ad basin, reperire triangulum. Haec duo problemata in eo solum differunt, quod in primo datur ratio lateris alicujus ad laterum differentiam, in quarto vero ratio differentiae laterum ad aliquod latus, cum tamen nemo ignorare possit, data una ratione quae directa est, utique dari et alteram quae reciproca est. Quid est frustra problemata multiplicare, si hoc non est? Non tamen video, quomodo alicubi (pag. 22) Cl. Monfortius velit, omnia problemata duodecim reduci posse ad unum, cum constet, ut mox ostendam, pleraque quidem ex illis esse plana, nonnulla tamen solida, quae utique diversi sunt generis a planis. Caeterum sunt et alia, quae mihi in ipso modo quo problemata haec concepta sunt, displicent. Exempli causa in probl. 2. datur aggregati laterum ratio ad rectam datam, notum autem est, cujus ratio ad datum datur, id dari ipsummet. Cur non ergo proponens dixit potius, dari ipsum aggre-

gatum quam aggregati rationem? an detorquendo nonnihil problema credidit se id difficilius reddere? Idem est de problemate tertio, quod si recte inspicias, nihil differt a secundo. Nam in tertio datur aggregati laterum recta data multati ratio ad rectam datam; cujus autem ratio ad datum datur, id ipsummet datur. Datur ergo aggregatum laterum recta data multatum. Quod vero dato multatum datur, id ipsummet datur; datur ergo aggregatum laterum. Redimus ergo ad problema secundum. Eodem modo in probl. 6. datur ipsum rectangulum laterum. Similia ut ita dicam *ἀγεωμετρήματα* in probl. 9, 10, 11, 12 notari possunt. Et quidem problema decimum non nisi specie verborum differt a sexto secundum ordinem Monfortii vel quinto secundum ordinem proponentis. Nam si datur ratio aliquotae partis rectanguli sub lateribus datum planum assumentis ad datum planum, dabitur haec aliquota pars datum planum assumens; ergo datur ipsa aliquota pars. Data aliquota parte rectanguli sub lateribus, dabitur ipsum et recidimus in problema sextum.

Venio ad ipsas solutiones doctissimi Monfortii, quibus tamen nescio an satisfactum sit Geometrae proponenti. Primum enim videtur is, qui simpliciter proponit problemata Geometrica, postulare solutiones Geometricas, non vero Arithmeticas, lineas scilicet seu lineares constructiones, non numeros. Deinde videtur is, qui proponit problemata generalia, postulare etiam solutiones problematis generales; Monfortius autem certos casus pro arbitrio assumit, in quibus problema est rationale, eosque solvit. Et sane tertio foret hoc aliquid, si methodum generalem exposuisset solvendi haec problemata in numeris rationalibus, quoties fieri potest; sed ille si quid credi potest sumsit exempla aliunde nota, eaque in speciem tantum methodo analytica investigavit. Quomodo autem infinita exempla reperiri possint, quibus problemata trigonometrica hujusmodi (quae scilicet non aliae rectae ingrediuntur, quam latera, segmenta baseos, perpendicularis et ex his orta, nempe summae, differentiae, rationes, rectangula etc.) in numeris rationalibus exhiberi queant, id quoniam Cl. Montfortius non docuit, et usum tamen saepe habere potest, exponam quia facile est. Nimirum (fig. 78) si duo sint in numeris rationalibus triangula rectangula ADB et CDB habentia unum latus circa rectum BD commune seu aequale, ex illis in unum compositis fiet triangulum ABC, quod non latera tantum, sed et altitudinem et segmenta baseos, adeoque et quae ex

his oriuntur rationalia habebit: sed quomodo habebimus duo triangula rectangula rationalia latus circa rectum commune habentia? Respondeo, id quoque facillimum esse; datis enim duobus triangulis rectangulis rationalibus quibuscunque, inde bis fabricari poterunt duo alia triangula rectangula rationalia latus circa rectum commune habentia. Exempli causa duo sunt simplicissima triangula rectangula rationalia in numeris integris, nempe unum cujus latera circa rectum 3 et 4, hypotenusa 5, alterum cujus latera circa rectum sunt 5 et 12, hypotenusa 13. Quodsi volumus inde facere duo triangula rectangula latus unum circa rectum commune habentia, multiplicemus per crucem, triangulum 3, 4, 5 per 5 et fiet 15, 20, 25, et triangulum 5, 12, 13 per 3 et fiet 15, 36, 39. Idem aliter praestare possumus ex iisdem assumtis, multiplicando

triangulum 3, 4, 5 per 4 et fiet 12, 16, 20,
triangulum 12, 5, 13 per 1 et fiet 12, 5, 13.

Possunt tamen et aliis modis reperiri duo triangula latus circa rectum commune habentia, scilicet generaliter quot modis fieri potest in numeris rationalibus, ut sit ab aeq. cd, vel ut sit aa—bb aequ. cc—dd, vel denique ut sit 2ab aequ. cc—dd, habebuntur enim duo triangula rectangula rationalia quorum latera

$$2ab,\quad aa-bb,\quad aa+bb$$
$$2cd,\quad cc-dd,\quad cc+dd$$

habentia unum latus circa rectum commune, tot igitur etiam modis haberi potest triangulum rationale, cujus altitudo et segmenta basis sint rationalia. Et sumto ex infinitis ejusmodi triangulis quocunque, quodcunque ex problematis a Cl. Monfortio hic solutis eodem modo solvi poterit, quo ab illo factum est; quod sane nulla analysi indiget, cum ea ratione jam tum notum sit quod quaeritur, licet tractetur perinde ac si ignotum adhuc et quaerendum esset.

Sed nunc a nobis jure postulari videbitur, ut solutiones geometricas exhibeamus. Quod ut cum fructu aliquo fiat, in re alioqui sterili, placet modum ostendere quomodo pleraque solvi queant sine calculo, et viam inire, quae praebeat specimen analyseos cujusdam linearis, ab analysi algebraica sive calculatoria plane diversae; ita simul fortasse lucem aliquam analysi Veterum affundemus, quae consistebat in usu Datorum, cui juvando etiam librum suum de Datis Euclides scripserat, in quem extat Marini, veteris philosophi, ὑπόμνημα. Problemata igitur primum et (Monfortiano ordine) quintum haec sunt: Data differentia segmentorum

baseos AD, DC (fig. 79), ratione lateris AB ad differentiam vel aggregatum laterum AB et BC et denique angulo A, invenire triangulum ABC. Quod sic vestigabimus: In segmento majori AD sumatur DE aequalis minori segmento DC, erit AE differentia segmentorum data; jungatur BE. Datur ratio lateris AB ad differentiam (aggregatum) laterum AB et BC, ergo datur ratio laterum AB, BC inter se, quemadmodum notum est. Et ob datum angulum A datur ratio BD ad AB; jam datur ratio AB ad BC (ut paulo ante ostendimus), ergo datur ratio ex his composita BD ad BC, ergo datur angulus C. Datis jam trianguli duobus angulis A et C, datur et tertius ABC. Omnes ergo trianguli quaesiti ABC angulos habemus. Porro datur angulus CBD, supplementum ipsius inventi C ad rectum; ergo et datur angulus EBD (ipsi CBD aequalis, quia ED et CD aequales), datur et angulus ABD (supplementum ipsius dati A ad rectum), a quo si inventus angulus EBD auferatur, habebitur residuus ABE. Trianguli ergo BAE habebuntur anguli duo, A et ABE, ergo et tertius AEB. Habentur ergo omnes anguli trianguli BAE, habetur et unum ejus latus AE (differentia segmentorum baseos data), ex quibus habitis habetur ipsum triangulum BAE (et geometrice quidem, ut ostendam in solutione sequenti), ergo et latus ejus AB, ergo et trianguli ABC, cujus etiam omnes anguli habentur; habetur unum latus AB, habetur ergo ipsum Triangulum ABC quaesitum, quod desiderabatur. Ex hac analysi lineari, quemadmodum alias ex calculatoria, facile fuisset constructionem elicere, eamque synthetice demonstrare, dissimulata analysi seu inveniendi ordine; sed haec non tam problematis, quod tanti non est, quam analyseos causa attulimus.

Problema quartum nihil differt a primo: problemata secundum et tertium non differunt inter se, ut ostensum est. Solutio eadem quoque methodo facile habebitur, sine ullo calculo, per solam analysin linearem. In triangulo ABC (fig. 80) dato angulo C, et data FC differentia inter AD et DC, segmenta baseos, datoque CH aggregato (vel etiam differentia, quanquam id inter problemata proposita non sit) laterum AB, BC circa verticem, quod aggregatum CH habetur si in producta CB sumatur BH aequal. AB, quaeritur triangulum. Jungatur FH. In triangulo FCH datur angulus C et duo latera CH, CF, ergo datur triangulum et quidem non tantum trigonometrice seu per Tabulas, sed et geometrice, nam ex F ducta FG perpendiculari ad CH, habemus duo triangula rectangula FGC et

FGH, et in priore dato uno latere FC et uno angulo C, dantur reliqua ut constat, nempe latera FG, GC. Habita jam recta GC, detrahatur a data CH, habebitur HG. Habitis HG et FG, habetur FH. Habemus ergo trianguli FCH tria latera CH, CF, FH geometrice, ex dato angulo et duobus lateribus, quod jam in problematis primi solutione assumseramus. Ergo datur et angulus ejus FHC. Jam triangulum HBF est isosceles (quia tam BH quam BF aequales ipsi AB, ergo cum detur angulus ejus FHB (sive FHC), dabitur et ei aequalis HFB. Datis ergo trianguli HBF duobus angulis et basi FH, dabitur ipsum, et geometrice quidem ad modum eorum, quae proxime ostendimus. Datur ergo et latus HB vel BF, id est AB. Quod si auferatur a dato CH, dabitur residuum BC. Habemus ergo AB, BC et angulum A, unde caetera statim habentur. Solvimus ergo problemata secundum et tertium, quae huc redire ostendimus. Et alia eis similia, si scilicet differentia aggregato substituatur. Problema quintum solventis Monfortii seu septimum proponentis solutum est cum primo

Quod sexto loco a Cl. Monfortio tractatum est, ejus calculum assurgere ad quadrato-quadratum ostendit ipse Monfortius, ac proinde innuit sua natura esse solidum, etsi in quibusdam casibus facilioribus studio quaesitis, qualem exhibet Monfortius, deprimi queat. Innuere autem videtur sequentia sex esse etiam solida, quia negat se plus quam sexies eandem methodum ponere velle. Et sane in speciem talia sunt, sed non animadvertit omnia deprimi posse et esse plana demto uno decimo, quod coincidit cum sexto. Et sane, si quid judico, a Cl. Monfortio problematum solutionem aggredienti expectandum saltem erat, ut quae plana, quae solida essent, judicaret. Quod certe aut omnino non fecit, aut non recte fecit. Ego vero deprehendi omnia esse plana praeter dicta duo, quod in singulis ostendam. Nonum itaque, ut hinc neglecto ordine incipiam, etsi solidi speciem habeat et calculum ad quadrato-quadratum attollat, tamen planum esse sic ostendo: In eo duo sunt quadrata, unum ab uno latere recta data aucto, alterum a recta data. Et dicitur ratio dari prioris ad excessum suum supra posterius, sive dicitur dari ratio unius ad differentiam ab altero. Jam vero quoties hoc fit, toties datur ipsa duarum quantitatum ratio inter se. Datur ergo ratio quadrati ab uno latere recta data aucto, ad quadratum rectae datae. Sed data ratione duorum quadratorum, datur et ratio laterum, ergo datur ratio lateris recta data

aucti, ad rectam datam; et redivimus ad problema planum, omnium hactenus tractatorum facillimum. Nam cujus datur ratio ad datum, id ipsum datur, datur ergo unum latus recta data auctum. Quod autem dato auctum datur, id simpliciter datur. Datur ergo unum latus. Problema ergo 9. reductum est ad hoc: Dato uno angulo ad basin, uno latere ad verticem, et differentia segmentorum baseos, invenire Triangulum, quod utique facillimum est. Nam si datum latus AB (fig. 81) sit ad datum angulum A, dabitur utique et (ob angulum datum) ratio AD ad datum AB, ergo datur et AD; unde caetera habentur. Quodsi detur angulus A et latus BC, tunc in basi si opus producta sumatur DF aequal. AD, erit CF differentia segmentorum baseos data. Jungatur BF quae erit aequalis ipsi AB, et angulus F angulo A dato. Itaque in triangulo BFC datur angulus F et duo latera BF, CF, ergo datur triangulum geometrice per supra ostensa. Ergo dabitur et latus BF seu AB, unde ob datum angulum A habebitur et AD, adeoque et AC, id est dupla AD ademta data CF.

Eodem fere modo et problema duodecimum sive ultimum solvetur. Nam datur in eo ratio quadrati ab aggregato laterum, plano dato auctum, ad planum quoddam datum. Datur ergo quadratum ab aggregato laterum plano dato auctum. Ergo datur ipsum quadratum ab aggregato laterum. Dato autem quadrato dabitur id cujus est quadratum. Datur ergo aggregatum laterum, et recidimus in problema 2. supra solutum. Sed et probl. 8. planum esse comperietur: Nam datur in eo ratio quadrati a latere minori circa verticem ad rectangulum sub data et sub eodem latere eadem data aucto. Ergo datur ipsum latus per constructionem planam, quod sequi sic ostendo. Posito enim id latus esse y, datam esse a, dabitur ratio: yy ad $y+a$ in a seu ad $ya+aa$, eadem cum data ratione b ad a, ergo fiet $yy:ya+aa::b:a$ seu yy aequal. $by+ba$, quae aequatio plana est, cujus constructio simplicissima et satis nota. Habemus ergo latus y. Dato autem latere uno trianguli circa verticem, angulo uno ad basin, et differentia segmentorum basis, dari triangulum paulo ante ostendimus. Habetur ergo solutio problematis 8. Quod de latere minori ostendimus, eodem modo praestari potest et in majori. Unde proponens problema incongrue de solo minori concepit.

Quin imo et problema septimum (Monfortiano ordine, at sextum proponentis) quod maximam solidi speciem habet, planum esse

comperi. Datur enim in eo ratio quadrati lateris unius cum rectangulo sub lateribus, ad quadratum lateris alterius. Sed hinc ajo dari rationem laterum inter se. Sunto enim latera z et y, erit ratio zz+zy ad yy eadem datae b ad a. Sumatur alia recta e quae sit ad a, ut z ad y, fiet: z aequ. $\frac{ey}{a}$ eritque $\frac{eeyy}{aa} + \frac{eyy}{a} : yy :: b:a$ et fiet ee+ae aequ. ab; habetur ergo e per constructionem planam simplicissimam jam satis notam, adeoque et ratio ejus ad datam a, ac proinde etiam ratio z ad y, seu ratio duorum laterum circa verticem. Recidimus ergo in problema 1. Ergo et problema septimum solutum habetur.

Postero inveni et problema undecimum planum esse, in quo datur aggregatum quadratorum laterum circa verticem. Insistendo literis Cl. Monfortii sit (fig. 82) AB, z et BC, y et CD, x et differentia inter AD et CD data sit a, nempe AF vel AG, et angulus A vel GAF etiam datus. Hinc data quoque ratio AB ad AD seu z ad x+a sive AG seu a ad AH seu b. Denique datum aggregatum laterum zz+yy, quod sit aequ. cc quadrato a recta data c vel AL Ex natura trianguli differentia quadratorum laterum zz—yy est aequalis 2ax+aa sive rectangulo sub intervallo segmentorum a et basi AC, 2x+a. Ergo 2zz est aequ. 2ax+aa+cc, seu zz aequ. $ax + \frac{aa+cc}{2}$. Est autem z aequ. $\frac{a}{b}\overline{x+a}$, ergo x aequ. $\frac{b}{a}z - a$. Habemus ergo: zz aequ. $bz - aa + \frac{aa}{2} + \frac{cc}{2}$ seu zz aequ. $bz + \frac{cc-aa}{2}$. Unde facilis constructio est, nam si triangulum rectangulum fiat cujus latera circa rectum sint dimidia AH, et alia recta quae possit dimidium excessus quadrati ab AL super quadratum ab AF, ejus trianguli hypotenusa, assumens dimidiam AH, erit latus AB trianguli quaesiti ABC, unde caetera habentur.

Restant duo tantum problemata, sextum ordine solventis Monfortii (quod proponenti quintum est) itemque decimum, sed supra ostendimus decimum ab hoc sexto reapse non differre. Ipsum autem sextum, qui generaliter solvere volet, solidum esse deprehenderet, cum scilicet praeter segmentorum baseos differentiam et unum ad basin angulum datur rectangulum sub lateribus circa verticem. Servatis enim iisdem literis eodemque (qua licet) calculo, quem paulo ante adhibuimus, habemus: zz—yy aequ. 2ax+aa,

x aequ. $\frac{b}{a}$ z—a ob data omnibus problematis nostris communia, unde fit: zz—yy aequ. 2bz—2aa+aa sive zz—yy aequ. 2bz—aa. Jam ob data hujus problematis propria esto rectangulum zy aequale plano dato cc, fiet: y aequ. $\frac{cc}{z}$ et yy aequ. $\frac{c^4}{zz}$, quem valorem substituendo in aequ. praecedenti fiet: zz—$\frac{c^4}{zz}$ aequ. 2bz—aa, tollendoque fractionem atque ordinando z^4—$2bz^3$+aazz aequ. c^4. Quae aequatio (tractabilior Monfortiana) licet sit quadrato-quadratica, cum tamen sit admodum simplex, nec proinde ullo praeparationis artificio indigeat, facillime per Circulum et Parabolam, vel per Circulum et Hyperbolam construi potest secundum methodos vulgo notas. Itaque immorari istis supervacuum foret. Quod autem problema generaliter ac per se sit solidum, ita ostendemus: Pro z substituatur $\frac{cc}{y}$, habebitur $\frac{c^4}{yy}$—yy aequ. $\frac{2bcc}{y}$—aa seu y^4—ayy+2bccy aequ. c^4, quam generaliter et per se solidam esse sic demonstro. Omnis aequatio quae in aliquo exemplo est solida, ea generaliter sumta seu per se solida est, vel quod idem est, generalem depressionem non patitur. Utique enim alias generalis illa depressio speciali exemplo accomodaretur contra hypothesin. Nostra autem novissime dicta exemplum habet, quo indubitabiliter solida est. Ponatur enim primum in casu aliquo speciali esse b aequ. $\frac{1}{cc}$, tunc 2bcc erit aequ. 2, et loco proximae aequationis habebimus: y^4—aayy+2y aequ. c^4. Rursus in eodem exemplo ponamus praeterea esse a aequ. 0, et c etiam aequ. 0, tunc evanescent termini aayy, item c^4, et restabit tantum: y^4+2y aequ. 0 sive y^3 aequ. —2, quod problema est solidum, nam radix ejus negativa est una duarum mediarum proportionalium inter 1 et 2, sive habetur per duplicationem cubi. Problema igitur sextum adeoque et decimum sua natura solidum est. Atque ita praestitimus circa haec problemata omnia quicquid poterat desiderari. Quae solida sint, talia esse demonstravimus, eaque aequatione tam simplici expressimus, ut notis et apud Cartesium Slusiumque extantibus regulis brevissime construi possint a quovis Tirone, itaque constructionem ipsam huc transcribere foret tempore abuti. Caetera et plana esse demonstravimus, et quomodo ex aliis problematibus jam

datis dentur, ostendimus, ut nihil praeterea addere operae pretium sit. Addidimus tamen, quomodo exempla solutionum in numeris rationalibus infinita nullo negotio habeantur. Caetera praestare tironis exercitationi magis conveniet.

Velim autem in his problematis quae plana ostendimus, animadverti usum analyseos linearis Veterum, qui sane tantus est, ut si quis ea neglecta sine discrimine solam recentiorum algebram adhibeat, in calculos ingentes se induere possit. Saepe enim altissime assurget et anxius inquirere cogetur depressiones, nisi paulo ante problema profundius inspiciat; plerumque etiam in constructiones incidet contortas et minime naturales, quas evitabit si cum Veteribus subinde usum Datorum adhibebit et cum analysi recentiorum opportune miscebit. Sciendum enim est, quod pauci animadverterunt, duplicem esse analysin, unam qua problema unumquodque resolvitur per se, et incognitae habitudo ad cognitas investigatur, alteram qua problema propositum reducitur ad aliud problema facilius, quod fit usu Datorum, quando ostenditur uno dato haberi et aliud. Et prior quidem Methodus Algebraica est, quam a Vieta et Cartesio maxime celebratam, recentiores hodie solam analysin esse putant, cum tamen altera methodus et Veteribus usitata fuerit, quod multis exemplis ostendi posset, et suas quoque certas et constantes regulas habeat, et difficultatem magis dividat in partes, atque ideo soleat feliciores exhibere solutiones magisque naturales, et intellectum non per symbola sed ipsas rerum ideas ducat. Unde aestimandum tibi relinquo, Vir Clarissime, quam longe adhuc absit analysis, quae hodie passim in usu est, a perfectione vulgo jactata.

Quod vero Cl. Monfortius ad te scribit se problemata haec aggressum, ut vim analytices experiretur in his quoque, ubi inter data habetur angulus, quibus casibus Ghetaldus et Beaugrandius Analysin Speciosam haerere putent; item hinc disci posse artem solvendi problemata trigonometrica sine usu tabularum, id meo judicio admitti non potest. Quanquam enim non meminerim, quae sit horum scriptorum sententia, illud tamen scio, Geometras cum negant calculum circa angulos in potestate esse, non intelligere angulos ita datos, ut hoc loco cum Monfortio et aliis assumsimus, cum scilicet angulus rectus determinatur (ut cum positione dantur rectae AB, AC (fig. 83) angulum A comprehendentes, vel cum datur ratio laterum AB, AD in triangulo rectangulo ADB) et nihil aliud quaeritur, quam aliae rectae ex datis

rectis, sed tum demum Geometras difficultatem agnoscere, cum angulus datur per numerum graduum, sive per rationem arcus BE cui ex centro A insistit, ad totam circuli circumferentiam, et quaeruntur inde latera seu rectae, vel contra cum lateribus datis vel rectis determinantibus numerus graduum seu ratio arcus ad circumferentiam desideratur, tunc enim Geometrae hactenus omnes ad tabulas quas vulgo Sinuum vocant, recurrere coacti sunt, fassi neque Algebram neque Geometriam constantes solvendi regulas praebere. Quod adeo verum est, ut asseram ego algebram in his non tantum imperfectam sed et impossibilem esse, sive ut rem exemplo explicem, dato sinu toto AE et BD sinu anguli BAE, ajo impossibile esse per algebram invenire sinum FG anguli FAE, posito arcum FBE esse ad arcum BE, ut diagonalis quadrati est ad latus. Tale enim problema, quemadmodum facile demonstrare possum. neque est planum neque solidum, neque tertii aut quarti aut quinti, aut ullius alterius gradus, nec proinde per ullam earum curvarum, quas solas Cartesius in Geometriam recipi voluit, construi potest. Quod rursus signum est, non tantum analysin Geometricam (quae sola algebra nititur) esse imperfectam, sed et alias adhuc curvas Geometricas excogitari debere, quae Algebraicae quidem non sint (nec proinde relationem habeant ordinatae ad abscissam ex axe, aequatione quadam certi gradus explicabilem), possint tamen motu continuo describi. Ubi vero curvas excludo, cycloidi similes, etsi enim accurate describi possint, tamen assumunt curvae materialis applicationem ad planum tangens vel quod eodem redit extensionem fili curvae materiali applicati in rectum, quod perinde est ac si quis Geometra sphaeram aqua replens et eandem aquam mox inde in rectangulum solidum effundens, se sphaeram cubasse dicat. Hujusmodi enim constructiones a Geometris non desiderantur, etsi rectae sint, et probae, et nonnunquam adhibendae donec meliores inveniamus. Assero autem posse inveniri novum curvarum Geometricarum genus, quae solo rectarum materialium seu regularum motu constante et ab uno principio dependente, continuo tractu describantur, ac proinde aeque sint Geometricae ac ulla earum quas Cartesius exhibet; his curvis ajo problemata algebram transcendentia solvi posse perficique Geometriam. In locum quoque Aequationum Algebraicarum, quae scilicet sunt certi gradus, ut planae, solidae, sursolidae etc., novum plane calculum introduco problematibus transcendentibus inservientem, adhibitis aequationibus

infinitis. Quod inventum, cum sit inter praestantissima censendum, maximique in tota re Mathematica usus, exemplo illustri declarabo: Anguli BAE vel arcus BE sit tangens EH, secans AH; hanc tangentem EH vocabo t, radium AB vocabo r, et arcum BE vocabo a; ajo hanc aequationem haberi a aequ. $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - \frac{t^{11}}{11t^{10}}$ etc. in infinitum. Ope hujus aequationis in Triangulo rectangulo AEH ex datis lateribus habebuntur anguli, sine ullis tabulis, calculo tam exacto quam quis velit, modo radius r sit latus circa rectum majus et tangens t minus, et quidem aequatione ejusmodi exactus continetur valor arcus, quia continentur in ea omnes appropinquationes simul in infinitum. Nam si terminos priores quotlibet ut $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4}$ assumas, error semper erit minor termino proxime sequenti ut $\frac{t^7}{7r^6}$, ergoque tam parvus quam velis, nam posito t esse minorem quam r, patet terminos istos t, $\frac{t^3}{rr}$, $\frac{t^5}{r^4}$, $\frac{t^7}{r^6}$ etc. continue decrescere in progressione geometrica; quae autem sic decrescunt, ea satis promte evanescere constat. Arcu autem in numeris quantumlibet exactis hac ratione invento, dabitur etiam ratio ejus ad circumferentiam numeris Ludolphi Coloniensis expressam; ergo quantitas anguli seu numerus graduum t et r, seu AE et E(H) sunt aequales, quod fit cum arcus (B)E est quadrans circuli, tunc loco aequationis prioris (B)E seu a aequ. $t - \frac{t^3}{3rr} + \frac{t^5}{5r^4}$ etc. fiet (B)E aequ. $r - \frac{r}{3} + \frac{r}{5} - \frac{r}{7}$ etc. ac proinde, si radius circuli sit 1, erit arcus quadrantis $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc., vel si quadratum diametri sit 1, erit area circuli $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. Quod a me inventum theorema summos Geometras, quibus ostendi, mirifice delectavit. Nec puto in numeris rationalibus simpliciorem atque elegantiorem magnitudinis circuli expressionem reperiri posse. Appropinquatio autem subita non ab his, sed a generali theoremate petenda est, assumendo arcum quadrante minorem, cujus data sit ratio ad circumferentiam, ut tangens quoque in numeris quantum satis est exactis habeatur. Quodsi Ludolphi Coloniensis tempore nota fuisset haec methodus, ne centesima quidem laboris parte ipsi opus fuisset.

Contra ex datis angulis et uno latere reliqua latera investigaturus alia opus habet aequatione infinita, quae neque facilitate neque elegantia priori cedit: eam vero alias exponam, nunc specimen dedisse contentus, unde intelliges, quanta hinc geometriae etiam practicae accessio habeatur. Cum enim nihil sit trigonometricis problematibus frequentius atque utilius, quae hactenus sine tabulis satis exacte expediri non possunt, tabularum autem libros per terras et maria circumferre non sit in potestate; nos inventis regulis facillimis, et quarum semel perceptarum ne oblivisci quidem possis si velis, et quibus nullo negotio etiam ultra ipsam tabularum exactitudinem ire liceat, scientiam tam indecora servitute absolvimus, ac nunc denique effecimus, ut Geometra ingenio fretus libris carere possit.

Atque haec quidem, Vir Celeberrime, ideo tibi scribenda putavi, primum ut tuo judicio probata, quod multorum instar est, per te, si tanti tibi videntur, ad alios perveniant, in Italia inprimis vestra doctos viros, quorum sententias libenter audiam, deinde ut illi qui sibi persuasere Analysin Mathematicam nihil ab Algebra differre, aut jam ad vestigium pervenisse, noxio scientiae augmentis errore liberentur. Scio summos in Italia esse Geometras, Romae Riccium et Grandium, quibus P. Honoratus Fabry et si adhuc ibi agit Joh. Alphonsus Borellus addi posse videntur, Florentiae Vivianum, Petavii Renaldinum, ut alios taceam. Hi etsi Algebrae intelligentissimi, mecum tamen opinor persuasionem damnabunt, quam in quibusdam locis maxime inter eos qui Cartesiani appellantur, invalescere video, quasi in Algebra, quam vocant Speciosam, inprimis qualem Cartesius tradidit, omnium problematum solutio contineatur, quoniam scilicet Cartesiani vulgo fere non nisi minoris momenti ususque problemata attingunt, qui si vel trigonometriam recte considerassent, aliter sentirent.

Porro vera Algebrae incunabula Italiae jam a superiori seculo debentur. Primarius enim finis Algebrae est, invenire valorem incognitae quantitatis, sive formulam quandam si licet finitam, qua exacte exprimatur radix aequationis. Et quidem ejusmodi formula jam satis habebatur ex Veteribus, quando aequatio non excedebat quadratum. Sed quando aequatio est cubica, primus formulam radicis invenit Scipio Ferreus et post eum Nicolaus Tartalea, a quo didicit Cardanus. Nam si aequatio cubica generalis a secundo

termino liberata sit

$$x^3 + px \text{ aequ. } q,$$

radix generalis erit

$$x \text{ aequ. } \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q - \sqrt[2]{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

quod inventum ego inter praestantissima censeo. Proximum est inventum Ludovici Ferrarii Bononiensis, qui Cardano familiaris fuit, et cujus vita etiam extat inter Cardani opera. Is primus invenit modum reducendi aequationem quadrato-quadraticam quamlibet ad cubicam. His duobus inventis omnia problemata solida per algebram absoluta habentur, et revocantur vel ad trisectionem anguli, vel ad inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas. Neque quisquam hactenus generalem pro altiori aliqua aequatione radicis formulam dedit, quanquam ego aditum ad eam rem reperisse mihi videar, cujus et specimina habeo, sed prolixi calculi necessarium taedium devorare nondum vacavit. Vieta autem et Cartesius cum ultra progredi non facile possent, alio flexere, ille quidem ad Exegesin numerosam, hic vero ad linearem. Quod vero proprie Algebraicum esset, nihil admodum adinvenere, etsi summos fuisse Geometras et usum inprimis Algebrae in Geometria eos pro parte aperuisse non negem. Quae ideo adjeci, Vir Clarissime, ut populares tuos autoritate tua excitem ad colendam porro scientiam, quam majores eorum tantis incrementis auxerunt. Vale.

V.

DISSERTATIO EXOTERICA DE STATU PRAESENTI ET INCREMENTIS NOVISSIMIS DEQUE USU GEOMETRIAE.*)

Quae cum saepe mihi cum variorum studiorum hominibus communicatio est, audire subinde fecit querelas de vanitate Geometriae, quibus illa frustra opponat demonstrationes suas, quando

---

*) Leibniz hat später darüber geschrieben: De usu Geometriae Statu praesenti ac novissimis ejus incrementis.

non de veritate, sed usu quaeritur. Scilicet non inepte jactatur, laborare nos intemperantia studiorum, unde nihil redundet in vitam; utilia pleraque dudum inventa esse, aut si qua supersint, non esse speranda a Geometria. Pro Scholasticorum nugis (sic enim illi vocant, nescio an jure) nunc passim explosis alias introduci nugas, magis speciosas, sed et magis difficiles. Parum accessurum generi humano, si duae proportione mediae inveniantur inter duas datas, nisi forte redeunte oraculo Delphico pestem aliquando accurata cubi duplicatione depelli regionibus posse credamus. Illam vero toties imprudenter jactatam, toties vane promissam circuli Quadraturam, quid tandem producturam putemus, an forte aurum philosophicum sive Lapidem illum mirificum quatuor Elementorum velut lateribus in unius circuli circumferentiam coeuntibus indissolubiliter compaginatum, quemadmodum disserebat Michael Mayerus Chymista, Rosae-Cruciorum assecla, peculiari tractatu de circulo quadrato. Sunt qui vix risum continent si de parabolis aut hyperbolis loquare; quid facerent si scirent, geometras ad quartas dimensiones et sursolida ascendere, quae adeo nusquam sunt, ut nec intelligi possint. Campum aliquem metiri, aut horologium solare describere, aut castelli formam delineare, in eo omnem Geometriae laudem sitam putant. Algebrae vero sunt qui nec nomen ferre possint, quemadmodum de se ait Fortinus de la Hoguette in testamento. Scilicet crucem ingeniis figi, et novas excogitari scientias, quasi non satis veteres praebeant, quod agamus, aut quasi vita longa sit, ars brevis. Et memini egregios quosdam viros mirari Cartesium de se fassum, quam male ut multis videri possit tempus collocaverit, sex septimanis integris in una Pappi quaestione consumtis. Alii quando Geometras ad naturae opera explicanda accedere vident, et de apum cellis aut sexangula nivis forma, aut aquae salientis limen ratiocinari, Aristophanis jocos renovant, qui Socratem introducit pulicum saltus curiose metientem. De mechanicis autem ita sibi aliisque persuadent, parum profici Geometrarum subtilitatibus, quibus materia reluctetur: inutilem eorum diligentiam fuisse, qui Cartesii autoritate aut rationibus persuasi, hyperbolas polire aggressi sunt, et inventa pulcherrima casui potius aut superficiariis ratiocinationibus quam Mathematicorum profunditati deberi testimonio esse posse tubi optici concinnatorem primum hominem literarum expertem. Denique Cartesium ipsum in flexu aetatis, versis ad physicam studiis, Geometriae solenniter renuntiasse. Haec et his

fortiora dicuntur passim a viris etiam doctis et prudentibus, dum vero inprimis clam causas irarum habent, ut Scaliger in Clavium et Vietam, nec abnuo subesse aliquid veri, et saepe plus promittere geometras, quam praestare possit Geometria, et magna theorematum farragine memoriam obrui et acriore figurarum contemplatione animi vigorem labefactari, qui rebus agendis servari debet; quare operae pretium erit paucis exponere quantum ab accuratis rerum aestimationibus ....*) quis sit verus ejus in vita usus, et quousque ab homine indulgendum videatur scientiae pellaci.

Geometrae nomen, ut hinc ordiar, semper latius apud eruditos, quam apud vulgus patuisse. Geometria enim plerisque videtur scientia figurarum tantum, de Lineis, de Triangulis, de Circulis, de Solidis, de Cylindro, Cono, Sphaera. Docti vero ita judicant, unam eandemque esse scientiam illam quae per omne rerum genus diffusa accuratas et in longum protractas ratiocinationes exercet. Quemadmodum enim Oceanus idem est, qui prout varia litora alluit, nunc Atlanticus, nunc Aethiopicus, nunc Indicus appellatur, ita eadem sciendi ars omni argumento apta variorum theorematum velut sinus facit. Unde constat Veteres cum Apollonium geometrae nomine velut praecipuo honestassent, omnibus doctrinae solidioris laudibus a se cumulatum credidisse: et hodieque si quem hoc nomine homines in his studiis versati appellent, ab ingenio illo mathematico laudare quod per longinqua et difficilia non tentandi arte aut divinandi felicitate, sed quodam animi vigore sibi viam facit; itaque et Aristotelis Analytica geometrice scripta dicere ausim, quae in demonstrationes redigere non difficile, et si quis res Metaphysicas pari rigore tractaverit, ei Geometrae laudem non abnuerim, etsi nec aequationes unquam nec figuras cogitarit. Diophantum quoque fateor et Fermatium in mediis numeris Geometras egisse, et Archimedem ac nostro tempore Galilaeum non minora in Mechanicis quam in Tetragonisticis aut Centrobarycis Geometriae specimina dedisse, Cartesium autem magno ingenio id egisse, ut physica ipsa quantum licet Geometrica esset. Nec dubitem de eo quod justum aut utile est, de numero habitantium, de pretio rerum, de re mercatoria aliisque multis dici posse quae Geometriam sapiant,

*) Schadhafte Stelle des Manuscripts.

certitudine pariter dogmatum et eruendi difficultate. Geometriam ergo tueri idem est ac ratiocinandi severitatem defendere, quae longo mentis itinere characterum aut figurarum auxilio incorrupta recurrat. Unde sunt aliqui qui se geometras esse ignorant ipsi, cum severe tamen et profunde in eo quod intelligunt argumento ratiocinentur.

Ego qui me non ante autores capere arbitror, quam origines intelligam fontesque unde egregia cujusque inventa manarint, duo eorum qui inventores habentur summa genera notavi, aliisque ingenia geometrica, aliis combinatoria esse. Qui geometrico sunt ingenio, eorum inventa difficilia sunt et profunda, et multa meditatione expressa. Qualia nec facile enuntiantur nec statim a quovis auditore aut spectatore intelliguntur. Exemplum elegans habemus in machina textrice, nunc passim frequentata, Scoti cujusdam invento, quod novennio integro occupavit autorem suum, aut in arithmetico instrumento, quod omnem animi laborem in rotas transfert.

Combinatoria ingenia plus habent felicitatis, minus laboris; simplicia sunt inventa eorum et paucis verbis tota dicuntur, ut plerumque animadversione potius quam meditatione indigeant ac levi magis animi ictu, quam subtili indagatione parentur. Petuntur enim fere ex rebus e medio positis, certa quadam relatione connexis, aut experimentis quae hactenus pro sterilibus habita, felici conjunctione subito usum inveniunt. Acus magneticae vim directricem, credibile est, diu incultam jacuisse opinione inutilitatis, donec genius aliquis non vulgaris vidit, quanti esset notam semper habere mundi plagam. Quid facilius quam vaporem e rebus calore sublatum in corpus densare, exempla balneorum ante oculos erant, nemini tamen Graecorum Romanorumque in mentem venit spiritum e vino elicere, quamvis testatus esset Galenus, quantum illi debiturus esset qui separationem partium vini docere posset, qualis lactis jam tum habebatur. Quod nuper prodiit artificium motus aequabilis pure mechanicum, felicis tantum combinationis opus est, ut mirari queas nulli in mentem venisse, fieri posse ut dum elateria per vices agunt, prima in eundem semper statum restituantur, antequam ad ipsa revertatur ordo, quo fit ut post breves admodum periodos ad eandem plane formam machina redeat, adeoque idem quoque redeat effectus periodique fiant aequidiuturnae. Unde intelligi potest, aliquando homines longinqua perspi-

cere, quae ante pedes sunt non videre. Saepe tamen non combinatione simplici, sed experimento opus est, ut aliquid egregium eruatur, quo casu manifestum est, fortunam venire in partem juris, tantum enim quisque invenisse videbitur, quantum praejudicare potuit ante tentamentum: et hujus generis inventa fuere quorundam Alchymistarum qui saepe frivolis admodum rationibus ducuntur et destituti non ideo absistunt, quod si aliquando in nonnullis quae ipsi non quaerebant eventus respondeat conjecturae, tum illi vero mirifice triumphant et prudentiam venditant suam, cum misericordiam potius naturae parentis laudare deberent, quae tam assiduos sui cultores noluit esse perpetuo infelices.

Sed illi prae caeteris apti ad indagationem veritatis, pariter et inventa vitae utilia in lucem producenda, qui combinatorio ingenio studium acre Geometriae et profundae meditationis aut etiam si materia postulet experiundi patientiam junxere. Nam si paucae quaedam ac faciles paratu combinationes tot praeclara nobis inventa dedere, dubitari non debet, majora erutum iri, cum interiores rerum latebrae excutientur. Medicam certe artem nemo speret nisi ab ingenio utrumque complexo valde augeri posse: subtilior est causarum implicatio, quam ut levi inspectu detegi possit, et nisi in natura rerum, geometrarum exemplo theoremata condantur, et morosa diligentia consequentiae in longinquum producantur, semper in cortice haerebimus. Unitemur summos viros, Pythagoram, Democritum, Hippocratem, Aristotelem, Archimedem, Galilaeum, Cartesium, Pascalium, quibus habet quos addat tempus praesens. Geometriam exemplo Conditoris in ipsa natura exerceamus, consideremus quantum illa Copernico profuerit et Keplero, quantum a Scheinero et Cartesio incrementi acceperit optica, quid mechanici Stevino debeant et Galilaeo, quam ipsis medicis Sanctorius praeluxerit. Cochleae cylindriceae sive ut vulgo vocant fine carentis utique fortissimae potentiarum usus uniformitate ejus nititur, qua fit, ut sibi per omnia congruat; alioqui enim nec moveri posset cochlea, nisi linea ejus in suis ipsa vestigiis labi posset, quod praeter ipsam soli linearum rectae ac circulari datum est. Hoc vero consideratio utique geometrica erat. Pulcherrimum antliae genus cochleiforme, in qua corpora ipso in speciem descensu attolluntur, ad Archimedem fama publica refert, quanquam memorabile sit quod de Mediolanensi quodam cive refert Cardanus, qui prae nimio gaudio in delirium incidit, quod primum a se inventam putaret. Speculorum urentium miracula

etsi fama inferiora, magna tamen nec nisi geometriae operatricis effecta sunt. Graphicen qui imaginationi potius felici quam geometriae tribuit, videat quantum inter nostratum et Chinensium delineationes intersit. Chinensibus natura favens colores admirandos suppeditat, quorum gratiam facile nostri arte vincunt: arte, inquam, filia geometriae. Graeci non ante artes coluere, quam geometriam, et Arabes tum maxime in his studiis excelluere, cum potentia Asiam atque Africam complexi sine aemulis floruere; et non ante barbaries desiit in occidente, quam redux ab exilio Geometria, etiam architecturam et pictoriam et statuariam adduxit. Astrononomia autem quid nisi sphaericae doctrinae translatio est ad mundum, et planetariae hypotheses geometrica ratiocinia sunt, quo motus astrorum calculo subjicerentur; quod vero trigonometria mirabilius, cujus .... nemo indoctus, utcunque summo ingenio praeditus intelligat. Quis enim credat, campum mensurari posse ex duabus stationibus dati intervalli, aut quis Indis persuasisset, Columbum ex Ephemeridibus potius quam coelesti instinctu eclipsin praedixisse? Certum est, solam fuisse geometriam astronomiae habitu indutam, quae Christianis aditum aperuit in Sinas, et si Martinio credimus, nihil magis affecerat ingeniosos quosdam Mandarinos, quam inviolabilis certitudo geometricorum quorundam theorematum, quae apud Societatis Jesu patres didicerant. Quid navigatoriam scientiam et velificatoriam artem memorem, perpetuum exercitium geometriae cujusdam nonscriptae? Limenereutica longius fortasse provecta esset, quam quidam sperant, si praesidiis geometriae quantum licet uteremur. Hoc enim unius geometriae officium est, quae ex datis duci possint docere: cum ostendat quaenam problemata determinata sint, et ex ipsis indeterminatis aliquid eliciat certum, locum scilicet cujus omnia puncta satisfaciant, quo fit, ut datis binis solutionibus aut aliquando pluribus imperfectis inter se diversis, una perfecta inveniatur. Quanti hoc sit, sciunt talium intelligentes. Mihi certe semper ita visum est, notum jam et Veteribus artificium de Locis inter humanae subtilitatis specimina censeri debere. Quid pulchrius aut utilius hydrostatica Archimedis, quam Torricellius et Pascalius geometrae tantis accessionibus auxere. Circa pneumaticen autem egregius Gerickius nostras antliae aëreae autor primus, et qui fertilis ingenii felicitate nulli facile cesserit, celeberrimus Boylius, saepe ratiocinia vere geometrica et irrefragabiles demonstrationes dedere. Quod ipsi nobis supra objeceramus, telescopium hominis plebeji

mathematica indocti opus esse, non aeque certum est ac quidam putant. Certe Metius ille quem Cartesius memorat, in re optica speculisque ac lentibus conficiendis erat diu versatus, ut credibile sit, radiorum naturam et opticas demonstrationes intellexisse, mathematicis enim non inepti sunt etiam aliarum literarum imperiti. Sed aliud habeo quod de hoc negotio dicam, vel ideo memorabile quod a paucis video adverti. Keplerus in Epistola ad Galilaeum, qua Nuntio Sidereo respondet, haec narrat, Rudolphum Imperatorem, qui ut constat his studiis mire delectabatur, jam dudum antequam de telescopio quicquam auditum esset, ostendisse sibi descriptionem machinae duobus vitris instructae, inter Portae collectanea repertam, obscuriuscule traditam; hanc se obiter considerasse, ait Keplerus, et familiari eruditis fastidio, quoties aliena et suspecta inventa offeruntur, statim rejecisse: nunc vero poenas dare temeritatis et judicii praecipitati. Quae cum ita sint, credibile est, telescopii ideam esse foetum optici rationalis, sed cujus conatibus, ut solet, fortuna non respondit: unde cum aliis forte communicasset laborem, ex quo nihil amplius speraret, quid vetat consilii rationem aeque in primi executoris ac Portae manus venisse. Certe Porta jam a decimo octavo aetatis anno se devoverat conquisitioni arcanorum, omni librorum genere lustrato, itineribusque susceptis. Porro microscopium, quantum intelligere potui, inventum est summi artificis Cornelii Drebelii Alcmarensis. Satis ergo vindicasse videbor industriam geometrarum, ubi unum chronometron adjecero. Mirum est, omnium hominum oculos ad Galilaeum usque adeo fuisse ἀγεωμετρήτους, ut de isochronismo oscillationum penduli, quo nihil frequentius oculis observatur, nemo somniaret. Galilaeum autem non conjectura quadam levi inductum, sed rationali via progressum mirabile usque adeo arcanum produxisse, patet ex illa quam tenuit inquirendi ratione. Scilicet a motu uniformi et uniformiter accelerato orsus arcana descensus gravium aperuit primus; quae cum plano inclinato applicuisset, ingeniosissime pervenit ad praeclarum illud theorema, quod chordis quotcunque intra circulum ductis ad idem punctum in imo concurrentibus, descensus a circumferentia circuli ad punctum imum per chordam quamlibet minorem majoremve sit isochronus. Unde sequebatur, cum oscillationes pendulorum exiguae essent, circuli autem quos describerent magni, descensum in chorda a descensu in ipsa circumferentia sensibiliter non differre. Huc usque rem produxit Galilaeus, duoque posteritati

absolvenda reliquit, applicationem penduli ad horologium, quo numerandi abesset labor, et inventionem lineae curvae, cujus evolutione alia rursus curva describeretur a pendulo, quae chordarum circuli proprietatem haberet, id enim arcus circuli praestare non poterat, unde repetitae diu vibrationes pendulorum haud dubie erroneae fiebant. Porro alterum praestare combinatorii, alterum geometrici ingenii erat, utrumque immortali opere Hugenius pulcherrime absolvit.

Satis experientia praeteritorum confirmasse videor usum in vita geometriae profundioris; nunc paucis addam superesse illi etiamnum, quod agere possit, ne quis sibi persuadeat trigonometriam aut sinuum canonem ad egregia praestanda sufficere. Sane non est dubium, elateres et sonos et ipsam musicen geometricis legibus subjici, et artem projiciendi pertici posse, et tempus venturum quo ignis ipse jugum subibit, quod caetera elementa jam patiuntur Multa restant dicenda de motu liquidorum, quae geometram expectant, sed et in solidis detrimenta, quae machinae a frictione patiuntur, aliaque quae vulgo experientiae committuntur, aestimationem ferunt, quae ubi absoluta erunt, perfectum de machinarum vi judicium in nostra potestate erit: nunc enim illud saltem possumus, ne nimium promittamus, tunc licebit machinas calculo subjicere ad instar numerorum, ubi primum experimenta quaedam fundamentalia diligenter capta erunt. Porro observavi, problemata pleraque mechanicae subtilioris, ubi ad geometriam puram reducta sunt resolvi in quadraturas et certorum quorundam spatiorum curvilineorum dimensionem. Unde necessitas quaedam nobis imposita est hanc geometriae partem imprimis perficiendi, vel ideo quod nondum in calculi potestate est, nec ex Cartesii inventis pendet.

Duplex est geometriae utilitas, nam una ad augendas vitae commoditates pertinet, altera in ipsa mentis perfectione consistit. De priore tantum diximus hactenus: quam quivis capit, posteriorem non nisi intelligentes aestimabunt. Illam geometrae omnibus communicant, hanc servant sibi, ut scilicet sit aliquod illis pretium operae, etiamsi nemo gratiam haberet. Nemo dubitare potest, potissimum unicuique esse mentem ejus; qui vero profundius ista contemplantur, etiam illud ajunt quod nos ipsos esse dicimus, id mentem esse. Perfectio ergo nostra potissima eadem est cum perfectione mentis, praesertium cum mens perpetua sit, corpus visibile dissolvatur. Perfectio mentis vera et solida consistit in inve-

niendi atque judicandi facultate maxime aucta. Utramque puram et in se reductam pulcherrimis speciminibus perficit geometria. Nam et si quid inveniendum sit, ostendit quantum sit in potestate, quave sit eundum via, et ubi de demonstratione ac judicio agitur, severissimae ratiocinationis exempla praebet. Geometria una omnium formas illas medias et in caduca licet materia aeternas ac per se subsistentes contemplatur, quarum ideae menti nostrae velut insitae perire non possunt, etsi omnis scientia historiarum et experimentorum extingueretur. Potest enim in eum mens nostra venire statum, ut experimenta sumere non possit, aut eorum nullam habeat rationem quae in hac vita sumsit, sed ut extensionis et motus aliarumque formarum separatarum ideas exuat, fieri nullo potest modo. Itaque inventum de circulo ad omnem mentis statum pertinet; contra experimenta naturae corpori ac sensibus illigatam supponunt animam, certumque est, neque colores neque sonos nisi cum relatione ad sentientis organa intelligi posse, et aliis alia apparere. Ex quibus facile intelligi potest, ad perfectionem mentis perpetuam non conferre quae memoriam nostram locupletant, sed quae cogitandi facultatem cogitant. Quod mirifice facit geometria. Ea vero ratio est, ni fallor, cur Veteres tanti putaverint sejunctas a materia formas contemplari, et cur prope indignum facinus duxerint, res divinas in mortales usus prostitui. Nam Pythagoras et Socrates persuasi erant de immortalitate animi, de insitis ideis incorruptibilibus, unde Platonem Archytae pene indignatum ajunt, quod geometriam in machinis exerceret, et Archimedem referunt non nisi aegre Hieronis precibus ad ea quae in communi usu versantur descendisse. Ego qui motus ideam inter formas illas aeternas censeo (nam et circa motum non minus quam circa figuram demonstrationes habemus) machinae elegantis inventionem inter pulchra theoremata numerari posse puto, nec video cur minus memorabilis sit generatio parabolae per motum projectorum, quam per coni planique sectionem: et naturae indagationem (quae in perpetua geometriae applicatione consistit) ad perpetuam quoque mentis perfectionem pertinere arbitror, nam quoties divina illa artificia penitus intelligimus, quibus admirandos quosdam effectus praestitit autor rerum, non tantum admiratione ejus percellimur et amore inflammamur quod ad voluntatem regendam pertinet, sed et artem inveniendi discimus a summo praeceptore, intellectusque nostri facultatem augemus. Illud enim pro certo habendum est, naturam

rerum simplicissimas problematum constructiones semper elegisse. Physica ergo, quatenus perficere mentem potest, desinit in geometriam, nec ante ullum phaenomenon penitus in corporibus intelligimus, quam ex primis figurae motusque ideis derivavimus. Haec non tantum a maximis viris, Galilaeo et Cartesio, ne Democritum et Aristotelem memorem, inculcata sunt, sed et agnita illustri viro Francisco Bacono, cui illud tamen concedo, physicam experimentis solis comprehensam, utcunque mentem non afficiat, tamen et sensus recreare et plurimum ad vitae commoditates posse, et quemadmodum contemplationes ad amorem Dei referuntur, ita experimenta utilia caritatis illius quam homo homini debet instrumenta esse. Certe medicinam plane rationalem reddere, non nostri certe, forte nullius seculi felicitas erit; ego semper semi-empiricam fore credo, in tanta causarum complicatione, quas etsi intelligeremus fortasse, non possemus calculo subjicere ob nimiam prolixitatem, tametsi illud pro certo habeam, ab hominibus sagacibus et severe atque ordine et ut ita dicam geometrice ratiocinantibus, et experimenta non casu sed consilio sumentibus, plus effici posse uno decennio, quam multorum decursu seculorum actum sit.

Ut hanc ergo concludam tractationis nostrae partem, magni usus Geometriam esse arbitror, non tantum ob ingentia beneficia, quae inde accepit aut expectat humana vita, sed et quod animum ad altiora et divina et a materia sejuncta elevat et accuratis rationibus assuefacit. Credo esse homines qui nunquam quicquam in vita certo et accurate sibi persuasere praeter sensibilia, defectu geometriae, quod vel ideo periculosum, quoniam unicuique et autor rerum Deus, et natura animae et officia virtutum, non impulsu quodam fortuito aut consuetudine, sed firmis rationibus explorata esse deberent, quales in rerum natura esse, illi qui geometriam nunquam salutavere, ne capiunt quidem. Etiam qui mathematicas artes vulgari modo discunt, usus tantum causa, illi fere pulcherrima geometrarum theoremata casu et experimentis reperta arbitrantur, sed et magnae certe eruditionis vir Josephus Scaliger sibi persuasit ab Archimede quadraturam parabolae tentando repertam. Qui sic animati sunt, geometriam non alia probatione indigere putant, quam perpetuo successu, demonstrationibus vero nec si exhibeas afficiuntur. Qui mentis habitus metaphysicis sive divinis contemplationibus ineptus est, quibus tamen, ex Veterum quoque sententia, vera et duratura continetur perfectio animae, ad quam paulatim

elevat geometria. Nam filum labyrintho de compositione continui deque maximo et minimo ac indesignabili atque infinito non nisi geometria praebere potest, ad metaphysicam vero solidam nemo veniet, nisi qui illac transiverit. Cum ergo ratio dictet, ut quisque naturae suae perfectionem curet, quantum in ejus potestate est, perfectio autem nostra sit inprimis perfectio ejus quod in nobis potissimum est, id est mentis, mentis autem vim ac judicandi atque inveniendi potestatem egregie augeat geometria, consequens est homini cui vitae ratio meditationem permittit, geometriae interioris rationem habendam; at in ea non magis quam in dialectica quiescendum esse, cum ipsa media scientiarum hinc ad divina et sublimia aditum faciat, illinc ad humanas artes et compendia vitae jucundo admodum suavique descensu mentem demittat.

VI.

MEDITATIO NOVA DE NATURA ANGULI CONTACTUS ET OSCULI, HORUMQUE USU IN PRACTICA MATHESI AD FIGURAS FACILIORES SUCCEDANEAS DIFFICILIORIBUS SUBSTITUENDAS.

In lineae cujusque partibus infinite exiguis considerari potest non tantum directio sive declivitas aut inclinatio, ut hactenus factum est, sed et mutatio directionis sive flexura, et quemadmodum linearum directionem mensi sunt Geometrae simplicissima linea in eodem puncto eandem directionem habente, hoc est recta tangente, ita ego flexuram lineae metior simplicissima linea in eodem puncto non tantum directionem eandem sed et eandem flexuram habente, hoc est circulo curvam propositam non tantum tangente, sed et quod amplius est osculante, quod mox explicabo. Est autem ut recta linea aptissima ad determinandam directionem, quia eadem ubique ejus directio est, ita circulus aptissimus ad determinandam flexuram, quia ubique eadem unius circuli est flexura. Circulus

autem ille lineam propositam ejusdem plani in puncto proposito osculari a me dicitur, qui minimum cum ea facit angulum contactus. Ex infinitis enim circulis lineam, ubi ad easdem partes cava est, tangentibus in proposito puncto semper determinari potest unus, qui maxime ibi lineae assimilatur et cum ea longissime quasi repit, hoc est, ut Geometrice loquar, ita ad eam accedit, ut inter ipsum et curvam propositam nullus alius arcus circuli curvae in puncto proposito occurrens describi possit. Et hunc minimum angulum contactus circuli ad lineam propositam voco angulum osculi, uti miminus angulus rectae ad lineam vocatur angulus contactus. Ut enim inter rectam et lineam, angulum contactus facientes, nulla cadere potest recta, ita inter circulum et lineam, angulum osculi facientes, nullus cadere potest arcus circuli. Ut autem habeatur et modus inveniendi circulum osculantem, sciendum est, quemadmodum tangentes inveniuntur per aequationes quae habent duas radices aequales seu duos occursus coincidentes, et flexus contrarii per tres radices aequales, ita circuli vel aliae quaevis lineae datam osculantes inveniuntur per quatuor radices aequales seu per duos contactus in unum coincidentes. Et quemadmodum duae lineae, quae eandem habent rectam tangentem, se tangunt, ita eae, quas idem osculatur circulus, se osculantur. Itaque ut linea quaevis eundem ad lineam sibi occurrentem censetur facere angulum communem seu rectilineum, quem faciunt in puncto occursus earum tangentes rectae, quia differentia consistit in angulo contactus qui respectu anguli rectilinei est infinite exiguus, imo nullus; ita quando duae rectae tangentes duarum linearum curvarum sibi occurrentium coincidunt, seu quando duae lineae se tangunt, tunc linea ad lineam occurrentem eundum censetur facere angulum contactus, quem faciunt in puncto occursus earum osculantes circuli, quia differentia consistit in angulo osculi qui respectu anguli contactus duorum circulorum est infinite parvus, imo nullus. Ex quo intelligi potest, angulum communem seu duarum rectarum, angulum contactus duorum circulorum, et angulum osculi (primi gradus) quodammodo se habere, ut corpus, superficiem et lineam. Non tantum enim linea est minor quavis superficie, sed et ne quidem pars est superficiei, sed tantummodo minimum quoddam sive extremum. Quodsi tres contactus coincidant, aut quatuor, aut plures (radicibus sex aut octo aut pluribus existentibus), oriuntur

osculationes secundi tertiive gradus, aut adhuc altiores, in tantum perfectiores osculo primi gradus, in quantum prima osculatio perfectiorem contactum continet quam contactus communis. Porro circulus rectam tangere potest, osculari non potest; si circulus circulum osculetur, non erunt diversi, sed coincident. De caetero omnem lineam ejusdem plani osculari poterit circulus, et in genere, ut sciri possit, quonam contactus vel osculi gradu linea lineae conjungi possit, considerandum est, in quot punctis possit eam secare. Haec porro insignem habent usum in praxi. Ut enim ex consideratione, quod idem sit angulus, eadem inclinatio, vel directio linearum, quae est rectarum tangentium, insignes consequentiae in mechanicis, catoptricis et dioptricis ductae sunt; nam si corpus motu composito feratur, directio ejus est in recta tangente lineae, quam describit, et si sibi relinquatur, continuat motum in tangente, et radius incidens eundem angulum facit ad superficiem excipientem, quem faceret ad planum eam tangens: ita ex consideratione quoque linearum osculantium insignes praxes duci possunt. Si enim linea aut figura egregiam quandam atque utilem habens proprietatem inventa sit, sed quam sive torno sive alia ratione in materiam introducere sit difficile, licebit pro arcu ejus (scilicet non nimis magno, tamen ad praxin suffecturo) substituere arcum quasi coincidentem lineae alterius descriptu facilioris, eam quam perfectissime licet tangentis sive osculantis, maxime autem circuli, qui omnium descriptu est facillimus. Et hinc jam oritur, quod in praxi catoptrica et dioptrica circulus est succedaneum parabolae, hyperbolae aut ellipseos, suosque ad earum imitationem habet quasi focos. Nam circulus cujus diameter aequatur parametro sectionis conicae, et cujus centrum in axe intra curvam sumitur, circumferentia autem per verticem transit, sectionem conicam in vertice osculatur, adeoque assumpto arcu quantum satis est parvo, ab ea non differt ad sensum. Quae causa est, cur focus speculi concavi circularis absit a speculo quarta parte diametri, quia focus parabolae a vertice abest quarta parte parametri, et focus parabolae atque circuli osculantis coincidunt. Eadem in omni alio linearum et utilium proprietatum genere pro re nata locum habent. Quae quantum conferant ad subtilitates Geometricas in usum vitae transferendas, nemo talium intelligens non videt. Nobis vero aditum aperuisse, ne forte periret haec meditatio, nunc quidem sa-

tis fuit. Nec injucundum erit considerare, quomodo ita tandem controversia Geometrarum de angulo contactus, quae plerisque inanis visa est, in veritates desierit solidas et profuturas.

VII.

DE LINEIS OPTICIS, ET ALIA.

Versanti mihi dudum in longinquo satis itinere, quod Serenissimi Principis mei jussu suscepi, et passim monumenta in Archiviis et Bibliothecis excutienti, oblati sunt ab amico quodam Actorum Lipsiensium menses, unde jamdiu novorum librorum expers discerem, quid in Republica Literaria ageretur. Inspicienti igitur Junium anni 1688 occurrit relatio de Principiis Naturae Mathematicis Viri Clarissimi Isaaci Newtoni, quam licet a praesentibus meis cogitationibus longe remotam avide et magna cum delectatione legi. Est enim vir ille ex paucorum illorum numero, qui scientiarum pomoeria protulere, quod vel solae illae series docere possunt, quas Nicolaus Mercator Holsatus per divisionem erat assecutus, sed Newtonus longe ampliore invento extractionibus radicum purarum pariter et affectarum accommodavit. A me, ut obiter hic dicam, methodo serierum promovendae, praeter transformationem irrationalium linearum in rationales symmetras (voco autem rationales, quarum ordinatae semper ex abscissis haberi possunt in numeris rationalibus) excogitata est ratio pro curvis transcendenter datis, ubi ne extractio quidem locum habet. Assumo enim seriem arbitrariam, eamque ex legibus problematis tractando, obtineo ejus coefficientes. Porro a praesenti opere Newtoniano praeclara quaeque expecto, et ex relatione Actorum video, cum multa prorsus nova magni sane momenti, tum quaedam ibi tradi, a me nonnihil tractata; nam praeter motuum coelestium causas, etiam lineas catoptricas vel dioptricas et resistentiam medii explicare aggressus est. Lineas illas Opticas Cartesius habuit, sed celavit, nec suppleverunt commentatores; neque enim res communi analysi subest. Eas postea ab Hugenio (sed qui nondum edidit) et nunc a Newtono inventas intelligo. Etiam mihi, sed per di-

versam, ut arbitror, viam innotuere. Et habebam quidem methodos generales dudum, sed proprias perelegantes eruendi occasionem dedit egregium inventum Dn. Tschirnhausii nostri in Actis publicatum, qui integras lineas tanquam focos considerat. Quid inde consecutus sum, exemplo explicabo, unde reliqua intelligantur. Sit punctum A (fig. 84) et linea data BB, reflectens radios AB, quaeritur linea CC, radios ABC iterum reflectens in unum commune punctum D. Solutio primae aggressionis haec est. Data linea BB, ejus respectu constat dari puncti A confocum linearem seu lineam EE. Rursus datis duobus confocis, uno lineari EE, altero puncto D, constat inveniri posse aliquam lineam CC, cujus sunt foci, quae erit quaesita. Meliores autem constructiones prodeunt, nam $A_1B + {}_1B_1E + \text{arc.}\, {}_1E_2E = A_2B + {}_2B_2E$ et $D_2C + {}_2C_2E + \text{arc.}\, {}_2E_1E = D_1C + {}_1C_1E$, unde tota $AB + BC + CD$ semper est aequalis uni constanti rectae. Si filum circumligatum sit lineae EE simulque alligatum puncto D, tunc evolutione curvae EE stylus filum intendens describet lineam CC. Sin filum idem altero extremo alligatum sit puncto A, stylus filum intendens describet lineam BB. Sed dissimulata curva EE, prodit constructio simplicissima talis: a data recta constante (aequal. $AB + BC + CD$) detrahatur quaevis data AB, residuae sumatur aequalis BF ita ducta, ut ad PB curvae BB vel ejus tangenti perpendicularem in B faciat angulum FBP ipsi ABP aequalem. Jungatur DF, et ex puncto ipsius DF medio G normaliter educta GC occurret ipsi BF in quaesito puncto C, et quidem patet, GC esse lineae CC tangentem. Rotetur porro figura haec circa axem AD, et quae in lineis diximus, etiam in superficiebus genitis locum habebunt. Eadem et dioptricis applicari possunt. Lineam EE voco A c a m p t o n, quae radios ABE sine reflexione et refractione accipit. Dantur et A c l a s t a e, quae eosdem non refringunt et tamen reflectunt, et sunt illae, quae ipsius EE evolutione simplici describuntur, quod primus licet alio fine consideravit Hugenius. Talis est FF, posita CF (in producta BC) = CD. Si pro A aut D punctis, aut alterutro, foci lineares darentur, aut punctum infinite abesset, ubi radii fierent paralleli, eadem suo modo locum haberent.

Quae de resistentia medii peculiari scheda complexus sum, jam pro magna parte Parisiis duodecim abhinc annis eram assecutus, et illustri Academiae Regiae nonnulla ex illis communicavi. Denique cum mihi quoque meditationes inciderint de causa physica motuum coelestium, operae pretium duxi peculiari schediasmate

nonnullas ex illis in publicum proferre. Decreveram quidem premere, donec mihi liceret leges Geometricas diligentius conferre cum phaenomenis novissimis Astronomorum; sed (praeterquam quod alterius plane generis occupationibus distinguor, quae vix quicquam tale sperare patiuntur) excitavit me Newtonianum opus, ut haec qualiacunque extare paterer, quo magis collatione rationum excussae emicent scintillae veritatis, et ingeniosissimi viri acumine adjuvemur.

VIII.

GENERALIA DE NATURA LINEARUM, ANGULOQUE CONTACTUS ET OSCULI, PROVOLUTIONIBUS, ALIISQUE COGNATIS, ET EORUM USIBUS NONNULLIS.

Cum nihil mihi sit gratius quam qualiacunque tentamina mea Viris egregiis digna videri quae perficiantur, perplacuere quae clarissimus Basileensium Professor Bernoullius de linearum osculis nupero Martio in Actis Erud. publicavit*). Cumque animadverterem cogitationes quidem nostras in summa ipsi probari, nonnulla tamen aliter constituenda judicari, quod adeo non aegre fero, ut quoties doceor, in lucro ponam; meum esse putavi, rem denuo examinare paratissimo ad retractandum animo, si monitis contrariis doctissimi viri locum dari posse deprehendissem.

Statueram ego, contactum continere duas intersectiones coincidentes, osculum continere plures contactus coincidentes, et osculum quidem primi gradus esse, quando coincidunt contactus duo seu intersectiones quatuor, osculum secundi gradus, quando coincidunt intersectiones sex aut contactus tres etc., et circulum osculantem sive maximum aut minimum tangentium intra vel extra in proposito puncto circulorum (qui scilicet omnium tangentium proxime ad curvam accedit) esse curvedinis mensuram

---

*) Leibniz bezieht sich hier auf die Abhandlung von Jac. Bernoulli: Additamentum ad solutionem curvae causticae Fratris Joannis Bernoulli, una cum meditatione de Natura Evolutarum et variis osculationum generibus.

et definire quantitatem anguli contactus, ita ut angulus contactus duarum linearum se tangentium sit idem qui circulorum ibi eas osculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis secare potest, altiora etiam oscula posse oriri, cum omnes intersectiones in unum coalescunt, atque ita aliquando in casu maximae vel minimae curvedinis seu transitus a curvedine crescente ad decrescentem vel contra coincidere oscula duo seu contactus quatuor, intersectiones octo. Observavi etiam postea centrum circuli curvam propositam osculantis semper cadere in lineam, quae evolutione fili propositam generare potest, et unicam (suae seriei) esse perpendicularem illam, quae ex centro osculantis circuli ad lineam duci possit, sive unicam esse unicam, hoc est unicam esse maximam vel minimam ex eodem puncto ad curvam educibilem, cum ex aliis punctis intra curvam plures et duae saltem perpendiculares, id est in sua serie maximae vel minimae seu duae suae seriei unicae ad curvam duci possint. Et cum constet aliam atque aliam lineam evolutione describi, prout filum producitur longius, animadverteram olim (ut hoc obiter dicam) eas quas Dn. Bernoullius nuper vocavit condescriptas esse parallelas inter se, ita ut una sit ab alia ubique aequidistans (seu aequalis ubique minimi intervalli, quod est recta minima ab una ad aliam ducenda) vel ut recta perpendicularis ad unam sit alteri quoque perpendicularis, quae dudum mihi fuit definitio parallelismi in genere sumti. Hanc nostram curvedinis mensuram, usumque Evolutarum, etiam primo Evolutionum Inventori celeberrimo Hugenio placuisse, ex solutione catenariae lineae animadverti. Porro cum tres intersectiones circuli et curvae coincidant, notavi flexum oriri contrarium, id est contactum sumtum cum intersectione, quemadmodum et coincidentes intersectiones quinque dant contactum cum flexu contrario coalescentem seu intersectionem cum osculo primi gradus, et intersectiones septem coincidentes dant flexum contrarium cum simplici osculo seu osculum secundi gradus cum intersectione coalescens. Unde intelligitur, quotcunque intersectiones coincidentes in contactus, oscula aut flexus contrarios resolvi posse. Et quidem in contactu vero atque osculo recta vel circulus lineam ab utraque parte tangit extrorsum vel ab utraque parte introrsum, sed in flexu contrario unam partem tangit extrorsum, alteram introrsum, et ita compositum non tangit, sed secat.

Causam quoque cur linea evolutione generans locus sit centrorum omnium circulorum lineam propositam osculantium, ita ex-

plicare mihi videbar: Sumantur duo puncta curvae A et B, et ducantur rectae ad curvam perpendiculares in A et in B, earum intersectio communis C dabit centrum circuli, qui radio CA descriptus tanget curvam in A, radio vero CB descriptus tanget eam in B, sed si coincidant A et B sive inassignabiliter distent, hoc est ubi duae perpendiculares concurrunt, coincidunt duo contactus duoque circuli tangentes abeunt in unum, qui curvam osculabitur; sed per hunc ipsum concursum perpendicularium inassignabiliter differentium inveniuntur et lineae evolutione generantes, ut ex Hugeniano de Pendulis opere patet. Porro circulus, cujus centrum est in recta arcui ad easdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per punctum occursus descriptus arcum non secat, sed tangit. Itaque sicubi secat, necesse est ibi punctum adesse flexus contrarii, seu non esse lineam ad easdem partes cavam. Recte autem animadvertit Dn. Bernoullius, intersectione simplici ad contactum simplicem vel ad osculum seu contactum multiplicem accedente, contactum mutari in sectionem; sed hinc manifestum est, cum circulus curvam osculatur, regulariter (id est excepto flexus contrarii puncto) coincidere quatuor intersectiones seu duos contactus, adeoque hanc ipsam esse naturam osculi primi gradus, quandoquidem id osculum definimus ordinaria osculatione circulorum, quae in quocunque curvae puncto regulariter locum habere potest, seu circulo curvedinem mensurante, qui scilicet proxime ad curvam accedit.

Et in universum dici potest, intersectionum circuli cum alia linea numerum regulariter esse parem. Itaque non video, quomodo primi gradus osculum tribus intersectionibus explicari queat, ita scilicet ut tale osculum trium radicum sit regulare, et tota curva diffusum, at osculum quatuor radicum seu quatuor coalescentium intersectionum pro secundo et singulari habeatur, nec nisi in punctis curvae determinatis contingat. Contra enim se res habet, et quatuor intersectiones seu duo contactus osculo cuique regulariter insunt, et in solo casu extremo, qui est flexus contrarii, nascens, ut ita dicam, vel moriens osculatio tribus intersectionibus contenta est. Unde nolui ex casu trium intersectionum peculiarem osculi gradum facere, cum praesertim ex contactu (cujus perfectior species osculum est) in intersectionem degeneraret. Eademque ratione et in altioribus osculatio sua natura paris est numeri radicum, nec nisi in flexus contrarii puncto in numerum imparem abit. Et sane cum circulus post contactum in puncto proposito curvam

adhuc in duobus praeterea punctis secat, necesse est has intersectiones promoto circuli centro continue ad dictum contactum appropinquantes, tandem ambas simul contactui coalescere, nam cum quamlibet in eum pervenire necesse sit, ideo si alterutra sola ad contactum perveniente, circulus fiat proximus curvae seu oscularis, sequitur ambabus intersectionibus separatim pervenientibus ad coalitionem cum contactu proposito, duos dari circulos diversos lineae proximos, seu osculantes per idem ejus punctum propositum transeuntes, quod est impossibile, nisi scilicet linea ibi secet semet ipsam, quo casu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi duo revera lineas duas osculantur, licet unius partes, de quo hic non agitur. Facile etiam hinc intelligitur, si circulus post contactum internum secare curvam rursus (utrinque) possit, tunc in casu osculi (ubi duae sectiones contactui coalescunt) circulum osculantem esse extra curvam; et contra ex contactu externo mox in casu coalescendi cum duabus reliquis sectionibus fieri osculum internum, et ita transitum circuli, a contactu sectionem adjunctam habente ad osculum, esse transitum in oppositam curvae partem.

Sed, et hoc notandum est, minimam curvedinem et maximam obtusitatem esse in puncto flexus contrarii, et recte dixit Dn. Bernoullius, circulum osculantem eo casu degenerare in rectam; radius enim est infinitus, seu centrum cadit in lineae evolutae concursum cum sua asymptoto, quoniam antequam duae proximae ad curvam perpendiculares sibi occurrentes hactenus ad plagam propositam fiant sibi occurrentes ad plagam oppositam, seu ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelae, quo casu earum concursus infinite abesse debet. Fieri tamen et aliunde potest, ut lineae generatae curvedo sit minima seu maxima obtusitas, non quidem absolute, sed in toto aliquo arcu ad easdem partes cavo, seu in certa progressione, cum scilicet talis est natura curvae per sui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum punctum, et filum generans ulterius extendi nequeat, uti contingit cum curva evolvenda ex duabus convexitates sibi obvertentibus ac sese tangentibus composita est. Eodem modo prodibit maxima curvedo seu minima obtusitas, ut lineae curvedo ex crescente rursus incipiat fieri decrescens, veluti si curva generanda non intra duos arcus generantes convexitate obversa se tangentes, sed extra earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per continuam fili evolutionem producitur.

Haec autem ut notarem, eo facilius adductus sum, quod linearum naturam in universum illustrant, mihique proferunt non tantum ad finiendam illam celebrem de angulo contactus controversiam, sed et a vaga logomachia ad usus solidos ac profuturos transferendam, et video nuper Dn. Eisenschmid dissertationem suam contra Dn. Lagnium defendentem ac de diametro umbrae in eclipsi Lunae loquentem ex hypothesi terrae ovalis, adhibuisse diametrum circuli qui ovalem osculatur seu cum ea angulum osculi (angulorum contactus minimum) facit atque ita quam proximè ad illam accedit, eo consilio, ut ex diversis proportionibus diametri umbrae ad diametrum lunae definiatur vera figura globi terrae. Quod quantum praestare possit, observationibus committo.

Cum haec scripsissem, venere in manus meas Acta mensis Maji, in quibus nova quaedam Bernoulliana legi,*) et lineae illius, cum qua rectae convergentes ad datum punctum eundem constantem angulum (sed obliquum) faciunt, proprietatem elegantissimam ibi detectam, non sine voluptate observavi, aliaque video notata, quae generalem curvarum naturam illustrant. Plurimum igitur linearum doctrinam hodie promotam habemus tum explicata flexus natura, tum adhibitis ad earum generationem provolutionibus pariter atque evolutionibus. Interiorem naturam flexus seu curvitatis aperuisse nonnihil visus sum detecta mensura anguli contactus, ope scilicet circuli curvam osculantis seu maxime ad eam accedentis eundemque cum ea in puncto osculi flexum habentis, de quo tum antea tum etiam hoc loco dictum est.

Quod ad provolutionem attinet, Galilaeus ut arbitror primus de lineis per eam generatis cogitavit, et simplicissimam ex iis cycloeidem, quam clavus rotae in plano incedentis describet in aëre, considerare coepit, de qua multa a viris doctis sunt demonstrata. Romerus Danus, astrorum imprimis scientia clarus, cum in observatorio Regio Parisino versaretur, elegantes ut audiri proprietates detexit cycloeidis altioris, cum rota scilicet sive circulus incedit super circulo, de quo tamen nihil ad me perve-

---

*) Lineae cycloidales, evolutae, ant-evolutae, causticae, anti-causticae, peri-causticae. Earum usus et simplex relatio ad se invicem. Spira mirabilis. Aliaque. Per Jac. Bernoulli. Act. Erudit. Lips. 16[illegible]

nit. Newtonus nuper de cycloeidibus iisdem egregia et universalia dedit.

Evolutionem curvarum generatricem primus illustravit Hugenius. Eam cogitationem promovit Tschirnhusius, adhibitis (ut ego appellare soleo) coëvolutionibus, animadversoque quomodo tales lineae coëvolutae ut foci spectari possint et radiorum quoque concursu generentur, considerata inprimis caustica, quae formatur radiis parallelis a speculo reflexis. Ego inde longius progressus sum, usumque reperi ad solvenda problemata (quorum in gratia potissimum suscipitur speculatio) lineasque opticas inveniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum convergentes vel divergentes aut etiam inter se paralleli, quod alia etiam ratione praestitere Newtonus in Principiis, Hugenius in libro de Lumine. Observavi quoque eadem opera dari figuras Acamptas, quae etsi opacae et politae sint, radios tamen non reflectunt, et Aclastas, quae licet sint transparentes seu ex materia radios refringente, vi formae tamen suae et positionis ad Solem radios sine refractione transmittunt. His nunc observationes singulares Bernoullius adjecit. Caeterum ab Hugenio in tractatu de Lumine et Tschirnhusio in Actis notatum est, causticam illam a speculo concavo sphaerico radios solares reflectente formatam simul esse cycloeidalem, provolutione circuli super circulo generatam. Postremo a me nuper proposita est nova linearum formatio per concursum curvarum ordinatim datarum, cum antea tantum radiorum seu rectarum concursus adhiberentur, cujus formationis ad problemata quaedam solvenda egregium usum comperi.

Eximia quaedam inesse videntur illis, quae de figura veli a vento tensi Cl. Bernoullius nuper disseruit*), tametsi de tota re (in qua non desunt scrupuli) ob molem aliorum negotiorum non expensa pronuntiare non ausim. Ex reperta a me mensuratione loxodromiarum per logarithmos equidem non parum practici fructus duci potest, difficilem tamen arbitror cursus aestimationem, quae longitudinibus definiendis sufficiat. Cum de deviatione navis Geometrica acribia agitur, non velorum tantum, sed et navis

*) Jac. Bernoulli Curvatura veli. Act. Erudit. Lips. an. 1692 Maj.

spectanda esset figura. Denique quod innuit, se fratremque in calculo meo plurimum profecisse, id agnosco gratulorque non illis magis quam mihi. Valde autem nosse velim, an ultra metas illas sint provecti, ad quas ego perveni; id si ab ullis, certe ab ipsorum ingenio aliquando expecto, et gaudebo plurimum si intellexero, praesertim cum mihi vix amplius in talibus ea qua prius intentione animi versari liceat. Caeterum a me quoque non difficulter solvitur illud problema: invenire lineam, cujus arcu aequabiliter crescente elementa elementorum, quae habent abscissae, sint proportionalia cubis incrementorum vel elementorum quae habent ordinatae, quod in catenaria seu funiculari succedere verissimum est. Sed quoniam id jam a Bernoulliis est notatum, adjiciam, si pro cubis elementorum ordinatarum adhibeantur quadrata, quaesitam lineam fore logarithmicam; si vero ipsa simplicia ordinatarum elementa sint proportionalia elementis elementorum seu differentiis secundis abscissarum, inveni lineam quaesitam esse circulum ipsum.

IX.

DE NOVO USU CENTRI GRAVITATIS AD DIMENSIONES ET SPECIATIM PRO AREIS INTER CURVAS PARALLELAS DESCRIPTAS SEU RECTANGULIS CURVILINEIS, UBI ET DE PARALLELIS IN UNIVERSUM.

Pappus subindicaverat, quod Guldinus expressius ostendit, aream motu debito generatam aequari facto ex ductu mobilis generantis in viam ejus centri gravitatis. Hac regula potissimum usi sunt Geometrae in motu rotationis circa certum quendam axem pro metiendis solidis ac superficiebus quae sic generantur. Sed non minus succedit negotium, si axis vel centrum continue mutetur durante motu generantis, ut fit in evolutionibus curvarum et superficierum. Itaque si curva AB (fig. 85) ope fili DAB evolvatur, tunc pars fili, id est initio recta DA, describet aream DA(A)(D) vel brevius designando D(A), duabus curvis parallelis condescriptis D(D) et A(A) comprehensam, quae aequabitur rectangulo sub recta

AD et recta aequali curvae E(E) (iisdem parallelae) a centro seu puncto rectae AD medio E descriptae. Quin amplius, etiamsi pars ipsius mobilis successive quiescat et moveatur, tamen productum ex toto in viam centri gravitatis totius, areae generatae aequatur, quod et hic locum habet. Nempe totius fili DAB centrum gravitatis sit G in statu primo, et (G) in statu seu situ ultimo, cum filum totum in rectam B(D) abiit. Sit linea G(G) locus continuus hujus centri, dico B(D) filum in G(G) aequari DAB(D)D. Horum ut recordarer, fecit elegans theorema Dn. Joh. Bernoullii, qui notavit, duorum arcuum evolutione condescriptorum ut D(D) et A(A) differentiam si convexitatem vertant ad easdem partes, summam si ad contrarias aequari arcui AH sectoris circularis intercepti inter duos radios DA, DH aequales filo vel regulae extremis suis punctis binos illos arcus describenti, et parallelos ipsis DA et (D)(A) extremis sitibus fili. Videantur Acta Augusti 1695. His cum meo theoremate conjunctis, sequitur differentiam (vel collatis oppositis evolutionibus summam) duorum (ut sic dicam) rectangulorum (bicurvilineorum) condescriptorum velut D(K) et L(A), modo sint aequialta (nempe si DK = LA), posse mensurari ope dimensionis circuli. Nam collocetur ipsi DK vel LA aequalis MN in recta DA, medio loco inter D et A, et describantur simul parallelae M(M) et N(N). Jam DL=KA, et DL in M(M)=D(L), et KA in N(N)=K(A). Ergo D(L) - K(A) id est D(K)—L(A)=DL in M(M)—N(N)=DL in NP, posito NP esse arcum circularem centro M dicto modo descriptum, scilicet ut sit MP parallela et aequalis ipsi (M)(N). Unum adhuc addam: Quae de parallelis nostro more, id est generaliter acceptis diximus, tam universalia esse, ut non tantum parallelis evolutione descriptis, sed et rectis ac circularibus quadrant, licet in circularibus linea evolvenda evanescat in punctum, et pro rectis hoc punctum concipiendum sit infinite remotum. Generaliter autem p a r a l l e l a s definio (lineas vel superficies), quarum intervalla (minima scilicet) ubique sunt aequalia. Et cum r e c t a n g u l u m (late sumtum) figura sit, quae solos angulos rectos habet, consequens est, figuram hic inter duas parallelas earumque intervalla extrema (minima) contentam ut D(K) merito rectangulum appellari. Caeterum ut hoc quoque adjiciam: D a t a e l i n e a e (curvae vel rectae) p a r a l l e l a m d u c e r e l i n e a m, problema est, quod etiam sine evolutione construi potest. Nempe ducatur recta perpendicularis ad lineam datam, et ex puncto ejus aliquo tanquam centro ac per-

tingente ab eo ad curvam perpendiculari tanquam radio, describatur circulus lineam datam tangens, qui si volvatur super ipsa, describet centro suo lineam datae parallelam. In eo tamen praestat evolutio, quod ejus ope duci potest parallela datae per punctum datum. Tantum enim opus est ex hoc puncto duci tangentem ad generatricem datae, quae simul et generatrix erit quaesitae, tangente ducta partem fili faciente.

X.

DE LINEAE SUPER LINEA INCESSU, EJUSQUE TRIBUS SPECIEBUS, MOTU RADENTE, MOTU PROVOLUTIONIS, ET COMPOSITO EX AMBOBUS.

Linea ad lineam incedit, si illa spectata ut mota, hac ut quiescente, altera alteram durante motu contingat, et quiescens dicitur basis.

Si linea eodem modo semper puncto suo super alia incedat, non nisi radere ipsam dicitur, velut si super linea ABCD (fig. 86) incedat linea LMN, puncto M in basi ABCD persistente. Abradet enim eminentiolas, si quae ponuntur basi adhaerere; cum alias linea, quae continue suum mutat punctum contactus, adeoque provolvitur, eatenus non tam abradat has eminentiolas, quam deprimat; et cum linea super linea tantum provolvitur, dici potest alteram ab altera lambi.

Si linea radens angulum LMC vel NMB ad basin ABC faciat assignabilem, fieri potest ut inter radendum circa punctum radens M tanquam centrum titubet, adeoque non incedat sibi parallela, veluti si LMN situ ad priorem parallelo emota ponatur inter procedendum, punctum tamen M in basi remaneat.

Sed si linea radens KLMNP angulum nullum assignabilem faciat ad basin ABCD, id est si ambo polygona constituant curvas in puncto M radente se mutuo contingentes neque plus quam unam in puncto contactus rectam tangentem habentes, necesse est lineam radentem suis vestigiis ubique parallelam incedere. Ponamus

enim punctum radens esse M, in quo basis pars BC tangatur. Et quoniam ambae lineae ABC et LMN sunt curvae, quae se mutuo tangunt, habebunt etiam eandem rectam tangentem, eamque ex hypothesi unicam, quae adeo ad curvam angulum assignabilem non faciet. Itaque et curvae ad se invicem angulum assignabilem non constituent. Hinc vero sequitur, curvam KLMN puncto eodem M per basin ABC incedentem non posse nutare seu angulum inter ambas curvas factum assignabilem variare, adeoque nec angulos earundem plani lineae mobilis rectarum in alium locum transeuntium, quibus immotam FGH respiciebant, hac translatione assignabiliter diversos fieri ab iis, qui fuere in priore situ. Sit enim in plano curvae radentis, quod una cum ipsa moveatur, punctum J, et jungatur recta JK; dico, hanc sibi manere parallelam durante motu. Assumatur enim immobilis recta HG in plano immobili, per quod ipsum planum mobile semper incedat. Producta recta KJ usque dum ipsi HG (productae, si opus) occurrat in F, dico si motus sit radens, angulum HFK non posse variari, licet KLMP aliorsum transferatur. Nam curvas rursus concipiamus ut Polygona, immobile ABCD, mobile KLMP. Cum ergo totum KLMP rigidum censeri possit, non potest nutare, seu rotari circa M, nisi alius fiat angulus LMC. Sed cum is sit infinite parvus, non sufficiet ad assignabilem nutationem, ut LM sese convertens circa M applicetur ad CB, sed ulteriori rotatione opus erit. Ita vero si ponas amplius nutare lineam radentem, necesse est ut punctum M erigatur a basi, punctis L et K successive ad basin depressis, quibus et successive tanquam sustentantibus centris innitetur radens linea, ac circa ea gyrabit, cum tamen supposuerimus, punctum M continue basi manere applicatum. Idem est, si rotatio fieri ponatur in contrariam partem, ut non L, sed N ad basin deprimatur. Utroque igitur modo angulus LMC vel NMB assignabiliter mutari nequit, quantumcunque duret motus, modo punctum M semper in basi manere debeat, adeoque non recta KJ ipsi lineae radenti rigide connexa seu cum ea mobilis ad rectam HG (ipsi immobili lineae ABCD rigide connectibilem seu cum ea immobilem) angulum KFH assignabiliter variare potest.

Hactenus de motu radente potissimum diximus. Sed si iisdem positis curva KLM super curva BCD velut basi ea lege incedat, ut punctum M dictam lineam KLM sustentans (seu quo ea basin tangit) non idem incedat per plura baseos puncta, sed mu-

tetur, alio continue puncto curvae mobilis ad illud punctum basis, parsque, alia parte mobilis ad aliam partem basis applicata; necesse est ut curva KLM rotetur circa punctum sustentans M, donec aliud, nempe L, basin attingat. Ita hoc jam erit punctum sustentans novum, super quo facta gyratione prius M a basi elevabitur in alteram partem. Hoc motu continuato dicetur curva super basi nonnisi provolvi, dicetur etiam altera alteram lambere, et tunc continget partes baseos ac partes mobilis curvae, quae provolutione jam defunctae sunt, inter se aequari; pars enim parti, latus polygoni lateri alterius polygoni congruit, nec una pars unius plusquam uni alterius congruenter applicatur. Insuper si punctum aliquod constans, exempli gratia, curvae provolutae in eodem plano annexum ponatur, illud describet Trochoidem J(J), cui normalis erit recta MJ a puncto sustentante ad punctum describens ducta. De quo motus genere jam multa apud Geometras habentur, potissimaeque ejus species sunt, quae dant lineas Cycloidales et Epicycloidales.

Denique curva mobilis KLM super basi BCD incedere potest motu composito ex radente et provolvente, si dum M procedit in BC versus D, simul LMN mutet et gyretur circa M, donec L attingat BCD et loco ipsius M subeat puncti sustentantis vicem, et mox itidem (ut prius fecerat M) simul et procedat in basi et tamen centrum sit gyrationis curvae KLM, per quam nunc M a basi elevetur. Et ratio inter celeritates gyrationis et motus radentis seu paralleli determinabit speciem hujus incessus, in quo nec motus est parallelus, ut in puro radente, neque arcus baseos et curvae mobilis contactu defuncti inter se sunt aequales, ut in puro provolvente: nam quantitas motus radentis incessui huic immisti est longitudo, qua arcus curvae incedentis deficit ab arcu baseos percurso. Punctum autem constans in plano curvae mobilis designatum ut J non jam Trochoidem describet, sed lineam factam compositione ex motu parallelo seu aequali cum motu radente puncti sustentantis (qui motus toti plano mobili communis est) et ex proprio motu gyrationis, quem exercet punctum describens J circa punctum sustentans, qui motus nonnisi eis plani punctis communis est, quae tantundem a puncto sustentante absunt.

Hic motus plerumque a rotis exercetur, cum simul trahuntur et volvuntur, quod fit praesertim cum axis non satis est lubricatus, quae causa est aliquando, ut pene tanta sit difficultas in

gyrando, quanta in procedendo: unde etiam rotae non sunt fidum satis medium longitudinem itineris suis conversionibus mensurandi. Ideoque etiam si quis puram provolutionem desideret, id est si quis Cycloidem accurrate describere velit, vel Epicycloidem (cum circulus super circulo volvitur) vel etiam Trochoidem, aliam quamcunque, non sufficit rotam libere incedere, sed necesse est filum vel catenulam rotae circumdari, quae inter provolvendum evolvatur et extensa remaneat in basi, veluti si rotae pars TV (fig. 87) provoluta per QR ibi reliquerit funis QRX partem QR, dum pars RX adhuc rotae sit affixa, continuata vero provolutione similiter applicari debeat dicta pars RX basi reliquae RS.

Porro curva, quae basin nonnisi radit adeoque vestigiis suis parallela incedit, singulis punctis plani sui mobilis describet lineas basi similes et aequales seu congruentes. Nam (fig. 88) rectae ${}_1N_2N$, ${}_2N_3N$ respective parallelae et aequales sunt ipsis ${}_1M_2M$, ${}_2M_3M$, id est rectis AB, BC, idemque est de motu puncti L, quod de motu punctorum M et N. Et si quis agnoscat, quaevis plani mobilis puncta ut L et N describere lineas congruas inter se, idem ei dicendum erit de puncto sustentante M, nempe describere lineas prioribus congruas, cum qunctum N ipsi inassignabiliter vicinum assumi possit, adeoque in ipsum tandem incidere intelligatur. Quia autem M describit basin, utique lineae a punctis L et M descriptae basi congruent.

Mechanice efficiemus, ut curva in basi non incedat nisi radente motu, si ex puncto J (fig. 86) recta $J\lambda$ educta sit, quae ipsi HG normaliter occurrat ad β, crassitie ipsius rectae materialis HGF cadente infra planum paginae et crassitie ipsius $J\lambda$ cadente supra, et praeterea ex recta rigida $J\lambda$ exeat normaliter alia recta rigida seu regula $\beta\alpha$, cadens semper inter ipsas rigidas immobiles GH, $\gamma\mu$ inter se parallelas, per $H\gamma$ connexas nec magis invicem remotas quam ut $\beta\alpha$ exacte inter eas labi seu ultro citrove ire possit. Ponamus regulam $\beta\alpha$, servato angulo recto, posse ascendere et descendere in ipsa $J\lambda$. Ita $\beta\alpha$ libertatem habebit duplicis motus, unius horizontalis (si placet) quo incedit secundum ipsam GH, alterius verticalis quo prorsum et retrorsum ire potest in recta $J\lambda$. Cum ergo recta $\alpha\beta$ maneat semper sibi in directum, et recta $J\lambda$ sit semper ei normalis, utique recta $J\lambda$ semper suis vestigiis parallela erit, adeoque et curva KLMN motu parallelo movebitur, dumque interim semper applicatur basi, radet eam eodem

semper puncto M. Si basis esset circulus, figura super basi incedens radendo moveretur eo motu, quem Hobbius olim vocavit circularem simplicem et de quo quaedam ingeniose jam tum observavit in Elementis de Corpore et in Problematibus, et inter alia, quod dum quaelibet recta in plano sic moto designata manet suis vestigiis parallela, necessario durante motu quaevis puncta plani describant lineas inter se aequales et similes. Sed nos addimus, eundem esse hunc motum cum motu curvae aliam uno puncto suo radentis.

Caeterum sive motus sit pure radens, sive pure provolutorius, sive ex utroque compositus, nihil refert utrum sit obradens an subradens, obvolutorius an subvolutorius, id est utrum curva mobilis convexam an concavam faciem curvae immobilis radat vel lambat. Convexa autem facies curvae ab alterius curvae convexa, et concava, sed concava et recta non nisi a convexa tangi potest, adeoque et radi vel lambi.

Porro notandum est, motum evolutionis, quem excogitavit Hugenius, et motum coevolutionis, quem addidit Dn. de T.*) et cujus utilitates ad construenda optica et alia problemata ego primus ostendi, esse casus speciales motus purae provolutionis. Nam idem est ac si ponas rectam rigidam super basi volvi simulque filo affixo regi, ne radere possit basin. Ponamus (fig. 87) filum QRX extremo quidem X curvae TVX affixum esse, extremo autem Q rectae QRS seu regulae WQRS; curvam autem (contra quam ante) esse basin immobilem, supra qua incedat recta rigida seu regula WQRS. Haec primum in situ (W)(Q)(R)(S) posita tangat basin in puncto X, in quo incidit (S), filo toto adhuc existente in regula, quae deinde volvatur super basi curvilinea XVT, per arcum ejus XV, donec puncto suo R eam tangat in puncto ejus V, relicta parte fili XR in dicto basis arcu XV, reliqua fili parte RQ manente in regula QS. His positis manifestum est, dum regula super basi circulari provolvitur, simul huic ipsi basi obvolvi filum, eumque motum obvolutionis esse tantum contrarium motui evolutionis, et punctum in regula sumtum ut hac provolutione regulae vel obvolutione fili describere curvam W(W): quae eadem curva etiam per evolutionem describetur, dum

*) Tschirnhaus.

(remota regula vel manente, ut lubet) filum WQ continuo tensum et curvam VS tangens, ita movetur, ut portio ejus RX a curva VX devolvatur. Pro motu autem coevolutionis simili ratione repraesentando opus est duas regulas rigidas filum inter se partiri, ita tamen ut de una in aliam transire possit, sed ope styli ad ambas regulas in puncto, ubi se secant, implicitum teneatur. Et quamvis duae rigidae rectae se proprie secare (sua nempe crassitie) non possunt, aequivalens tamen effici potest, dum una sub alia transit, et superioris ima, inferioris summa recta pro ipsa regula rigida assumuntur, filumque semper ad duarum istarum rectarum intersectionem stylo applicitum tenetur.

Postremo, quotiescunque una eademque linea rigida movetur in eodem plano, diversisque suis sitibus tanquam totidem curvis concurrentibus intelligitur formare novam curvam omnes illos situs tangentem, perinde est ac si curva rigida mobilis incedat super ea, quam suorum situum concursibus format, tanquam basi, motusque erit modo pure radens, modo pure provolvens, modo denique, ut plerumque fit, compositus prout conditiones a nobis praescriptae observabuntur.

Si fingeretur (fig. 86) curva mobilis KLMN dentibus intercisa, basi vero esset obvoluta fili loco catena, cujus articuli dentibus responderent, ita ut inter volvendum dentes articulis insererentur, catenula solo motu radente volutioni admisto propelleretur, vel potius traheretur in basi: quod etsi ad Mechanismum accuratum non sit aptum, inservit tamen ad distinctionem motus radentis et provolutorii melius intelligendam. Pars enim baseos, quam extremitas catenulae protractae percurrere intelligitur, detracta a toto arcu baseos, dabit arcum baseos, arcui curvae mobilis incessu jam defuncto aequalem, modo ab extremo catenae inceperit incessus. Haec dudum meditata ut ederemus, occasio invitavit.

XI.

ADDITIO G. G. L. OSTENDENS EXPLANATIONEM SUPERFICIEI CONOIDALIS CUJUSCUNQUE, ET SPECIATIM EXPLANATIONEM SUPERFICIEI CONI SCALENI, ITA UT IPSI VEL EJUS PORTIONI CUICUNQUE EXHIBEATUR RECTANGULUM AEQUALE, INTERVENTU EXTENSIONIS IN RECTAM CURVAE, PER GEOMETRIAM ORDINARIAM CONSTRUENDAE. *)

Superficies Coni recti jam ab Archimede explanata est, et aequalis ei circulus assignatus. Coni Scaleni superficiem Veteres, quod constet, non attigere. Aegidius Robervallius me juvene ajebat, ejus explanationem sibi esse notam, sed qualem habuerit non dixit, nihilque ea de re inter ejus schedas repertum accepi. Equidem hodie ad eum modum, quo processum est in Schediasmate praecedenti, possumus facile dare figuras planas easque per Geometriam ordinariam construendas, non tantum quae aequentur superficiebus coni Scaleni, sed etiam cujusque Conoeidis generati recta BH (fig. 89) per punctum B constans in sublimi transeunte et circumlata per curvam quamcunque H(H) in plano subjecto AHC positam. Nam cum BC sit normalis ad planum subjectum, adeoque ad rectam AC, quae sit directrix ipsarum HG normaliter applicatarum ex curva Hh et ipsi AC occurrentium in G, patet $BC = \sqrt{(BC.BC + GC.GC)}$ fore normalem ad HG, atque adeo BH fore $\sqrt{(BG.BG + GH.GH)}$. Datur autem GH ex AG per naturam curvae, et BC, AC sunt datae, et CG est summa vel differentia ipsarum CA, AG ; habetur ergo et BH ex AG. Ergo et ratio datur incrementi momentanei seu elementi ipsarum BH, nempe ipsius Hk (si ponatur ex h demissa in BH normalis hk) ad HV elementum ipsarum AG. Quodsi jam quadratum ipsius Hk detrahatur a quadrato ipsius Hh elementi arcus curvae, supererit quadratum

*) Vorstehendes schrieb Leibniz als Zusatz zu der Abhandlung Varignon's: Schediasma de dimensione superficiei coni ad basin circularem obliqui ope longitudinis curvae, cujus constructio a sola circuli quadratura pendet, welche in Miscell. Berolinens. Tom. III. zugleich mit diesem Zusatz abgedruckt ist.

ipsius hk, cujus rectae adeo etiam dabitur ratio ad HV incrementum ipsius AG, quae ratio vocetur r:a, posita a constante quacunque pro arbitrio semel assumta et r determinata ex AG. Erit ergo hk=(r:a)dAG. Sed dimidium rectanguli ex BH in hk est aequale triangulo BHh, id est elemento superficiei Conoeidis; ergo si recta (r:2a)BH (nempe quae sit ad BH ut r ad 2a) accommodetur ad dAG id est ad Gg, seu sumatur semper in ipsa GH ex G versus H, fiet figura curvilinea, cujus elementum erit (r:2a)BH.dAG idem cum elemento superficiei conoeidis. Itaque ipsius hujus Figurae portio rite sumta aequabitur respondenti superficiei Conoeidis portioni, binis rectis ex puncto in sublimi et arcu basis comprehensae, et proinde quaevis superficies Conoidalis explanari potest, adhibita figura plana ei aequali, per Geometriam ordinariam construenda, si ipsa AHh basis Conoeidis sit figura Geometriae ordinariae.

Sed quia Archimedes Circulum vel Circuli portiones superficiei coni recti vel ejus portionibus aequales exhibuit, Circuli autem vel ejus portionum area vel conversio in figuram rectilineam facillime habetur per extensionem curvae (nempe ipsius arcus circularis) in rectam: hinc a Viro Celeberrimo Petro Varignone quaesitus est inventusque modus elegans paulo ante positus, quo figura plana aequalis superficiei coni scaleni etiam mensurari potest per extensionem curvae alicujus in rectam. Cum vero curva illa quam exhibet non sit ordinaria, sed transcendens, quamvis non nisi tetragonismo Circuli seu rectificatione arcus circularis ad constructionem indigeat, placuit mihi quaerere curvam ordinariam quae idem praestet, seu cujus rectificatione exhibeatur superficiei Coni Scaleni vel ejus portioni cuivis aequalis figura rectilinea. Hoc ita sum consecutus.

Iisdem quae antea positis, a puncto G versus D sumatur GW, quae sit ad AG ut CD ad radium DO, et jungatur BW, quae erit $\sqrt{(ccrr-2rfgx+ffxx)}:r$.*) Pono autem A esse extremum diametri AD remotius a B. Ex puncto H ad rectam AC ducatur HJ, ita ut ex O ducta ad HJ normalis $O\psi$ sit ad HO radium ut dimidia BW ad rectam constantem, quae sit major dimidia BA; et recta HJ ipsam $O\varphi$ ex centro O perpendiculariter ad CO eductam

---

*) Es ist AB=c, f=OC=r+a, AC=g=2r+a, AG=x gesetzt.

ad partes H secet in φ. Eadem omnia fiant ad puncta h et g, ut ducatur BW, ducatur et hi, quae ipsam $O\varphi$ secet in (φ). Jam ipsis $O\varphi$, $O(\varphi)$ etc. aequales $J\Omega$, $i\omega$ etc. ordinatim applicentur normaliter ad OJ, Oi etc. ut fiat curva $\Omega\omega$, cujus tangens ΩT occurrat ipsi AC in T. Tandem in AC ex J sumatur JX ad partes ad quas convergunt JH, ih, quae JX sit ad JO ut TJ ad TO, et ex puncto X quovis, hoc modo reperto, normaliter educta XY, occurrens respondenti rectae positione datae HJ in Y, erit ordinatim applicata curvae novae Y(Y), cujus sub arcu elementari inter puncta Y et (Y) praescripta ratione determinanda intercepto, et sub constante supradicta, non minore quam $\frac{1}{2}$ BA, comprehensum rectangulum aequabitur triangulo BHh, nempe elemento superficiei coni scaleni: atque adeo evolutione seu extensione debita curvae Y(Y) in rectam, filo evoluto ducto in ipsam constantem supradictam, exhibebitur rectangulum aequale ipsi ABDHA superficiei dimidiae coni scaleni vel ejus portioni (rectis scilicet binis ex B et arcu basis comprehensae) cuicunque.



LEIBNIZ

AN DEN

FREIHERRN VON BODENHAUSEN.

[redacted]

Als Leibniz auf seiner italienischen Reise längere Zeit in Florenz verweilte, machte er die Bekanntschaft eines deutschen Edelmanns, des Freiherrn von Bodenhausen, der unter dem Namen eines Abbé Bodenus als Erzieher des Erbprinzen am toskanischen Hofe lebte. Er war ein eifriger Verehrer der mathematischen Wissenschaften, und in Folge dessen entstand sehr schnell eine innige Freundschaft zwischen beiden Männern. Leibniz selbst unterrichtete Bodenhausen in den Elementen der höheren Analysis, und überliess ihm die weitere Redaction des grösseren Werkes, das er über die Dynamik während seines Aufenthalts in Italien ausgearbeitet hatte*). Ohne Zweifel gab dies die nächste Veranlassung zu der Correspondenz zwischen beiden Männern, die bis zu dem Tode Bodenhausen's ununterbrochen fortdauerte. Da letzterer mit unermüdeter Ausdauer in den tieferen Sinn der höheren Analysis einzudringen und namentlich die Lösungen der Probleme zu verstehen suchte, welche Leibniz und seine Freunde vom Jahre 1690 an sich gegenseitig vorlegten und durch die die Ausbildung der höheren Analysis mächtig gefördert wurde, so konnte nicht fehlen, dass Bodenhausen über Zweifel und Schwierigkeiten aller Art bei Leibniz um Auskunft bat. Trotz seiner Vielbeschäftigung kam ihm dieser mit ausführlichen Mittheilungen bereitwilligst entgegen; ich will nur die gründliche Auseinandersetzung über das von Viviani vorgelegte sogenannte Florentinische Problem (problema de templo

*) In Bodenhausen's Papieren, die nach seinem Tode in den Besitz Leibnizens kamen und unter den Manuscripten des letztern auf der königlichen Bibliothek in Hannover aufbewahrt werden, finden sich noch die Blätter, auf welchen Leibniz seinen Freund in den Operationen der Differential- und Integralrechnung unterwies. Auch ist die sorgfältige Reinschrift der Dynamica Leibnizens von Bodenhausen's Hand noch vorhanden.

hemisphaerico quadrifenestrato quadrabili) und über die Lösung des Problems der Kettenlinie hervorheben. Leibniz verlässt hier die knappe Darstellung, die er in der Regel in den von ihm veröffentlichten Abhandlungen beobachtet und durch die er den Gang seiner Behandlung künstlich verhüllt*); in seinen Briefen an Bodenhausen zeichnet er den Weg, auf dem er die Lösung der Aufgabe fand, insofern nach seinem Dafürhalten dieser der geeignetste ist zu einem wahren Verständniss zu gelangen. — Ausserdem sind die Mittheilungen Leibnizens über die Werke, die er herauszugeben gedachte, über seinen Calculus situs, über seine Characteristica, durch die er die Analysis physica weiter zu bringen gedachte, so wie sein Urtheil über die neu erschienenen Schriften von vielfachem Interesse.

Bodenhausen hielt die Briefe Leibnizens wie einen kostbaren Schatz; ihr wissenschaftlicher Inhalt diente ihm als Grundlage und Richtschnur seiner Studien. Er machte davon eine besondere sorgfältige Zusammenstellung, aus welcher das Folgende entnommen ist.

---

*) Diese Eigenthümlichkeit findet sich in fast allen Leibnizischen Abhandlungen; er will in seine Kunstgriffe andere nicht einweihen. Es ist aber guth, schreibt er an Bodenhausen, dass wann man etwas würklich exhibiret, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen.

Invenire figuram Clepsydrae uniformis MCAEF (fig. 90), in qua altitudo aquae AL uniformiter (seu aequalibus temporibus aequaliter) decrescat effluendo per coniformis figurae universae apicem A.

Sit linea ACM ex genere paraboliformium, cujus vertex A et Axis ABL, et ordinatarum BC quadrata sint in subduplicata ratione abscissarum AB seu ordinatae in subquadruplicata abscissarum; et trilineum ALMCA circa axem AL rotatum generabit figuram clepsydrae quaesitae.

Manifestum enim est, ipsis AB altitudinibus aquae aequaliter aequali tempore decrescentibus ipsa decrementa altitudinum aquae esse ut elementa temporis. Jam decrementa aquae sunt in ratione composita elementorum temporis et velocitatum quibus aqua effluit, ergo in ratione composita decrementorum altitudinis et velocitatum. Et eadem decrementa aquae sunt in ratione composita decrementorum altitudinis et summarum aquae superficierum seu circulorum centris B radiis BC descriptorum. Ergo velocitates quibus aqua effluit sunt ut circuli radiis BC descripti seu ut quadrata radiorum BC. Sed velocitates quibus aqua effluit sunt in subduplicata ratione altitudinum aquae AB (per prop. 35 cap. de Causa et Effectu Tract. Dynam.); ergo quadrata ordinatarum BC sunt in subduplicata ratione abscissarum AB, seu ordinatae in subquadruplicata abscissarum.

Analysis. Sit aqua a, altitudo aquae AB, x, ordinata BC, y, tempus t, velocitas v, decrementa et elementa d, erit $\overline{dx}$ ut dt, $\overline{da}$ ut $\overline{dt\,v}$; ergo $\overline{da}$ ut dx v. Jam $\overline{da}$ ut dx yy, ergo v ut yy. Jam v ut $\sqrt{x}$ (per prop. 35), ergo yy ut $\sqrt{x}$ seu y^4 ut x seu y ut $\sqrt{x}$.

Was Dn. Guglielmini in seinen ersten 3. Büchern de Mensura aquarum currentium schreibet, kan in den ströhmen und andern grossen wercken nicht statt haben, wie er selber bekennet, denn das incrementum velocitatis, welches freylich bekandter massen in subduplicata ratione altitudinum descensus sich verhält, wird im fliessen und hinbrütschen des wassers gäntzlich alteriret, und kan nicht appliciret werden, man nehme dann dazu, was ich de Resistentia ambientis angewiesen. Es ist kein Zweifel, dass alle diese Dinge Geometrice zu determiniren und in potestate seyn; wolte Gott dass die physicae rerum causae, als morborum und dergleichen, so leicht auszufinden als motus Aquarum und andere mechanica, da wir die data haben, anstatt dass solche in physicis erst errathen werden müssen. Ich hoffe aber dermahleins mit hülff unser Characteristicae die Analysin physicam auch etwas weiter zu bringen als sie ietzo ist. Und nachdem ich vermeyne Scientiam dynamicam ad leges purae Geometriae nunmehr gebracht zu haben, dass alle casus scientifice entschieden werden können, ope hujus solius principii Metaphysici, quod Causa integra et Effectus plenus sint ejusdem potentiae, so habe ich ursach grössere progressus in physicis zu hoffen; denn es ist wohl zu consideriren, dass nicht müglich die physica zu decidiren, wie ich vorerst vermeynet hatte als ich vor mehr als 20 Jahren meine Theoriam Motus herausgeben, und die leges motus per solam compositionem conatuum herauszubringen vermeynet; ich habe aber hernach befunden, dass solche das obgedachte principium Metaphysicum praesupponiren, und sich also endlich resolviren in sapientiam divinam, welche eandem quantitatem virium, nicht aber (wie Cartesius gemeynet) eandem quantitatem motus conserviret. Welche meditationes meines ermessens fast eben so wichtig seyn als die Scientia dynamica selbsten; und wil ich eins und anders davon entweder per modum praefationis oder per modum dialogi unsern dynamicis beyhefften.

Ich habe ope principiorum Mechanicorum vorlängst etwas curioses und generales in Geometria ausgefunden circa tangentes curvarum per umbilicos datarum. Sint tres umbilici A, B, C (fig. 91) filumque in se rediens AHECBEKA, welches vermittelst des styli E allzeit gespannet und durch herumbführung des styli die linea EE beschrieben wird; quaeritur lineae Tangens.

Centro E, radio quocunque EF describatur circulus secans lineas AE, EB, EC, si opus productas, in punctis F, G, H; horum punctorum F, G, H quaeratur centrum gravitatis commune P (ea tamen cautione, ut punctum F ponatur uno ex reliquis duplo gravius, quia filum EA est duplicatum), et juncta PE erit perpendicularis ad curvam seu ejusdem tangentem. Eademque Methodus valet pro focis seu umbilicis quotcunque.

Hr. Tschirnhaus hat in seinem buch, genandt Medicina Mentis, eine andere aber unrechte Regel, weiss nicht aus was für einem unstern, gegeben, und sich durch special exempel verleiten lassen. Ich habe darauf der sache nachgedacht, und diese wunderliche general Regel per centrum gravitatis ausgefunden. Die erläuterung davon solte nicht übel bey unsern dynamicis als ein Appendix stehen, si tibi ita videtur.

Ich bin bedacht, meinen calculum situs in form zu bringen, weilen wir bissher nur calculum magnitudinis gehabt, und daher unsere Analysis nicht perfecta, sed ab Elementis Geometriae dependens gewesen. Mir aber müssen die Elementa selbst per calculum herauskommen, und gehet gar artlich von statten. Von dieser analysi dependiret alles, was imaginationi distinctae unterworffen.

Ich hoffe ferner gradum ad ea zu promoviren, quae imaginationi non subsunt, ut omnis humana ratio genus quoddam calculi seu characteristicae expressivae accuratae subeat. Et quando ex datis conclusio vel solutio non habetur, debet saltem determinari posse gradus probabilitatis ex datis.

Betreffend expressionem Curvarum Transcendentium per aequationes, ecce specimen in cycloide quod desiderasti:

Sit semicirculus AEH (fig. 92), semicycloeides linea ACK, EC $=$ AE arcui, ut constat. Sit AB, x; BC, y; BE, v; Radius 1; GD, $\overline{dx}$; DL, $\overline{dv}$; GL $=\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dv}^2}$; fit $v=\sqrt{2x-xx}$ et $\overline{dv}=\overline{dx},\ \overline{1-x}:\sqrt{2x-xx}$ ex legibus calculi nostri. Jam arcus Circuli AE seu EC $=\int\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dv}^2}$ et $\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dv}^2}=dx:\sqrt{2x-xx}$; ergo fit AE vel EC aequ. $\int\overline{dx}:\sqrt{2x-xx}$, et BC seu $y=BE+EC$, ergo $y=\sqrt{2x-xx}+\int\overline{dx}:\sqrt{2x-xx}$, quae est

aequatio ad Cycloidem desiderata, unde omnes ejus proprietates deduci possunt, exempli causa Tangentes. Nam fit $\overline{dy} = \overline{dv} + \overline{dx} : \sqrt{2x - xx}$, unde pro $\overline{dv}$ substituendo valorem supra positum fit $dy : dx :: 2 - x : \sqrt{2x - xx}$, seu dy est ad dx sive PF ad FC (posito PC esse perpendicularem curvae) ut $2 - x$, hoc est HB, ad $\sqrt{2x - xx}$ seu ad BE. Et proinde cum HB sit aequ. PF, etiam aequabitur FC ipsi BE, et PC ipsi HE, quod aliunde jam habetur inventum, sed ita calculo quoque analytico obtinetur, perinde ac si de linea vulgaris Geometriae ageretur, cum tamen fassus sit Cartesius suam Tangentium Methodum huc non porrigi.

Hr. Bernoulli*) hat einigen dubiorum circa Schediasma de resistentia solidorum, so denen Actis inseriret, solutionem von mir begehret; ich habe ihm ausführlich geantwortet. Und weil dubitiret werden können, ob die tensiones chordarum oder fibrarum seyen ut vires tendentes (welche hypothesis nicht allerdings gewiss), so habe ich ihm gewiesen, quod notandum, dass solche proportion möge seyn wie sie wolle, dennoch die resistentiae der rectarum AB (fig. 93) seyen in duplicata ipsarum rectarum ratione; daher meine demonstrationes de figuris aequiresistentibus doch wahr bleiben. Habe ihm auch erkläret, wie die figura aequiresistens beschaffen seyn müsse, wenn sie nicht nur proprio, sed et simul alieno ponderi incumbenti ubique aequaliter resistiren soll, welches ich in meinem damahligen Schediasmate übergangen, und er nicht wohl finden können, weil es auch auf analysin extraordinariam ankommt. Galilaeus hat zwar auch de resistentibus figuris gehandelt, aber alio sensu und abstrahendo ab ipsarum pondere proprio, auf welchen fall die sache gantz leicht, und nur ein problema ist analyseos ordinariae.

Was die lineam Catenariam anlanget, so habe ich in des P. Pardies Traité des forces mouvantes nachgeschlagen, befinde dass seine suppositiones recht, auch sonsten bekandt, nemblich von n. 72 biss 75 inclusive. Er sagt aber nur dass die linea keine

---

*) Jacob Bernoulli.

parabola sey; alleine was es für eine seyn müsse, sagt er (deucht mich) nicht, sondern kommt auf eine andere supposition, wenn die chorda des ponderis expers consideriret wird und gewisse pondera oder forces darauf appliciret werden. Videatur n. 76. seqq. Und wenn er n. 81 sagt: les cordes tendues sont effectivement courbées en hyperboles, so redet er abermahls nicht von unserem casu, sondern von einem andern, wenn nehmlich die chorda sich dehnet, quand les cordes se courbent en se rallongeant, welches gantz eine newe und mehr componirte frage gibt, da ich sehr zweiffele ob die Hyperbola statt habe; ich supponire hingegen, dass der faden oder vielmehr die Kette ihre länge behalte.

Joachimus Jungius, so einer der besten Analyticorum und Philosophorum nostri seculi gewesen, und noch ante Cartesium viel herrliche gedancken gehabt, hat sich über das Problema sehr bemühet, aber nichts anders finden können, als dass keine parabola statt habe. Ich finde dass die curva catenaria sehr notable proprietates habe; data ipsius descriptione kan man leicht geben tangentes, quadraturam areae, dimensionem curvae, superficies ejus rotatione genitas etc. Ihre description aber supponiret logarithmorum constructionem, und daher vice versa, posita descriptione hujus curvae physica, kan man pulcherrime die logarithmos ausfinden und construiren, und also kan man ope curvae catenariae quotcunque medias proportionales inter duas rectas datas geben. Et ita haec curva est una ex virtuosissimis totius Geometriae und über dieses summae in construendo facilitatis, wenn man nur einen faden hat, der sich sufficienti facilitate bieget und proprio pondere nicht notabiliter dehnet Dieses aber de logarithmis sage ich andern noch nicht, damit sie vor der Zeit nicht wissen, ob die curva sey ex numero ordinariarum, an vero Transcendentium.

Mons. Tschirnhaus hat diesen Sommer*) ein Schediasma für die Acta Lipsiensia gegeben, darüber sich Hr. Hugenius ein wenig beschwehret, dass er nehmlich ihn in etwas compiliret. Mons. Tschirnhaus aber setzet dabey (mir vermuthlich zum angehöhr), einige gäben vor, dass gewisse arth problematum eine sonderliche analysin erforderten, seye aber nichts, solche problemata (als Tangentium inversa etc.) seyen inter simplicissima totius Matheseos zu

*) v. Bodenhausen hat bemerkt: 1690.

zehlen, nur allein dass man einen weitläufftigen calculum dazu brauche. Reimt sich wol zusammen. Es scheinet aber, er habe sie noch nicht recht betrachtet, und wollen wir sehen, ob er die curvam catenariam finden wird, denn in meinem Schediasmate habe ich nominatim erwehnet, dass ich auch hierinn ein specimen seines Methodi erwarten wolle, zumahlen hier nicht sowohl prolixo als artificioso calculo von nöthen habe.

Hr. Hugenius hat mir ein Exemplar seines trefflichen operis de Lumine zugeschickt, darinn er meines erachtens Cartesii rationes gantz ausgethan. Er hat sowohl in der praefation, als im opere selbst einiger meiner documenten erwehnet. Schreibt, er wolle meine newe Analysin untersuchen, und proponiret mir 2 curvas ex data tangentium proprietate zu suchen, so ich ausgefunden. Er bekennet, dass wenn meine Analysis dergleichen praestiren könne, seye es etwas ungemeines, wiewohl er, Hr. Hugenius selbsten, schohn ein gutes theil dieser dinge auf seine weise praestiren kan. In mea tamen methodo quaedam sunt singularia, remque omnem ab imaginatione ad analysin revocant; daher ich mich mir weiter als alia via zu kommen getrawe, und in gewissen Dingen zweifele ich dass andere so leicht dazu gelangen sollen; doch was curvam catenariam und dergleichen betrifft, die sind eben nicht von den schwersten, und wil daher erwarten, ob Hr. Tschirnhaus auch werde können drauff kommen.

Tractatum meum de Resistentia solidorum etc. davon der erste theil zwar guth scheinet, wiewol ich zu einem völligen examine nicht zeit gehabt, credo esse Galilaeana dilatata; aber liber 2dus, da er handelt de solido utrinque sustentato, stehet meines erachtens auf schlechten füssen uud dürffte ehe brechen als die solida; ich habe ihn zwar eine geraume zeit her nicht angesehen, mich düncket aber, dass gleich anfangs in demonstrationibus hujus libri 2. bey mir ein zweifel ereignet.

Ich bin selbst der meynung, dass in problematibus Geometriae communis die Methodus Veterum, et Analysis cujus vestigia quae-

dam extant apud Pappum, einige gewisse avantagen habe supra Analysin Algebraicam, daher ich auch glaube gegen M. H. Hrn. erwehnt zu haben, dass noch eine Analysis geometriae propria übrig, toto coelo ab Algebra diversa et in multis longe Algebra compendiosior utiliorque.

Man könte umb deren willen, so analysin verachten, einige specimina in das Giornale etc. geben, so eben nicht gemein. Die Maximae et minimae, die quadraturae, die centra gravitatis, die Tangentes, die extensiones curvarum in rectas sind darzu bequem. Es ist aber guth, dass wann man etwas würcklich exhibiret, man entweder keine demonstration gebe, oder eine solche, dadurch sie uns nicht hinter die schliche kommen. Zum exempel man köndte geben meine quadraturam absolutam des segmenti transversi Cycloidis und dabey sagen, man wolle nicht die demonstrationem hujus theorematis geben per methodum dadurch sie erfunden, sondern per aliam magis ad captum communem, wie ich dann solche hier beyfüge, quae nil nisi jam notum supponit: (fig. 94) AFCSA $\overset{(1)}{=}$ AFB + ABC + ACSA $\overset{(2)}{=}$ AFBHA + AHBCSA (ex figura). Sed ABC $\overset{(3)}{=}$ AFBHA (ut constat, quia BC = AHB), et AHBCSA $\overset{(4)}{=}$ bis AFB (ex aliorum inventis de cycloide), ergo denique ACSA $\overset{(5)}{=}$ AFB. Q. e. d.

Die curvam catenariam zu suchen, könte man zugleich publice proponiren, welche einige falso pro parabola gehalten, und wie ich mich besinne Galilaeus selbst, da es doch nothwendig eine curva transcendens. Man könte dabey erwehnen de vera differentia Methodi vere Analyticae a Methodis vulgaribus, dass nehmlich diese in vielen tentamentis bestehen, welche nur in facilioribus zu gerathen pflegen, in schwehreren aber gemeiniglich fehlen, und wenn man lange den saxum Sisyphi volviret, so weiss man auf die letzte nicht, ob es problema planum oder solidum oder sursolidum, oder gar omnem gradum transcendens; da hingegen die analysis, in so weit sie perficiret, uns via regia infallibili ad exitum führen oder impossibilitatem demonstriren muss, und gleichsam ein filum in labyrintho giebt. Welches artificium die Veteres bereits in etwas gehabt, aber vertuschet, Vieta und Cartesius resuscitiret, aber nur

in Geometria ordinaria rectilineari, dahin ich problemata plana, solida alteriusve gradus rechne, etiamsi enim variis lineis opus sit, tamen ad quaevis earum puncta determinanda non nisi relatione inter rectas opus est; aber ad Analysin pro Geometria sublimiore, quae curvilineorum dimensiones aliaque problemata tractat, ubi ipse gradus problematis vel nullus est vel non nisi per solutionem cognoscitur, habe ich vielleicht zuerst den analytischen weg geöffnet, und kan auch curvas, quas Cartesius male Mechanicas vocabat, quia calculo suo submittere non poterat, ad nudas calculi leges revociren, und das gemüth auch hierinnen a tentamentorum anxietate et incertitudine befreyen, wiewohl noch ein und anders hierinn sowohl als in Geometria ordinaria (da man ultra radices generales aequationum 4[ti] gradus nicht kommen) zu erfinden übrig.

Man könte auch wohl proponiren Tangentem einer curvae zu suchen, wie diejenige, so ich in Actis bey meiner Methodo calculi differentialis gesetzet, doch etwas auf eine andere weise. Man könte auch geben meiner seriem, per quam invenitur arcus ex data tangente.

Ich habe gefunden dimensionem curvae per circuli evolutionem descriptae, wenn ein faden umb den circkel ABE (fig. 95) gewunden wäre, aber aufgethan und extendiret würde, also dass der aufgethane faden BC allzeit gleich arcui circulari AB, so würde BC tangiren arcum AB oder perpendicular seyn ad AC lineam extremo C descriptam. Et arcus AB est media proportionalis inter diametrum AE et curvam AC.

Hiebey schicke die solutionem des problematis Galilaei circa veram figuram Catenae vel Funis pendentis, welche mir umb viel desto mehr gefallen, dass sie uns die logarithmos gibt, also dass man mit einer subtilen kette alle problemata per logarithmos expedienda praestiren köndte, wie aus der beygefügten figur und erklärung zu sehen. Wenn ich ein problema Transcendens dahin reduciret, dass es a logarithmis vel arcubus circuli, und also Tabulis Canonicis, oder quod eodem redit, quadratura Circuli et Hyperbolae dependiret, so halte ich es pro absoluto, und kan ein mehreres darinn nicht geschehen, weilen nicht müglich, diese bey-

den quadraturas indefinite, id est, pro data quavis portione Circuli vel Hyperbolae zu finden, wie man sie sucht. Ich habe dabey gefunden, nicht nur dimensionem curvae Catenariae seu extensionem ejus in rectam (welches leicht), sondern auch dimensionem areae und (welches am schwersten) die centra gravitatis sowohl lineae als areae, und zwar alles durch sehr kurtze constructiones. Catenula schicket sich besser als funis, weilen funis sich extendiren kan, catena aber ihre länge beständig behält. Die linea logarithmica so dabey gezeichnet, wird gefunden per quotcunque mediarum proportionalium quarum una est (fig. 96) $N\xi$ vel $(N)(\xi)$ inventionem inter ΘA et ${}_3N_3\xi$ oder ΘA et ${}_3(N)_3(\xi)$. Das eintzige habe ich verschwiegen, was ${}_3N_3\xi$ zu ΘA, oder quod idem est, ΘA zu ${}_3(N)_3(\xi)$ vor eine proportion, א ad ב, haben, als welche allezeit beständig seyn muss, damit diejenige so in diesen materien nicht genugsam versiret und doch meynen, sie köndten alles vor sich leicht finden etc. Es verhalten sich aber die 3 linien ${}_3N_3\xi$, ΘA und ${}_3(N)_3(\xi)$ wie diese drei numeri: 0.3678794, 1.0000000, 2.7182818. Geometrice aber (welches M. H. Hrn. ins Ohr sage) müssen die linien also beschaffen seyn (posito Θ_3N ut et $\Theta_3(N)$ esse aequalem ipsi ΘA), dass die gezogene gerade lini von ${}_3N$ auf A, oder von Θ auf ${}_3(\xi)$ die logarithmische lini nicht durchschneide, sondern nur anrühre.

Diejenigen so die Analysin novam verachten und vor ein giocolino halten, können ihr heil an diesem problemate versuchen; wiewohl nunmehr post exhibitam solutionem nichts leichter vor einen der den calculum verstehet, als rationem finden; aber ipsam solutionem zu finden, soll einer wohl bleiben lassen, der nicht meinen oder einen aequivalentem calculum hat.

Ich habe Hrn. Alberti zu Rom auf begehren einige rationes communiciret, warumb nuda extensio naturam materiae nicht mache, und gebethen, er möchte es doch M. H. Hrn. communiciren. Es wird aber nun vielleicht in das Journal des Sçavants zu Paris gesetzet werden, weil ich es einem guten freund dahin communiciret.

---

ch bin bedacht, meine Arithmetische Machinam, so vorlängst elaboriret und auch exequiret, ins feine bringen zu lassen. Ar-

naldus, Hugenius und Thevenot, so sie vor alters zu Paris gesehen, haben mich etlichemahl daran erinnern lassen.

Ein specimen meiner Analyseos novae situs zu geben, ist mir anjetzo ein bissgen schwehr, weil ich gantz von forn darüber meditiren muss; doch werde mich einmahl daran geben. Es ist gewiss, dass die Algebra, indem sie alles a situ ad solam magnitudinem reduciret, dadurch offt die Natur der sache sehr verwickele. Sie hat zwar den vortheil, dass sie allemahl (in Geometria ordinaria) zum ende kommen kan, hingegen gehet sie bissweilen durch grosse umwege; ist eben als wenn einer alle problemata ejusdem gradus per eundem datum circulum vel eandem constantem parabolam solviren wolte, so zwar allzeit thunlich, aber nicht allzeit am besten.

Hr. Bernoulli hat gar schöne specimina des Calculi differentialis herausgeben, und unter andern observiret, dass wo $\overline{dx:dy}$ omnium possibilium minima vel maxima, allda sey in curva punctum flexus contrarii. Er hat auch die solutionem curvae catenariae seu funicularis proprio Marte recht getroffen, und bemühet sich jetzo sehr meinen Methodus auf allerhand problemata zu appliciren, welches mir sehr lieb, denn ich kan ja selbst nicht alles thun, bin auch gantz nicht jaloux oder reservé darinn. Es sind ja noch so viel andere dinge darinn und sonst zu thun, dass ich allzeit materi behalten werde. Er hat gefunden, dass die curva dependire a quadratura Hyperbolae, doch hat er sie nicht applicirt auf Logarithmos, welches ich doch vors beste halte. Meine sowohl als seine und Hrn. Hugenii solution ist nun in Actis Lips. Doch hat Hr. Hugenius nicht observiret, dass die sache reducibel ad quadraturam Hyperbolae, sondern hat ein quadraturam curvae magis compositae angegeben, denn ob er schon aliquid analogum meae Methodi hat, so scheinet doch, dass er bey weiten damit so bequem nicht könne zu recht kommen, sondern mehr ad figuras gebunden.

Was das problema betrifft: Datis positione Circulo BE(E) (fig. 97), recta indefinita GH et puncto A, rectam ita ducere per A, ut si circulo et rectae occurrat in E et H, sit EH intercepta omnium

possibilium minima, welches freylich ad 8 dimensiones steiget (so viel ich primo obtutu abnehmen kan), so kan solches ope circuli dati und curvae rationalis 4^{ti} gradus absolviret werden. Gesetzt AF sey a, CF sey f, GF sey p, $CE^2 - CA^2$ sey $\beta\alpha$, und letzlich die beyden indeterminatae seyen AV, v und VE, n, so haben wir 2 aequationes, die eine ad Circulum datum welche ist: $vv + nn = \beta\beta - 2fn + 2av$; die andere ad curvam rationalem 4^{ti} gradus, welche ist

$$v = \frac{+ppa^2\beta - 2ppfan - ppann + an^4 - 2paa\beta. + 2paf..}{-2ppaa + 2paan - fn^3 - ppa\beta + ap\beta. + ppf.}$$

Solcher curvarum rationalium (nemlich darinn eine indeterminata ex data rationali altera allezeit rationaliter gefunden werden kan) bediene ich mich gern, weilen dergestalt puncta curvae quotcunque in numeris leichter gefunden werden können; die intersectio circuli et hujus curvae gibt das punctum E.

Was die inventionem curvarum ex data tangentium proprietate betrifft, so halte dafür, dass in tota Geometria nichts importanter als dieses; daher bitte M. H. Hrn. diese inquisition ferner zu verfolgen, so viel seine Zeit leidet; ich möchte wünschen, dass es die meinige lidte. M. H. Hr. ist auf sehr guten wege, und sein specimen gar artlich. Das erste wäre, dass man allzeit determiniren könndte, ob müglich curvam ordinariam satisfacientem zu finden; das nächste dass man finde specimen Transcendentiae, oder was es eigentlich für eine Transcendens sey. Gemeiniglich sind die curvae quaesitae possibiles und gar selten imaginariae. Es werden nicht nur von dem proponenten, sondern auch von der Natur und dem problemate selbsten die curvae offt also verlarvet, dass die limitation (wenn keine verlarvung nicht mit fleiss geschehen) nicht statt habe.

Die Methodus per inscripta et circumscripta oder dergleichen apagogice zu demonstriren lässet sich allezeit anbringen, und wolle M. H. Hr. nur die lemmata incomparabilium consideriren, so ich in

dem Tentamine de Causis Motuum coelestium beygefüget, so wird er leicht sehen, wie dergestalt, wenn man infinite parva nur ad incomparabiliter parva reduciret, der error dato minor, id est nullus, zu machen. Weil Cavalerius solches nicht genugsam considеriret, ist er mit seinen indivisibilibus nur in primis viis blieben, gleichwie auch die meisten andern in Italien und Frankreich. Denn man ist an keine solche limitationes gebunden, die er und andere pro salvanda methodi indivisibilium certitudine sich machen müssen.

Mit der Tangente Spiralis hat es diese beschaffenheit ad modum aliarum linearum, dum radius (fig. 98) CR ex CA egressus tendit versus C_1V, C_2V etc., punctum mobile P, manens in radio ex centro C egressum tendit ad ${}_1P$, ${}_2P$ etc.

Ex natura spiralis sunt arcus AV ut rectae CP, et D_1P ut CP in ${}_1V_2V$. Sed ${}_1V_2V = d\overline{AV}$, ergo ${}_1V_2V$ ut $d\overline{CP}$. Sed $d\overline{CP} = D_2P$, ergo ${}_1V_2V$ ut D_2P. Ac proinde D_1P ut CP in D_2P. Ergo datur constans F talis, ut sit F in $D_1P = CP$ in D_2P, seu $CP : F :: D_1P : D_2P$ adeoque $:: TC : CP$ seu $TC = \overline{CP}$ quad. : F. Unde constructio: Recta constans sit CG normalis ad CP; junge GP, ea erit normalis ad spiralem PP seu ad ejus tangentem.

Ipsa CG pulchre respondet simili constanti in parabola inter ordinatam et curvae normalem in axe interceptae. Id interest, quod CP sunt in parabola parallelae, in spirali convergentes.

Memini P. Gregorium a S. Vinc. in magno suo Opere Tetragonistico bellam comparationem instituere inter Spiralem et Parabolam et (quod mihi non improbabile videtur) statuere ex cognitis proprietatibus parabolae Archimedem in spiralis naturam penetrasse.

Solutum est problema*) illo ipso die quo mibi redditum est nimirum 27. Maji, ita ut statim proximo cursore remiserim. Nec solvi tantum modum, sed et ostendi modum solvendi problema infinitis modis, et efficiendi ut superficies hemisphaerica demtis fenestris seu foraminibus residua seu quadriforaminata sit aequalis

---

*) Aenigma de templo hemisphaerico quadrifenestrata quadrabili

dato quadrato; simplicissimas quoque adjeci solutiones, ubi aequatur quadrato diametri. Es kan wol seyn, dass man bey ihnen geglaubet, es lauffe bey meiner gerühmten Analysi ein wenig aufschneiderey mitunter, und hat sie damit auf die Probe stellen wollen. Ich möchte wündschen, dass man mir nie schwerere problemata proponirte, denn dieses erfordert keine weitläufftigkeit in calculiren oder construiren, sondern nur eine adresse in applicatione Methodi, und dass sind eben die problemata die mir wohl gefallen. Es reduciret sich dieses problema auf quadraturam Carbasi, wie ich es nenne, vel Lunulae (ut ita dicam) sphaericae, quae ad veli seu Carbasi instar inflata est.

Nimirum sit (fig. 99) Hemisphaericae superficiei quadrans PDQSAP; in eo ducatur linea PλLA talis naturae, ut si per P tanquam polum et punctum lineae L ducatur Meridianus PNLG, occurrens ipsi QSA quadranti aequatoris, in S; sit SF sinus rectus graduum QS, aequalis ipsi PB sinui verso graduum (arcus meridiani) PNL; dico trilineum PNLAP aequari rectangulo QKF, et Carbasum partialem PλLNP aequari rectangulo KQF, et totam Carbasum PλLAP aequari quadrato radii. Atque ita totum templum Hemisphaericum, cujus superficies sit ex quatuor istis carbasis composita, et fenestrarum quatuor unaquaeque sit figura cornuta PDQALλP, aequari quadrato diametri.

Analysis Problematis de Templo Hemisphaerico quadrifenestrato quadrabili; accessit constructio, in qua quatuor fenestrae sunt concinnae seu ambidextrae, et a basi et fastigio remotae, imo si placet, plane insulatae sive undique more fenestrarum solito a muro cinctae.

Elementum Quadrantis superficiei sphaericae PβBHAψP (fig. 100) est quadrilineum LMN vel LN, cujus aestimatione habita viam reperiemus ad mensurandas partes superficiei. Jam LN est factum ex LM in MN; hos duos ergo arcus elementares, id est rectas ab ipsis inassignabili errore differentes metiamur.

Ex analysi infinitorum constat LM $\overset{(1)}{=}$ SQ, CP : QM. Rursus MN ad HG ut QM ad CG seu ad CP, seu MN $\overset{(2)}{=}$ HG, QM : CP. Ergo fit LM in MN $\overset{(3)}{=}$ SQ.HG. Ergo trilineum elementare PLMNKP $\overset{(4)}{\text{aequatur}}$ ipsi PQ in HG. Porro ad instar aequationis 1. est HG $\overset{(5)}{=}$ EF.CP:GE, et fit PLMNKP $\overset{(6)}{=}$ EF in PQ.CP : GE. Itaque si PQ $\overset{(7)}{=}$ GE, fit

PLMNKP[8] $=$ CP in EF, et aggregata talium trilineorum elementarium componentia superficiem sphaericam itidem habentur. Nam trilineum sphaericum PVTRNKP (comprehensum inter arcus PVT et PKN) aequatur[9] rectangulo sub CP in XF, et Carbasus PΩTRNKP quae est bilineum, comprehensum linea PΩTRN (per polum P et extrema arcuum ducta) et ultimo arcu aliquo PKN, aequatur[10] rectang. CP in BF seu rectang. CBF. Quodsi linea sit producta per π usque ad A, nempe PΩTRNπA, seu si ultimus arcus sit ipse quadrans PψA, Carbasus PΩπAψP aequatur[11] quadrato a CP seu a radio sphaerae; itaque si quatuor tales carbasi componant parietes templi hemisphaerici cujus basis BAO bis (sive circulus a radio BC), zenith vero P, et PβBHANΩP sit una ex quatuor fenestris, habetur quaesitum. Sed si quis nolit templum in quatuor punctis A quiescere, remedium in promtu est, quod et jam indicare memini. Nempe arcus PNH bisecet quadrantem basis BHA, patet ex dictis trilineum PKNπAψP aequari rectang. BCF. Ex puncto N ducatur linea NξB congrua et similiter posita ipsi NπA, patet quadrilineum PβξNπAψP (duplum trilinei PKNπAψP) aequari rectang. sub OB et CF. Hinc si B fiet zenith et AP basis, utique hoc quadrilineum erit quarta pars templi hemisphaerici, cujus fenestra erit trilineum BξNπAHB; idem est si A sit zenith et BP sit basis.

Sed jam omissis specialibus, quae inaedificavimus casui numeri 7, nunc generalia persequendo redeamus ad aequ. 6, et BE sit x, CP sit a, GE seu y erit[12] $\sqrt{2ax-xx}$, et EF,[13] dx, et HG,[14] dx, a : y, et PQ, v, PLMNKP[15] $=$ dx va : y[16] $=$ dx va : $\sqrt{2ax-xx}$. Hinc si sumamus valorem ipsius v per x, sic ut dx va : $\sqrt{2ax-xx}$ sit quantitas summabilis, habetur quadratura portionis superficiei sphaericae secundum talem legem formatae. Sic si sit v[17] $= a - x$, utique res succedit, nam fit $a \int \overline{a-x}\, dx : \sqrt{2ax-xx} =$[18] $\sqrt{2ax-xx}$. Sic et res succedit, si fiat $v = \sqrt{xa}$, nam aadx : $\sqrt{2aa-x}$ est summabilis.

Jam uti quaesivimus supra (aequ. 4) dimensionem trilinei elementaris PLMNKP, ita possumus et quaerere dimensionem residui quadrilinei elementaris, nempe LMGHNK, quod est aequ.[19] CQ in HG. Ergo si CQ $=$ GE (id est arcus PM ipsi GA), eodem modo habetur quadratura ut ante in casu aequ. 7. Figura autem erit diversa a priore, linea scilicet curva fiet BδP et paries erit BδPψAHB, fenestra erit PβBδP.

Possemus autem adhuc magis Methodum variare resolvendo superficiem sphaericam non sectionibus per verticem in trilinea elementaria PKLP vel quadrilinea elementaria NHGM, sed sectionibus basi parallelis in zonas elementares ut βNMLK$\alpha\beta$. Nam quia KLMN seu LM in MN aequ. SQ.EF.CP : GE per aequ. 5 et 3, hinc servata eadem SQ, utique zona βNMLKβ erit aequ. BE.SQ.CP : GE, seu posito PQ, v et SQ, dv, fiet haec zona (de a) $= \text{x a dv} : \sqrt{2ax - xx}$; unde si v sumatur talis, ut haec quantitas sit summabilis, habebitur quadratura compositi ex zonis. Et ita fieri potest, ut quadretur superficies corniculata PβBHAΩP, carbasus autem PΩNAψP fiat fenestra. Si ae fiat $= ha + a\sqrt{2ax - xx}\; x : a^n$, habebitur v, modo n sit numerus integer affirmativus quicunque, ut ex calculo patet. Et summa zonarum seu conflata figura quadranda erit ae.

Sed si fenestram velimus in pariete supra infraque clausam (fig. 101) nec ad basin vel apicem templi pervenientem, eamque concinnam seu ambidextram, ut ΩM$\varphi\mu\omega\zeta\Omega$ in templi quadrante PφAGBζP, id quoque obtinere licet, duas priores methodos conjungendo. Nempe arcus quadrantalis P$\Omega\omega$H bisecet templi quadrantem in duos octantes quorum unus sit P$\Omega\omega$HGAφP. Jam efficiamus, ut tam ΩPφMΩ, quam ωHGA$\varphi\mu\omega$, id est octans demta semifenestra sua sit quadrabilis, inque eam rem quaeramus lineam ΩM$\varphi\mu\omega$ (congruentem cum reliqua dimidia alterius octantis, nempe cum $\Omega\zeta\omega$) talem ut prodeat quadrabilitas. Ex M et μ in CP ductae normales sint MQ, μq, et posita BE, x et CP seu CB, a, sit $PQ \overset{(20)}{=} Cq = \frac{1}{2}\sqrt{ax}$. Ita ex puncto φ ducta normalis φב bisecabit CP in ב; jam quia PQ seu $v \overset{(21)}{=} \sqrt{ax} : 2$, et per 16. est $\int \text{dx va} : \sqrt{2ax - xx}$ aequa-$^{(22)}$lis trilineo ΩPφMΩ, si scilicet x sumatur a BF usque ad BC. Itaque explicando v per 21, fiet ex 22. $\int \text{dx aa} : 2\sqrt{2aa - ax}$ (ab x, BF usque ad x, BC) $\overset{(23)}{\text{aequ.}}$ ΩPφMΩ, quae summa potest haberi. Nimirum ducatur (fig. 102) linea 567A ita ut sit F6 (vel E7) $\overset{(24)}{=} \sqrt{2aa - ax}$, scilicet ut posito x esse BF (vel BE), sit F6 media proportionalis inter OF (seu 2a—x) et inter CB; ita prima ordinata B5 erit $a\sqrt{2}$ et ultima CA est a. Similiter ducatur linea 8 9 10 11 talis ut (posito BF vel BE esse x) sit F9 (vel E10) $\overset{(25)}{\text{aequ.}}$ $aa : 2\sqrt{aa - ax}$, patet aream ut F 9 10 E $\overset{(26)}{\text{aequari}}$ trilineo ΩPM, et aream F 9 10 11 C $\overset{(27)}{\text{aequari}}$ trilineo ΩPφMΩ. Hujus areae ergo quaeratur quadratura. Reperietur autem ex calculo differentiali generaliter esse

$\int, dx\,aa : 2\sqrt{2aa-ax}$ (28) aeq. $aa\sqrt{2}-a\sqrt{2aa-ax}$, nam differentiando utrinque prodit identica aequatio. Adeoque per 28. fit B 8 9 1 0 E (29) aequ. rectang. sub CB et differentia inter B5 et E7, scilicet in 28. sumendo x a 0 usque ad BE, et similiter B 8 9 F (30) aequ. rectang. sub CB et differentia inter B5et F6, et denique eodem modo B 8 9 10 11 C (31) aequ. rectang. sub CB et differentia inter B5 et CA seu inter $a\sqrt{2}$ et a. Jam F 9 10 11 C (32) aequ. B 8 9 10 11 C—B 8 9 F ex constructione; ergo (per 31, 30) rectang. sub CB et differentia inter F6 et CA (33) aequ. F 9 10 11 C, id est (per 27) trilineo $\Omega P\varphi M\Omega$. Jam CA est a, et BF est $a-a:\sqrt{2}$, posito H bisecare quadrantem BHA, et F6 (per 24) est $\sqrt{2aa-ax}$, posito BF esse x; ergo fiet F6= $=\sqrt{2aa-aa+aa:\sqrt{2}}$ (34) $= a\sqrt{1+1:\sqrt{2}}$, media scilicet proportionalis inter CB radium et OF compositam ex a radio et CF semilatere quadrati inscripti. Et factum sub hac media proportionali et radio (35) aequabitur trilineo $\Omega P\varphi M\Omega$. Sed idem trilineum supra fenestram (36) aequatur hoc loco quadrilineo infra fenestram, quod est $\omega HGA\varphi\mu\omega$, quod ex constructione sic ostendo. Nempe per 4. patet trilin. $\Omega P\varphi M\Omega$ (37) aequari summatis PQ in HG inter H et A; et similiter per 19. patet quadrilineum $\omega HGA\varphi\mu\omega$ (38) aequari summatis CQ in HG itidem inter H et A. Jam ex constructione hoc loco est CQ aequ. PQ per 20, ergo cum singula summanda singulis sint aequalia et eadem sint utrobique, erit totum toti aequale, trilineum scilicet quadrilineo, adeoque vera est aequ. 38. Unde sequitur per 35, totum octantem demta semifenestra (compositum scilicet ex dictis trilineo et quadrilineo) aequari facto sub diametro sphaerae et media proportionali inter CB radium sphaerae et OF compositem ex OC radio et CF semilatere quadrati inscripti, ejusque octuplum aequabitur templo. Q. E. F.

Postremo si cui displiceat, quod fenestra quaevis hujus novissimae constructionis tangitur a vicinis fenestris, malitque fenestras non tantum a basi et fastigio esse remotas, et concinnas seu ambidextras, id poterit ex hac constructione obtinere; descripta scilicet fenestra $\zeta\Omega M\varphi\mu\omega\zeta$ in superficie sphaerae jam aliter formet quadrantem templi, ut scilicet zenith non sit P, sed aliud punctum trans P, sumtum in arcu quadrantem bisecante $H\omega\Omega P$ producto trans P; ita basis non erit arcus quadrantalis BHA, sed huic parallelus propior fenestrae bisectus et ipse ab arcu $H\omega$, vel quod

eodem redit,' in hoc ipso figurae nostrae quadrante retento (cum superficies sphaerica undique sibi congruat) transferatur fenestra ζΩΜφμωζ deorsum versus BHA, sic tamen ut arcus HP per ejus medium transeat ut ante. Sed hoc modo fenestra non pertinget ad quadrantis extrema, sed insulabitur in quadrante, quorum quatuor conjuncti templum component.

Ich habe in der (vorhergehenden) solution angewiesen, quod cuivis curvae secundum Geometriam quadrabili respondens solutio nostri problematis zu assigniren etc. Dadurch wir gleich methodice finden dasjenige, darauf einen andern seine series meditationum gebracht.

Ich glaube das V.*) mehr wisse als er weiss, das ist, er wisse seine wissenschaft nicht in methodum zu bringen. Denn ich bin gewiss, dass man auch eine eigene analysin ad formam methodi Veterum machen köndte, die ihre besondere avantagen über die Algebram hätte, ob sie ihr schon in einigen andern dingen weichen muss, aber es fehlet diesen leuten die Ars Artium, das ist die Kunst Künste zu machen. Sie haben eine gewisse routine, etwas auf ihre weise zu erfinden, so in der that analysis ist, aber sie wissens selbst nicht, können auch nicht damit weit kommen, haben so zu sagen nur eine analysin naturalem, wie die bauern eine arithmeticam naturalem, aber damit sollen sie keine cubische wurtzel extrahiren.

Ich schreibe sonst dem Euclidi, Apollonio, auch dem V. nicht nur eine Historische Geometri, sondern ein weit mehreres zu, aber seine scholaren bleiben Historici nudi.

De locis solidis könte wohl was gutes noch gesagt werden, nehmlich wer eine seriem schöner theorematum gebe, wie die Veteres bereits gethan und angefangen. Ich gestehe, dass ich gantz nicht zufrieden mit dem was Fermatius, Cartesius, Schoten, de Wit und andere in doctrina locorum gethan; sie demonstriren wohl, das oder jenes sey ein locus planus, was Apollonius dafür ausgeben, aber sie weisen nicht, wie Apollonius oder andere vor ihm auf den Catalogum locorum planorum gekommen, idemque est de solidis.

---

*) Wahrscheinlich Viviani.

Es stecket noch ein und anders in den Veteribus verborgen, so verlohren; ich sehe gar wol, dass sie ihre künste zurückgehalten, und dass wir sie nicht alle wissen; hingegen wissen wir anderwerts mehr als sie, und wolte ich mit ihnen nicht gern tauschen. Man kan in Conicis noch viel ungethanes thun; hätte ich selbst 20 köpffe oder vielmehr 20 gute freunde, so wolte ich einen (der sich auf dergleichen hauptsächlich legen wolte) bitten, die universalia Conica zu tractiren, wie des Argues und Mr. Pascal angefangen, deren gedanken la Hire zum theil herausgegeben.

Solutio Problematis a Galilaeo primum propositi de Natura et Usu Lineae, in quam Catena vel Funis (extensionem non mutans) se proprio pondere curvat.

Catenariae lineae FCA(C)L (fig. 96) latitudo C(C) est Logarithmus ΘN duplus; altitudo NC vel ΘB est media arithmetica inter duos ejusdem Logarithmi numeros Nξ et (N)(ξ), quorum scilicet media Geometrica est unitas ΘA, ita ut, si $\Theta_3 N = \Theta A$, sit ΘA ad $_3N_3\xi$ in ratione certa hic exposita ב ad א.

Hinc ope catenae vel funiculi sine omni calculo licet invenire Logarithmos ex numeris et numeros ex Logarithmis. Praeterea pro tangentibus, dimensione lineae, spatii et centris grav. utriusque inveniendis sunt: $\Theta R = \Theta B$; $\Theta R - AR = N\xi$; $\Theta R + AR = (N)(\xi)$; Triangula ΘAR et CBT sunt similia; AR = AC; $\psi\omega$ = CA(C) = bis AC, rectang. RAΘ = spat. AΘNCA. Sint G, P, Q centra grav. CA(C), AC, AΘNCA, et erit $\Theta\vartheta + \Theta B$ = bis ΘG = quater $\Theta\beta$, et AE = GP = βQ.

Analysis Problematis Catenarii.

AB, x; BC, y. Jam ex natura curvae, posito arcus seu catenae A_1CC centrum gravitatis esse P, demissa in AJ Taugentem verticis A perpendiculari PE, tunc juncta CE tanget curvam in C. Ex C normalis demittatur CJ, erit JE = xdy : dx, et EA seu e erit $\overset{(1)}{=}$ y − xdy : dx. Rursus quia P centrum arcus AC qui vocetur n, et n $\overset{(2)}{=} \int\sqrt{dx^2 + dy^2}$, et momentum arcus ex axe AB est $\int \overline{ydn}$, et momentum hoc divisum per ipsum arcum n dat distantiam centri arcus ab axe seu GP sive AE, ideo fit e $\overset{(3)}{=}$ y − xdy : dx $\overset{(4)}{=} \int \overline{ydn}$: n, et

fit de $\stackrel{(5)}{=}$ (ex 3) $\overline{xddy:dx}$. Rursus de $\stackrel{(6)}{=}$ (ex 4) $ydn:n - dn\int\overline{ydn:nn}$, ubi aequando duos valores ipsius de, et pro $\int ydn:n$ substituendo valorem $y - xdy:dx$, destructis destruendis fit $-\overline{ddx:dy}:\overline{dx:dy}$ $\stackrel{(7)}{=}$ $dn:n$. Unde sequitur $dx:dy \stackrel{(8)}{=} n:a$, seu (per aequ. 2) $dx:dy$ $\stackrel{(9)}{=} \int\sqrt{dx^2+dy^2}:a$, ubi a oritur tanquam assumenda unitas ad homogeneorum legem implendam. Et aequationem 8. differentiando fit $dn:a \stackrel{(10)}{=} ddx:dy$, posito dy esse semper constantem seu ipsas y crescere uniformiter seu ddy esse $\stackrel{(11)}{=} 0$, quod in arbitrio est sic assumere. Jam quia est $dn^2 = dx^2 + dy^2$ (per aequ. 2), fit $dn\,ddn$ $= dx\,ddx + dy\,ddy$, et quia $ddy = 0$, fit $dn\,ddn \stackrel{(12)}{=} dx\,ddx$, et tollendo ddx ex aequ. 10 per aequ. 12 fit $ddn = dy.dx:a$, et quia dy constans, inde fit (summando) $dn \stackrel{(14)}{=} dy\,x:a + dy$, nam dy posita constante (seu $ddy = 0$) utique differentiando aequa. 14 redit aequ. 13. Porro ex aequ. 14 per aequ. 2, sublato dn, fit $dx\,a:\sqrt{2xa+xx} \stackrel{(15)}{=} dy$, et faciendo $x \stackrel{(16)}{=} z - a$ seu $z = \Theta B$, fit $dz\,a:\sqrt{zz-aa} \stackrel{(17)}{=} dy$, ubi $\Theta A = a$. Jam quia $dz \stackrel{(18)}{=} dx$, fit per aequ. 8 $dy:dz \stackrel{(19)}{=} a:n$, ergo conferendo aequ. 17 et 19, fit $n \stackrel{(20)}{=} \sqrt{zz-aa}$, quae est extensio curvae in rectam. Porro ex aequ. 14 per aequ. 16 fit $dn:dy \stackrel{(21)}{=} z:a$, ergo jungendo aequ. 19 et 21 fit $dy; dx; dn :: = a; n; z$, seu dy, dx, dn adeoque CB, BT, TC se habent inter se ut a, n, z seu ut ΘA, AC, ΘB; et quia sumto $\Theta R = \Theta B$ seu z, fit $AR = \sqrt{zz-aa}$, ergo (per 20) fit $AR = n =$ arcui AC, ergo CB, BT, TC se habent ut ΘA, AR, $R\Theta$ seu triangula CBT et ΘAR sunt similia. Ita habemus proprietatem tangentium curvae. — Quadratura areae sequitur ex aequ. 21, quia $\int zdy \stackrel{(23)}{=} an$. Porro ponatur $z + n \stackrel{(24)}{=} aa:\omega$. Unde (per 20) $z - n \stackrel{(25)}{=} \omega$, et ita tollendo z et n ex aequ. 21 per aequ. 24 vel 25 (et harum differentiales) fit $dy \stackrel{(26)}{=} -d\omega a:\omega$, seu si ω sint ut numeri (unitate minores ob signum —), erunt y Logarithmi. Adeoque si $A\Theta$ seu a aequ. Θ_2N, et a sit parameter Logarithmicae seu si juncta A_2N tangat Logarithmicam $A\xi_3\xi$ in A, et inter ΘA et ${}_2N_2\xi$ inveniantur quotcunque mediae proportionales, per quarum extrema ξ, ${}_2\xi$ etc. transeat curva logarithmica $A\xi\xi$, tunc ΘN seu BC seu y erit Logarithmus et $N\xi$ seu $\Theta\omega$ erit numerus ω unitate (a seu ΘA) minor, et posita $\Theta(N) = \Theta N$, erit $(N)(\xi)$ numerus unitate ΘA seu a major, et ΘB seu NC seu z (per 24 et 25) erit $\overline{N\xi + (N)(\xi)}:2$ seu

media arithmetica inter $N\xi$ et $(N)(\xi)$. Et his fere omnia quae de hac curva inveni continentur exceptis centris gravitatis, quae nunc brevitatis causa omitto.

Was die begehrte aequationem curvae logarithmicae betrifft, damit diene folgender gestalt: Gesetzt (fig. 103) AB sey $= BC = 1$, also dass 1 parameter logarithmicae, und BG sey x, FG sey y, und DA sey b, so ist $y = b^x$, quae est aequatio transcendens exponentialis; sunt autem aequationes exponentiales omnium transcendentium perfectissimae, quando possunt obtineri. Es haben aber BC und AD oder 1 und b allezeit eine beständige proportion zusammen, so in allen Curvis Logarithmicis bleibet, et juncta AC tangit curvam in C. Weilen aber die Transcendentes auch per aequationes differentiales zu exprimiren, so kan man es also thun: Natura Logarithmicae bringt mit sich, ut sumto puncto quocunque F atque inde educta tangente FT, occurrente ipsi Asymptoto BA in T, sit recta GT constans seu aequalis semper eidem, nempe ipsi parametro AB vel BC vel 1. Quod si jam BC (vel 1) vocemus a, fiet TG seu a ad GT seu y ut dx ad dy, seu fiet aequatio $ady = ydx$, seu posito $a = 1$, fiet $dy = ydx$, quae est aequatio differentialis naturam Logarithmicae exprimens, maximae utique simplicitatis, uti certe logarithmica omnium transcendentium simplicissima est.

Das fundamental assumtum, naturam Curvae Catenariae zu bringen ad aequationem, ist dasjenige, was Hugenius, P. Pardies und andere vorlängst annotiret circa proprietatem tangentium curvae, dass nemblich die tangentes $C\pi$ (fig. 104) und $_1C\pi$ einander treffen in puncto π, so gerade stehet unter ℵ centro gravitatis arcus C_1C; daher wenn AE ist tangens verticis A, und tangens puncti C den tangentem puncti A antrifft in E, so muss E gerade stehen unter P centro gravitatis arcus AC, das ist, AE ist distantia centri gravitatis arcus AC ab axe AB, oder AE in AC est momentum arcus seu catenae AC ex axe. Ex hac consideratione kan man nun ad aequationem differentialem kommen, durch deren verfolgung man endlich alle die von mir gesetzte theoremata herausbringen kan.

Wie die Tangens curvae, cujus aequatio: $\sqrt{xx+yy}+\sqrt{aa-2ax+xx+yy}+\sqrt{bb-2bx+xx+yy}=c$, und dergleichen zu finden per compendium, so setze man $\sqrt{xx+yy}=l$, $\sqrt{aa-2ax+xx+yy}=m$, $\sqrt{bb-2bx+xx+yy}=n$, also $c=l+m+n$, so wird sein $dn=\overline{xdx+ydy-bdx},:n$, und also dergleichen hat man auch dm und dl. Weil nun $dc=0$, so wird $0=dl+dm+dn$, et substituendo valores atque ordinando fiet aequatio $dy:dx=\overline{\overline{-x:l+\overline{a-x}:m+\overline{b-x}:n}},:,\overline{\overline{y:l+y:m+y:n}}$. Unde fit (fig. 105) $TE=\overline{\overline{-AE:AF+BE:BF+CE:CF}},:,\overline{\overline{1:AF+1:BF+1:CF}}$. In Numeratore iis quae sunt ab una parte ipsius E, praefigitur —, reliquis +. Et idem Canon valet pro focis quotcunque. Ich vermuthe dass man aus diesen Calculo generali leicht die regulam per centrum gravitatis würde demonstriren können.

Ich muss bekennen, dass caeteris paribus ich mehr von den constructionibus per motum, als per puncta halte, und wenn der motus seine gebührende simplicität hat, so halte ich das nicht pro Mechanico, sondern pro Geometrico. Die designatio per puncta pfleget zwar commodior pro calculo analytico zu seyn, sed de eo proprie non agitur in Geometria. Will Er selbst den calculum machen, so wird er ..... Methodum cujus specimen dedi leicht können suchen, was für eine quadratura oder $\int\overline{\ldots dx}$ erfordert werde pro dimentiendo Velo Viviani, und da wollen wir denn sehen, ob solche quadratura ex nostris artibus dabilis sey. Wiewohl ich freylich noch nicht zeit gehabt die Canones quadraturarum zu prosequiren und die sache dahin zu bringen, ut omnes quadraturae saltem infra certum gradum sint in potestate, quoad possibile est, wiewohl ich den weg dazu genungsam sehe. Ebenmässig wird Er per calculum elementum curvae determiniren können und daher finden, was die linie (curva in superficie sphaerae per intersectionem cylindri axi sphaerae paralleli in construct. Viv.) für relation habe ad elementa curvae Ellipseos. Es hat Paschalius in literis sub nomine Dettonvillaei editis die curvas cycloeidum secundariarum mit den curvis Ellipsium conferiret.

Meine Quadratura Arithmetica beweiset sich ohne demonstration. Osannam, ein Algebriste zu Paris, hat weiss nicht wie weit,

die brüche zusammen gerechnet, weil er vermeynet, er wolte einen irthum finden; er hat sie aber müssen glauben, als er den success gesehen. Nicht nur Hr. Hugenius, sondern auch Wallisius in einem opere Anglico de Algebra haben meine quadraturam Arithmeticam approbiret, andere zu geschweigen.

Die Kunst ex data quadratura totius quadraturam partium zu finden, kan Hr. Tschirnhaus nicht, ist auch nicht müglich. Es gehören bissweilen gantz andere dinge dazu, quae in casu speciali, qualis est casus totius, evanesciren. Eben darüber war ein streit zwischen Hr. Tsch. und mir. Er hatte gesetzet in Actis, dass er hiemit einen Methodum gebe, damit quadraturae ausgemacht und sogar impossibilitas quadraturae circuli bewiesen. Der Methodus gienge aber nicht weiter an, als so weit er von mir gesetzet und ihm längst communiciret worden war, nehmlich per differentias, und das seinige folgte gar nicht daraus. Seine meynung war, quotiescunque in figura analytica pars per ordinatam absecta est quadrabilis seu segmentum, tunc figuram esse infinite quadrabilem, seu quodlibet ejus segmentum curva et recta vel rectis comprehensum esse quadrabile. Auf die instantiam de Cycloide, deren certa segmenta solis rectis et curva comprehensa Hugenius und ich quadriret, antwortet er, Cycloidalis linea sey nicht analytica, quod est verum; da erdachte ich ihm eine andere instanz; ich nahme die lunulam Hippocratis (fig. 106), applicirte alle deren ordinatas bc ad rectam, nempe transferendo in (b)(c), da kommt eine newe figur heraus, cujus totum AD(c)A aequatur lunulae, ideoque est quadrabile, sed partes quaelibet non item. Durch diese instanz war M. Tsch. embarassiret, zumahl weil ich ihm originem lineae A(c)D ex lunula nicht expliciret, und auch die quadraturam totius nicht expliciret habe. Endlich quod felix faustumque sit, war er endlich drauf ohngefehr gefallen, und hatte originem ex lunula gefunden, also auch quadraturam; da war nun quaestio de effugio; das bestund darinnen, er sagte, lunula sey auch indefinite quadrabilis, eo scilicet modo, wie M. Hr. in seinem brieff gesetzet; aber darvon war die quaestio nicht, lunula est composita ex duabus curvis, aber in der figura AD(c)A ist das totum quadrabile, und wird er doch nimmermehr indefinitam quadraturam partium finden. Daher fallet auch sein ratiocinium hin, damit er impossibilitatem quadraturae

totius circuli bewiesen zu haben vermeynte. Ich glaube, der modus secandi lunulam in partes quadrabiles oder dergleichen sey auch bey dem Vincentio Leotaudo in Amoeniore Curvilineorum contemplatione. Im übrigen zweifele nicht, dass ihn Hr. Tsch. de suo gefunden. Ist das Theorema richtig, so wird es M. Hr. per calculum leicht also finden. Demonstrandum est (fig. 107) $\overline{ADEA}$ esse $= \overline{CAM}$. Ergo $d\overline{ADEA} = d\overline{CAM}$, hoc est DE(E)(D) = CM(M). Ob nun dieses wahr, wird der calculus analyticus zeigen. M. Hr. darff nur analytice determiniren aream elementarem DE(E)(D), quod fit quaerendo aream CD(D), atque inde detrahendo aream CE(E), concipiendo ipsas D(D) et E(E) ut rectas elementares; so wird sich die sache selbst weisen. Et haec est, ni fallor, clavis optima talium, ut ex areis rem transferamus ad earum elementa seu differentias, in quibus ut se veritas prodat necesse est, quoties de theorematibus talibus indefinitis demonstrandis agitur. Sed quando quis mihi proponit theorema definitum in quadraturis, non possum semper ejus promittere demonstrationem, quia tunc cessat hoc subsidium, et prius perficienda est ars quadraturarum. Ist Hr. Viviani discurs ein theorema indefinitum, so ist M. Hr. versichert, dessen veritatem per calculum finden zu können. Die definita aber, das kan nicht versichern, sondern nur dieses sagen, dass wenn die sache ad terminos calculi analytici methodo speciminis mei reduciret wäre, so könte ich sehen, was darinn zu thun.

Freylich ist es, wie M. Hr. saget, dass die theoremata circa ductus und dergleichen beim Gregorio a S. Vincentio sich methodo nostra gleichsam von selbsten ergeben, welches specimen nicht undienlich wäre Methodi meae utilitatem zu zeigen.

Ein Handwerks Man hat diesen Sommer einen Spiegel gemacht, von harten Holtz, damit kan er an der Sonnen würste braten und dergleichen thun. Defectum politurae supplet magnitudo, adeoque copia radiorum. Man muss es aber noch nicht gemeine machen. M. Hr. könnte es als etwas rares dem GP. (Grossprinzen?) communiciren. Ist res facile parabilis; potest esse magnae utilitatis.

Circulus proprie loquendo non habet focum; interim pro succedaneo foco in reflexione est focus parabolae, in refractione focus Ellipseos vel Hyperbolae, quam circulus in vertice osculatur. Osculatur autem circulus curvam ille, qui est omnium circulorum intus tangentium maximus. Ich habe die Oscula zuerst in Geometriam introduciret in Actis Eruditorum. Ut recta tangens in puncto contactus habet eandem cum curva directionem, ita circulus osculans in puncto osculi habet eandem cum curva flexuram seu curvedinem. Recta mensurat directionem, quia ipsa est uniformis directionis; circulus mensurat curvedinem, quia ipse est uniformis curvedinis. Ex omnibus circulis angulum contactus cum curva in puncto proposito facientibus circulus osculans facit angulum contactus minimum, quem voco angulum osculi. Hinc circulus osculans quam proxime ad curvam accedit et cum ea quasi repit. Itaque si in axe parabolae intra parabolam sumas punctum quod a vertice distet magnitudine semilateris recti, et hoc puncto velut centro, distantia a vertice velut radio describas circulum, is parabolam in vertice osculatur, et hujus circuli focus vel potius quasifocus erit idem cum foco parabolae. Hinc jam patet punctum, in quo radii a longinquo puncto venientes adeoque pro parallelis habendi post reflexionem conjunguntur. Pro refractione, loco parabolae, adhibeatur Ellipsis quae in vertice suo circulum osculatur, vel Hyperbola, prout effectus est quem desideramus. Ita omnia quae Cartesius efficit Ellipsibus vel Hyperbolis, circulo praestantur practice seu succedanee pro radiis parallelis, convergentibus aut divergentibus. Also dass aus dieser einigen consideration alles leicht zu definiren, auch loca imaginum etc. zu haben: Lineae osculantes in praxi possunt esse succedaneae earum quas osculantur. Wenn man also locum repraesentantem punctum seu primum focum per primam refractionem gefunden, so consideriret man dieses punctum wieder ut radians, und findet dessen focum secundum, et ita si placet tertium. *)

---

*) Antwort auf die Frage de foco 3. lentium ultimo. Bemerkung Bodenhausen's.

So viel ich dessen modum procedendi verstehe, so düncket mich auf diese weise wollen sich die areae oder summationes nicht finden lassen. Die ars ist noch nicht ausgemacht.. Es gehören viel praeparatoria dazu; biss die fertig, muss man sich mit allerhand vortheilen behelffen. Mit dem exemplo proposito ist es leicht. Denn weil $xdx = \overline{dxx}:2$, so kann man anstatt xx setzen ay, und anstatt $\overline{dxx}:2$ setzen $\overline{day}:2$ oder $ady:2$. Ergo kan anstatt $axdx:\sqrt{aa+xx}$ gesetzet werden $aady:2\sqrt{aa+ay}$, welches denn wieder leicht ad simplicius zu reduciren. Denn anstatt $a+y$ kan man setzen v, also anstatt dy bleibt dv; ergo anstatt $aady:2\sqrt{aa+ay}$ komt $aadv:2\sqrt{av}$. Nun ist bekandt ex nota quadratura Hyperboloeidum vel Paraboloeidum das $aa\int dv:2\sqrt{av} = a\sqrt{av}$, ergo $= a\sqrt{aa+ay} = a\sqrt{aa+xx}$, hoc ergo $= a\int xdx:\sqrt{aa+xx}$. Man wird es auch in der Probe befinden, denn man darff nur differentiren $\sqrt{aa+xx}$, so wird man bekommen $xdx:\sqrt{aa+xx}$.

Mit peculiaribus hypothesibus, dass ich x zum exempel setze $\frac{1}{2}a$ oder dergleichen, gehen die summationes nicht an, glaube auch nicht solche gebraucht zu haben; omnis summatio tetragonistica comprehendit infinitas x diversas; darff ich also sie nicht auf die assumtionem unius certae x gründen; aber wenn ich einmahl die summationem per calculum indefinitum gefunden, da kan ich es denn ad casus speciales appliciren, und x oder y expliciren; vorhero aber ists nicht zugelassen und werden dergestalt freylich impossibilia mit hauffen herfürtreten; also in summatione darff man x pro constante nicht nehmen.

Der Regressus in Calculo differentiali a d ad $\int$, nehmlich dass man die quadraturas entweder absolute finde oder ad simpliciores v. g. circuli et hyperbolae etc. reducire, item dass man die curvas per proprietatem tangentium datas reducire ad quadraturas oder gar ad aequationes ordinarias: das sind dinge, so Kunst erfordern, und noch nicht ad perfectam methodum gebracht. Ich habe zwar die wege dazu, aber solche wege zu gehen und die nöhtige canones auszucalculiren, dazu habe ich keine Zeit; ich müste an einem orth seyn, da junge curiose leute wären, die sich auf diss studium rechtschaffen appliciren und etwas rechtschaffenes darinn thun wolten, die könten inter exercendum sese solche Dinge ausmachen; ich

kan die Zeit auf lange calculos nicht wenden. Mir gehet es wie dem tiegerthier, von dem man sagt, was es nicht im ersten, andern oder dritten sprung erreiche, das lasse es lauffen.

Ich habe unlängst Actis Lipsiensibus inseriren lassen einen newen wunderlichen motum, der gantz richtig und regular, aber vor den in Geometria gebräuchlichen motibus gantz unterschieden, durch welchen ich per viam generalem alle quadraturas zu construiren auf einmahl weise. Die occasion dieses motus hat mir feu Mons. Perrault (Medicus zu Paris, so den Vitruvium ediret) gegeben, als er mir ein problema Mechanicum zu solviren proponiret. Ich habe also diese invention schon vor 20 Jahr. Weil aber unlängst auf affine aliquid gefallen, so habe ich gut befunden, damit herfür zu wischen, wiewohl ich nicht besorge, dass man leicht darauf solte kommen seyn. Allein aus dieser construction kan man eben nicht urtheilen, ob die quadratura quaesita nicht auch per Geometriam communem zu verrichten, welches wo es geschehen kan, braucht man die viam extraordinariam nicht.

Quaeritur mensuratio portionis Lunulae ADEA (fig. 108). Quod ut fiat, quaerendum est ejus elementum ac summandum. Id elementum est ED(D)E, id est Triang. CD(D)— triang. CE(E). Est autem CD(D) = D(D) in $\frac{1}{2}$CT. AG sit x; GD, y; JF, z; FE, V. AB seu BC seu BD, a; CE, $\sqrt{2aa}$; D(D), dx a : y. Sit BL parallela et aequal. DT, patet triangula BLC et BGD congrua esse seu aequalia et similia. Itaque CL = DG. Itaque CT = a + y (= DH). Ergo CD(D) = $\overline{a+y}$, adx : 2y. Sed x = a — $\sqrt{aa-yy}$, ergo dx = ydy : $\sqrt{aa-yy}$, et CD(D) = ady$\sqrt{\overline{a+y},:,\overline{a-y}}$: 2. Quaeramus jam et CE(E) = E(E) in $\frac{1}{2}$CE. Est antem E(E) = dz$\sqrt{2aa}$: v, ergo CE(E) = dz aa : v. Quaeramus ergo z et v per y. Nempe ob triangula similia DHC et EFC fiet EF (seu v) : DH (seu a + y) :: CE (seu $\sqrt{2aa}$) : CD. Est autem $CD^2 = DH^2 + CH^2$ seu $CD^2 = a^2 + 2ay + yy + aa - yy$, ergo CD = $\sqrt{2aa+2ay}$; ergo fit v = $\sqrt{aa+ay}$. Jam vv + CF^2 = 2aa seu aa + ay + CF^2 = 2aa, ergo CF = $\sqrt{aa-ay}$. Ergo z ($\sqrt{2aa}$ — CF) = $\sqrt{2aa}$ — $\sqrt{aa-ay}$, et hinc dz = ady : 2$\sqrt{aa-ay}$. Ergo CE(E) seu dz aa : v = aa dy : 2$\sqrt{aa-yy}$. Ergo CD(D) — CE(E) = $\overline{aa+ay}$dy — aady, : 2$\sqrt{aa-yy}$ = ay dy : 2$\sqrt{aa-yy}$ = ED(D)(E). Sed $\int$ ED(D)(E) = ADEA, et $\int$, ay dy : 2$\sqrt{aa-yy}$ =

$\frac{1}{2}a$, $\overline{a-\sqrt{aa-yy}}=\frac{1}{2}ax=$ Triang. CAG; ergo CAG = ADEA, ut erat propositum. Si omnia fuissent explicata per x (loco y), facilior fuisset summatio: nam $aydy:2\sqrt{aa-yy}$ dat $\frac{a}{2}dx$, adeoque ED(D)(E) aequ. triang. CG(G).

Itaque propositum Theorema succedit, nempe quod triang. CAG aequatur lunulae portioni ADEA, quod est specimen elegans Methodi nostrae, quae docet calculo invenire demonstrationes theorematum in curva ubique succedentium, etiamsi contineant quadraturas vel aliquid ejusmodi quod Cartesius sua Geometria vel analysi excluserat. Si ab alio propositum sit theorema, non opus est summatione, sed sufficit ipsius trianguli CAG elementum quaeri seu ipsius $\frac{1}{2}ax$, quod utique coincidit cum CD(D)(E) elemento Lunulae.

Die aequationem ad circulum pro aequ. 5 vel 6 dimensionum constituendis zu finden, solte ich eben vor so schwehr nicht halten. Cartesius hat ein gross wesen daraus gemacht; indem ich aber diss schreibe, versuch ich und finde die sache gar leicht. Zum Exempel, ich soll aequ. 5. vel 6. gradus per circulum et parabolam cubicam solviren, so nehme ich zwey aequationes locales an, eine ad circulum, nehmlich $xx+yy+cx+ey+f\overset{(1)}{=}0$, die andere ad parabolam cubicam $x+s\overset{(2)}{=}hz^3$, und nehme dann $z\overset{(3)}{=}y+t$, so wird aus aequ. 2 per aequ. 3 entstehen $x+s\overset{(4)}{=}hy^3+3htyy+3htty+ht^3$; wir nun per compend. (5) nennen $ht^3-s=p$, $m=3ht$, $n=3htt$, so wird aus aequ. 4 werden $x\overset{(6)}{=}hy^3+myy+ny+p$. Solchen valorem substituirt in der aequ. 1, so komt eine aequ. 6ti gradus:

$$\begin{array}{llllllll} hhy^6 & +2hmy^5 & +2hny^4 & +2hpy^3 & +2mpyy & +2npy & +pp & \overset{(7)}{=}0 \\ & & mm.. & 2mn.. & nn..+ & cn.+ & cp & \\ & & & ch.. & 1..+ & e.+ & f & \\ & & & & cm.. & & & \end{array}$$

Gesetzt nun aequatio data sexti gradus per circulum et parabolam cubicam construenda sey $y^6+5y^5+6y^4+7y^3+8y^2+9y+10\overset{(8)}{=}0$, allda 5, 6, 7 etc. bedeuten so viel als literas coefficientes datas qualescunque oder so viel als a, b etc. Diese aequ. 8 gemultipliciret durch hh, komt $hhy^6+5hhy^5+6hhy^4+7hhy^3+8hhyy+9hhy+10hh\overset{(9)}{=}0$; diese aequ. compariret mit der aequ. 7, so haben wir 6 termi-

nos comparandos (denn die ersten treffen ohne den zusammen) und also auch 6 aequationes comparatitias, quarum ope die literae quaesitae c, e, f, s, h, t zu finden, welche ad constructionem circuli et parabolae cubicae erfordert werden. Es ist aber dieses keine sache die meritire dass man sich damit aufhalte. Man braucht ja solcher constructionum wenig. Dass ich aber gesagt, Vietam vel Cartesium in analysi ordinaria nihil circa radices aequationum adjecisse majorum inventis, das verstehe ich nicht de constructione per lineas, sondern de expressione analytica per radices irrationales, gleichwie wir in gradu cubico et quadrato-quadratico haben ex inventis Scipionis Ferrei et Ludovici Ferrarii, jam superiore saeculo editis. Wenn einer diess promoviren wolte, müste er tales formulas radicum irrationalium geben pro aequationibus 5ti vel 6ti gradus.

Die difficultät die M. Hr. sich macht, dass man inter summandum arbitrariam als b addiren kan, wird sich selbst aufheben, wann er die mühe nehmen wil, figuram gegen den calculum zu halten. Zum exempel, wenn ich summiren soll dx, so kan ich schreiben x+b, weiln diese formula rursus differentiata ja gibt dx, indem das b verschwindet. Diss zeigt auch die figur 109. Gesetzet AB oder BC sey x, und D(C) sey dx, und EB sey b, so sieht man ja dass DC sey die differentz nicht nur zwischen BC und (B)(C), sondern auch zwischen EC und (E)(C) und wenn man alle dx will zusammen summiren zwischen C und A, so macht ihre summa so viel BC oder AB oder x; will man sie aber zusammen summiren von C an biss nacher K, so macht ihre summa EC oder KE oder x+b; liegt es also daran wo man anfangen und aufhören will. Eine gleiche bewandtniss hat es auch mit dem signo —; denn gesetzet KE oder EC heisse z, so wird D(C) heissen können dz, und die summa von allen dz von C an biss K ist z, nehmlich EC oder KE, aber von C biss A ist sie z—b, nemlich AB vel BC. Wenn man anstatt KE oder AB annehme QE und solches nennete v, und dv adhibirte, und QK nennete c, so würde auf gewisse masse (C)D seyn —dv, weil alle die EC wachsen wenn die QE abnehmen und die summa von —dv würde seyn c—v; liegt also diese variation nur an dem modo incipiendi vel finiendi summationem, und daher ist bey $\int aadx : \sqrt{2aa-ax}$ nicht mehr schwürigkeit

als bey $\int aadx:\sqrt{2aa+ax}$, und wenn ich demnach gesaget, dass die Kunst noch nicht ausgemacht, so verstehe ich es von dergleichen nicht.

Quadratura Hyperbolae ope lineae logarithmicae ist ohne difficultät, und von P. Gregorio a S. Vincent. in effectu schon ausgemacht. Unser calculus aber gibt sie ohne caeremoni; denn es ist ja in Hyperbola $y=aa:x$. Sumamus a pro unitate, ergo quaeritur $\int dx:x=z=\int ydx$. Dico z esse ordinatam ad curvam logarithmicam, posito x esse abscissam; quod sic ostendo: $dz=dx:x$, ergo $xdz=dx$. Ponamus dz esse constantem, erunt z progressionis Arithmeticae seu uniformiter crescentes; at vero x erunt proportionales ipsis dx (ob aequ. $xdz=dx$, quia dz constans proportionem non mutat), ergo x sunt proportionales suis differentiis; sed termini proportionales suis differentiis sunt progressionis Geometricae; ergo si z sint progressionis arithmeticae, erunt x progressionis Geometricae, adeoque si x sint numeri, z erunt logarithmi. M. Hr. conjungire damit meine constructionem catenariam per logarithmos, wird er alles leicht finden. Es erfordern diese dinge nur attention, massen sie ausgemacht. Item in dem schediasmate, da ich zuerst Elementa calculi differentialis gesetzt, solvire ich eine curvam Cartesio nequicquam quaesitam, und weise dass es sey Logarithmica.

Weil sich M. Hr. so geneigt erbothen mit einigen inquisitionibus mir oder vielmehr der scientz zu assistiren, so habe ich beykommendes vorschlagen wollen. Es komt nehmlich alles darauff an, dass man die Aequationes differentiales von ihren differentialitatibus liberiren kann. Will demnach von denen anfangen, da dx oder dy nicht zur potenz steiget, sondern simplicis gradus bleibet, und diese aequationes haben wieder ihre gradus, nachdem x und y selbst hoch hinauff steigen. Der erste gradus ist da x und y selbst über den gradum simplicem nicht kommen, und wäre dessen aequatio generalis: $aadx+bbdy+c^2xdx+d^2ydy+q^2xdy+r^2ydx \overset{(1)}{=} 0$, da dann aa, bb etc. sint quantitates datae. Solche zu resolviren, nehme ich eine aequationem differentialem resolubilem und zwar diese zureichende $dz:\overline{g+fz} \overset{(2)}{=} dv:\overline{l+ev}$, als welche per logarithmos

zu solviren, denn $\frac{1}{f}$ logarith. $\overline{g+fz} \overset{(2)}{=} \frac{1}{e}$ log. $\overline{1+ev}$, es wäre denn dass e oder f wäre $=0$, so wäre der log. nur auf einer seite, als wenn $f=0$, so würde es heissen $\frac{1}{g}z \overset{(3)}{=} \frac{1}{e}\log. \overline{1+ev}$ und dergleichen. Nun setze ich ferner, es sey $z \overset{(4)}{=} hx+ky$ und $v \overset{(5)}{=} nx+py$; als explicando wird aus aequ. 2 per 4 und 5 werden

$$\begin{array}{llllll} +hldx & +kldy & +ehnxdx & +ekpydy & +eknxdy & +ehpydx \\ +gn.. & gp.. & fhn.. & fkp.. & fhp.. & fkn.. \end{array} \overset{(6)}{=} 0.$$

Solche aequ. 6 comparirt mit der aequ. 1 data finden wir die valores literarum $l, g, h, p, kn, e:f$. Dann aus denen Terminis dx und dy wird $g \overset{(7)}{=} aak-bbh,:,nk-hp$ (oder $g=\frac{aak-bbh}{nk-hp}$ vel $g=\frac{bbh-aak}{hp-nk}$) und $l \overset{(8)}{=} aap-bbn,:,-nk+hp$ (vel $l=bbn-aap,:,nk-hp$). Ferner aus den terminis xdx und ydy wird man bekommen, aus xdx zwar $h \overset{(9)}{=} c^3:,ne+nf$, aus ydy aber wird man bekommen $p \overset{(10)}{=} d^3:,ek+fk$. Folgt endlich xdy und ydx: aus xdy, wenn man h und p vermittelst der valorum 9 und 10 abschaffet, komt $kn \overset{(11)}{=} q^3:2e+\sqrt{q^6ee+2q^6ef+q^6ff-4efc^3d^3}:,2ee+2ef$; aber aus ydx komt auf gleiche weise $kn \overset{(12)}{=} r^3:2f+\sqrt{r^6ee+2r^6ef+r^6ff-4efc^3d^3}:,2ff+2ef$. Wenn man nun diese beyde valores aus den aeqq. 11 und 12 mit einander vergleichet, so komt $q^3ff-r^3ee+q^3fe \overset{(13)}{=} e\sqrt{r^6ee+\text{etc.}}-f\sqrt{q^6ee+\text{etc.}}$ Wenn man nun diese aequationem evolviret und die irrationales abschaffet, wird man endlich finden valorem (14) ipsius $e:f$ oder rationis e ad f, also dass wenn man f und n pro arbitrio annimt oder unitati gleichschätzet, oder wie es sich sonst am besten schicket, so kan man ope aequ. 12 haben k und ope aequ. 14 haben e, und sind also alle literae quaesitae ad construendum necessariae in aeqq. 2, 4, 5 gefunden, und wäre also die aequatio data 1 solviret. Wäre also gut, dass der calculus gantz ausgemacht und ab ovo (damit nicht etwa ein irrthumb einschleiche) resumiret, und sonderlich die aequ. 13 evolvirt würde, da ich dann ferner anweisen köndte, wie höher hinauff zu steigen.

Weil ich dabey bin, so will ich noch einen Calculum vorschlagen, der sehr nützlich seyn würde, weil M. Hr. ja die gütigkeit haben will sich damit zu exerciren. Es läufft in die Methodos Diophanteas hinein, hätte aber auch grossen usum in unserer Geometria altiore, wie ich zeigen werde. Gesetzt es sey ⊙⊙ + ab☽☽ $\overset{(1)}{=}$ ☿⁴, und ⊙ sey $\overset{(2)}{=} ac + ex + \frac{f}{a}xx$, ☽ $\overset{(3)}{=} g + \frac{h}{a}x + \frac{k}{aa}xx$ et ☿ $\overset{(4)}{=} m + \frac{n}{a}x$. Solche valores nun aus den aeqq. 2, 3, 4 substituirt in der aequ. 1, so komt aequ. (5) welche zu identica zu machen oder in welcher die termini lateris unius seu valoris ⊙⊙ + ab☽☽ mit den terminis respondentibus des andern lateris seu valoris ipsius ☿ zu compariren, und mit hülffe dieser comparationen die valores literarum quaesitarum c, e, f, g, h, k, m, n zu suchen, weilen ich supponire, dass a und b allein datae; da dann nichts nachzufragen, ob die valores rationales oder irrationales seyn, worumb man sonst in methodo Diophantea sich bekümmert.

Was $\int, axdx : \sqrt{aa+xx} \overset{(1)}{=} az$ betrifft, wenn M. Hr. belieben wird die figur aufzureissen, wird er besser sehen, worumb die cautiones nöhtig so ich gegeben, dass man nemlich zusehe, wo man in summando anfange. Sit $xx \overset{(2)}{=} ae$ et $a + e \overset{(3)}{=} v$, fit $de \overset{(4)}{=} dv$, $xdx \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}ade$ et $z \overset{(6)}{=} \frac{a}{2}\int dv : \sqrt{av}$. Gesetzt y sey $\overset{(7)}{ax : \sqrt{aa+xx}}$, und ω sey $\frac{1}{2}aa : \sqrt{av}$, so ist zwar $\int \omega dv = a\sqrt{av}$, aber das ist zu verstehen, wenn man die v anfanget zu nehmen ab initio wenn die kleinste v ist 0, allein hier fangt man an da die kleinste x ist 0 oder da die kleinste e ist 0, und per consequens da die kleinste v ist a. Gesetzt CA (fig. 110) sey e, so würde FA seyn v, posito FC esse a. Daher wenn man aus $\int \omega dv$ finden will $\int ydv$, muss man von $a\sqrt{av}$ abziehen $a\sqrt{aa}$ oder aa, nehmlich das theil von von $\int \omega dv$, welches zwischen F und C oder über CD fället. Und solches giebt jedesmahls der Calculus selbst, weil man ja daraus siehet, ob beyde als e und v oder x und e zugleich verschwinden oder zu nichts werden, oder was dem einen überbleibt, wenn das andere zu nichts wird. Diese Dinge einmahl vor allemahl gründlich zu fassen, muss man die calculos gegen die figuren halten; wenn man aber den grund einmahl hat,

ists weiter eben nicht von nöthen, als in einigen schwehren fällen. Wird also hier seyn $d,a\sqrt{av}-aa = d,a\sqrt{aa+xx}-aa = axdx:\sqrt{aa+xx}$.

Was den andern calculum *) belanget, so komt es darauf an, dass ope aequationum comparatitiarum ob x^4, x^3, x^2, x^1 auch 5 literae gefunden werden vor deren assumtitiis c, e, f, g, h, k, m, n; daraus zu sehen, dass deren 3 übrig, so indeterminat bleiben und selbst pro arbitrio commode zu determiniren. Nun m et n sind bereits depechiret, dieweil wir haben valorem m:n und valorem mn, positis reliquis; oder wir könnens bey valoribus ipsorum m^4 et n^4 lassen; haben hierinnen die wahl. Sind also damit duae aequationes comparatitiae depechiret, und bleiben noch 3 zu solviren; aus so vielen kann man 3 der bequemsten wehlen; ich solte fast wehlen $3\gamma\gamma = 2\beta\delta$ oder $3,\overline{aef+bhk}^2 \overset{(1)}{=} 2,aff+bkk,\ 2acf+aee+2bgk+bhh$

$3\zeta\zeta = 2\Theta\delta$ oder $3,\overline{aec+bhg}^2 \overset{(2)}{=} 2,acc+bgg,\ 2acf+aee+2bgk+bhh$

$\gamma\zeta = 4\beta\Theta$ oder $aef+bhk,aec+bhg \overset{(3)}{=} 4,aff+bkk,\ acc+bgg$;

denn aequ. 3 ist justitiaria per se und aequ. 1 et 2 sunt justitiariae si simul sumantur. Mit hülffe der 3 aequationen könten glaub ich zuförderst e und h gesuchet werden; denn darinnen observiret man abermahls justitiam, denn die beyden allein haben eine praeferentz vor den andern incognitis, als welche aus den mittel; ja findet sich auch dass sie am wenigsten steigen, nemlich nur auf den quadratum, da sonst f, k, item c, g ad cubum kommen. Wenn man nun der literarum e und h valores hat, und solche aus der letzten aequation weggebracht, bleibt eine aequatio ultima, so ziemlich hoch seyn muss, darinnen sind literae f, k, item g, welche die justitz observiren müssen und zwar auf eine doppelte Weise: nemlich wie sich c verhält respectu f; g, k, so muss sich f verhalten respectu c; k, g, und wiederumb wenn man fingiren wolte b=a (ob es schon nicht ist) so müssen c und f stehen wie g und k respective, welches pro examine calculi dienet, wozu ich considerationem justitiae vel homoeoptoseos nützlich finde, ander nutzen zu geschweigen. Weilen aber die letzte aequation nur eine incognitam erfordert, und doch 4 arbitrarias hat, so kan man das übrige pro arbitrio, doch mit vortheil annehmen, die aequationem dadurch zu deprimiren und eine von den literis also zu erlangen, dass also allem eine gnüge geschehe. Besser wäre es wenn man ein baar

---

*) Siehe oben.

von den arbitrariis c, f, g, k in antecessum mit nutzen determiniren könte, umb dadurch den calculum altiorem zu praecaviren. Also stünde zu untersuchen, ob man nicht mit nutzen assumiren könte $2, aff + bkk \overset{(4)}{=} aef + bhk$, et $2, acc + bgg \overset{(5)}{=} aec + bhg$. Denn per 4 et 5 invicem ductas redit aequ. 3; daher es schon scheinet, als ob wir zwey sumtiones gethan, ist es doch reapse nur eine, denn die andere folget per aequ. 3 von sich selbsten, und bleibt also die justitz; und aus aequ. 1 wird per 4 entstehen: $3, aef + bhk \overset{(6)}{=} 4, 2acf + aee + 2bgk + bhh$, und aus der aequ. 2 wird per 5 entstehen: $3, aec + bhg \overset{(7)}{=} 4, 2acf + aee + 2bgk + bhh$. Daraus wird per 6 et 7 werden: $aef + bhk \overset{(8)}{=} aec + bgh$, und folglich per 4, 5, 8 wird: $aff + bkk \overset{(9)}{=} acc + bgg$. Hat also diese eintzige supposition grosse depressiones gemacht, wenn wir nur nicht dadurch zuletzt in incommoda verfallen. m wird dadurch $\overset{(10)}{=}$ n, welches noch thunlich. Hat man also simplicissimas aequationes 6, 8 et 9, quae sufficiunt quaesito absolvendo, si modo sic licet. Ex aequ. 8 haberi potest valor ipsius e vel ipsius h; eligatur h, fiet $h \overset{(11)}{=} e, a\overline{c - f} : b\overline{k - g}$. Hic valor ipsius h in aeq. 11 substituatur in aequ. 4 et fiet: $e \overset{(12)}{=} aff + bkk, k - g, : a\overline{ck - fg}$. Unde ex lege justitiae pare jure absque calculo praevidemus fore $h \overset{(13)}{=} aff + bkk, f - c, : b\overline{fg - ck}$, quanquam hoc et prodeat ex aequ. 11 per 12. Hos valores e et h ex 12 et 13 substituamus in alterutra aequ. 6 vel 7; eligamus 6 et evolutionibus factis oportet destrui quaecunque impediunt justitiam, et prodibit aequatio (14), in qua a, c, f; b, g, k sibi respondebunt, quemadmodum et c ipsi f et g ipsi k; quemadmodum talis justitia duplicata etiam observatur in aequ. 9. Jam habemus duas residuas aequationes, nempe 9 et 14, in quibus extant literae c, g, f, k, quarum ope si inveniamus valorem unius literae veluti k per ipsas c, g, f, et ejus ope tollamus k ex alterutra aequatione, prodibit aequ. (15) in qua extabunt solum c, g, f. Ubi alterutra ex ipsis c vel g videtur adhuc determinari posse, ut contrahatur calculus, vel assumi potest quaecunque nova determinatio apta. Sed hoc jam dissimulato, sufficit nos habere jam aequ. 15, cujus ope habetur f ex a, c; b, g; unde ex lege justitiae similiter habetur (16) k per b, g; a, c, ita ut aeqq. 15 et 16 non differant nisi hac transpositione. Assumta ergo relatione aliqua inter a, c; b, g, quae et ipsa legem justitiae servet, qua contrahatur alterutra aequ. 15 vel 16, contra-

hetur et altera similiter. Et tandem inventi valores substituentur in ☉ et ☽ et ☿, et postremo instituetur comprobatio, id est, substitutis valoribus in ☉☉ + ab☽☽ = ☿⁴, explorabitur an omnia succedant, qui erit finis finalis.

Quodsi res succederet, nec forte occulto naturae eludentis artificio incongrua emergant, quae Hypothesin 4. non permittendam ostendant, vel etiam sine hypothesi 4, si saltem solvi possent aeqq. 1, 2, 3, licet prolixius, haberetur res maximi post quadraturam Circuli et Hyperbolae in Geometria Tetragonistica seu sublimiore momenti, nisi me omnia fallunt. Denn ich habe Mittel ausgefunden, dass die applicatio Calculi Diophantei ad Geometriam treffliche bisher unbekandte vortheile brächte, und ist bey dieser applicatione Calculi Diophantei die bequemlichkeit, dass man quoad valorem quantitatum determinatarum als c, e etc. an rationales nicht gebunden, sondern wohl zufrieden, ob man sie schon in surdis erlanget, wenn nur die indeterminatae als x, y und similes extra vincula oder irrationalitates bleiben.

Es ist in effectu dasjenige, was ich hier suche, nichts anders als ☉ et ☽ ita explicare per x, ut ☉☉ + ab☽☽ aequetur quadrato-quadrato. Ebenmässig wäre mir folgendes problema trefflich nützlich, wenn ichs dicto modo solviren könte: Ipsi x talem dare valorem rationalem per y, ut $x^4 + abxx + a^3c$ aequetur quadrato. Ex. gr. fiat $x = \frac{amy + a^2n}{py + aq}$, et hic valor substituatur in $x^4 + abxx + a^3c$, desideratur ut reductis omnibus ad communem denominatorem qui est quadratus ab $yy + py + ay$, fiat et numerator quadratus, id est, assumtitiae m, n, q sic explicandae sunt ut hoc succedat. Nam unam ut p omitto, quia non auget libertatem, sed tantum adhibita est aequilibrii causa. Quodsi valor assumtus non sufficeret, assurgendum esset ad $\frac{x}{a} = \frac{lyy + amy + a^2n}{pyy + aqy + aar}$. Haec si haberi possent, essent maximi momenti inter omnia, quae hactenus in negotio Tetragonistico quaesivi, si nempe semper sic applicari posset Methodus quasi-Diophantea, et haberemus novum plane Analyseos ut sic dicam genus ad determinandum quae in quadraturis sunt possibilia. Nam Diophanteae Methodi ad Geometriam applicationem excoli inprimis optarem. Quaeruntur autem hic semper solutiones indefinitae, sed vicissim in ipsis definitis literis non moramur aut refugimus irrationalitates, quod secus est apud Diophantum.

Hieraus siehet M. Hr. was an den überschickten Calculis ad analysin sublimiorem gelegen; der eine dienet ad Methodum Tangentium inversam und gibt deren ersten gradum, der andere dienet ad Analysin Tetragonisticam promovendam, welches erwehne nicht nur, weil es an sich selbst considerabel, sondern auch damit Sie sehen, dass ich nicht ohne wichtige ursach auf Dero so gütiges erbieten beruhen wollen, und noch ferner die freyheit genommen de perficiendo calculo zu consultiren, welches dafern ichs temere gethan habe, würde ich, der so viel in diesem brieff de justitia Algebraica in calculis servanda, und mehr als vielleicht davon in einigem buch gedacht werden, geschrieben, in der that eine injustitiam moralem begangen haben.

Es ist gantz nicht nöthig ad summandum, dass die dx oder dy constantes und die $ddx = 0$ seyen, sondern man assumiret die progression der x oder y (welches man pro abscissa halten wil) wie man es gut findet. Und das ist eben auch eines der avantagen meines calculi differentialis, dass man nicht sagt die summa aller y, wie sonst geschehen, sondern die summa aller ydx oder $\int\overline{ydx}$, denn so kan ich das dx expliciren und die gegebene quadratur in andere infinitis modis transformiren und also eine vermittelst der andern finden. Als gesetzt x sey gleich $zz:a$, so ist $dx = 2zdz:a$, also auch ydx wird $2yzdz:a$, und aus $\int\overline{ydx}$ fit $2\int\overline{yzdz}:a$. Es hat sich auch schon der Gregorius a S. Vincentio dieses vortheils bedienet, denn indem er in Hyperbola die abscissas partes asymptoti in progressione Geometrica angenommen, hat sich ergeben, dass die quadratura Hyperbolae sich reduciret auf die logarithmos, welches auch unser Calculus zeiget, wie M. Hrn. bereits bewust.

Ich bin selbst derjenige der die relation von des Osanna Dictionario Mathem. in die Acta zu Leipzig setzen lassen und entworffen, und als ich Hrn. Tschirnhaus theoremata extemporaneo calculo wahr gefunden, solches dabey notiret. Da hingegen der gute Osannam daran gezweifelt, als der einer von den gästen ist, die was sie nicht verstehen, gern eleviren.

Hr. Bernoullius junior, nunmehr Prof. Mathes. zu Gröningen, hat ein aus der massen schön Problema proponirt und ausgefunden ope Methodi nostrae: Datis duobus punctis A, B (fig. 111) invenire lineam ADB, per quam grave C ab A ad B brevissimo tempore pervenire potest. Denn es ist zu wissen, dass die via directa per rectam AB bey weitem nicht facillima oder promtissima sey, und habe ich ea occasione dieses leichte, doch (meines ermessens) schöne Theorema gefunden: In Triangulo rectangulo Pythagorico (fig. 112) (ut quidam κατ᾽ ἐξοχήν sic vocant) id est, cujus latera uti 3, 4, 5, ita erecto ut latus minus sit verticale, grave eodem tempore perveniet ab A ad C, sive tendat recta per hypotenusam AC sive per AB, BC latera circa rectum; in praxi tamen, ne grave descendens in B impingat et repercutiatur, debet angulus B nonnihil intus rotundari, interposita portiuncula quantulacunque curvae cujus tangentes sint AB, CB; ita sine ulla resistentia transibit ex AB in BC. Utile etiam erit, angulum ABC tantillum fieri obtusum, ut globulus descendens innitatur inter descendendum nec cadendo impingat. Die demonstration ist leicht: Producatur BC in E, ut BE sit aequ. duplae AB; ergo tempus quo grave descendit per AB, est aequale tempori quo motum continuat (quaesito in B impetu) per BE. Jam tempus per BC est ad tempus per BE seu per AB, ut BC ad BE, seu ut 4 ad 6 seu ut 2 ad 3. Ergo tempus per AB + temp. per BC est ad tempus per AB ut 3+2 seu 5 ad 3. Sed tempus per AC est ad tempus per AB ut AC ad AB, seu etiam ut 5 ad 3. Ergo aequalia sunt tempora per ABC et per AC. Quodsi BC ad AB majorem habeat rationem quam 4 ad 3, tunc promptior erit via per latera quam per hypotenusam, sin minorem, contra.

Ich hatte fast lust dieses Theorema mit der demonstration im fall es nicht etwa schon bekandt, mit sambt dem problemate welches wohl gewiss von niemand bissher resolviret, den Hrn. Welschen communiciren zu lassen, so in dem Diario Mutinensi vielleicht geschehen köndte; habe auch gegen Hrn. Magliabecchi darvon gedacht. M. Hr. (nach dessen bekandten gütigkeit zu mir) würde vielleicht nach gutbefinden belieben es zu entwerffen und mit Magliabecchi zu concertiren, wie die sache in ihr Giornale zu bringen. Inzwischen könte man doch ihre Hrn. Florentiner und Pisaner darüber vernehmen. Haec omnia tuo judicio et benignitati committo.

Meine philosophica abstractiora, dergleichen ich mit Hrn. Arnaud, Hrn. P. Malebranche, Hrn. Sturmio zu Altorff und einigen andern agitiret, theils auch etwas davon in das Journal des Sçavans zu Paris setzen, weil die Frantzosen von dingen etwas mehr werks machen als zumahl die teutschen, werde ich einmahl wils Gott zusammenfassen, zumahl wenn ich zeit hätte meine Theodicaea auszuarbeiten, darinnen ich die Knoten de fato et contingentia, gratia et libertate, et jure Dei aufzulösen vermeyne, und weisen werde, wie sogar die Mathematick in dergleichen zwar analogice, doch also helffe, dass man von den Dingen genauere notiones bekommt.

Was ich de justitia Analytica gedacht, ist zwar nicht eben de necessitate, aber vielleicht ad melius esse, wie man redet, dienlich. Diese arth von justitz inzwischen in etwas zu erklären, so verstehe solche: wenn gleichwie in der justitz gegen Menschen kein acceptio personarum, also hier die literae auf gleichen fuss tractirt werden, und zwar zu zeiten ohne unterschied, zu zeiten etliche mit ihres gleichen und andere wieder mit ihres gleichen.

Repetamus tres aequationes ex tuis, quibus justitiae quiddam inesse notaveram:

$$3(aef + bhk)^2 \overset{(1)}{=} 2{,}aff + bkk,\ 2acf + aee + 2bgk + bhh$$

$$3(aec + bhg)^2 \overset{(2)}{=} 2{,}acc + bgg,\ 2acf + aee + 2bgk + bhh$$

$$aef + bhk,\ aec + bhg \overset{(3)}{=} 4{,}aff + bkk,\ acc + bgg.$$

(1mo) in aequ. 3 habent sese a, e, f, ut b, h, k respective

(2do) a, e, c, ut b, h, g

(3tio) f,k , ut c, g.

(4to) in aequatione 1 singulatim sumta, vel in aequ. 2 singulatim sumta habent locum tam habitudo articuli 1 quam articuli 2, sed non articuli 3.

(5to) itaque aeqq. 1 vel 2 non sunt perfecte justitiariae, quia non eodem modo tractant f, k, ut c, g.

(6to) sed aequ. 3 est perfecte justitiaria, quia hunc defectum supplet, cum calculus integer ostendat f, k; c, g debere pari jure uti.

(7mo) aeqq. 1 et 2 simul sumtae etiam sunt perfecte justitiariae, ut ipse calculus integer, velut aequ. 3 quae calculo integro justitia non cedit.

(8vo) Et si nova aequatio ex ipsis 1 et 2 inter se eodem modo conjunctis fiat, ea erit etiam perfecte justitiaria.

Nachdem ich aber dergestalt wieder etwas tieff in die schrifft dieser aequationum kommen und mich mit meditiren so weit darinn eingelassen, so habe versuchen wollen, ob ich uns ein vor allemahl davon erlösen könte, welches auch endlich, doch nicht ohne mühe und zeit, folgender massen angangen. Compendii causa scribam (1mo) 3☉☉=2♂,♃+2♄, et (2do) 3☽☽=2♀,♃+2♄, et (3tio) ☉☽=4,♂♀, ubi patet quid ☉, ☽, ♂, ♀, sed per ♃ intelligo aee+bhh, et per ♄ intelligo acf+bgk. Post multas autem ambages reperi tandem (4to) fg=ck seu k=fg:c, qua explicatione ipsius k satisfit aequationi 1, ut haberi possit pro expedita; eo ipso enim reducitur ad aequationem 2. Restant ergo solvendae aeqq. 2 et 3. Ob 4 fit (5to) ☉=☽f:c, et (6to) ♂=♀ff:cc, hinc sublatis ☉ et ♂ aequ. 3 fit (7mo) ☽=2♀√f:c. Rursus per 4 sublato k ex valore ipsius ♄, fit (8vo) ♄=♀f:c, ergo ex aequ. 2 et (9mo) 3☽☽=2♀,♃ +2♀f:c, unde per aequ. 7 tollendo ☽ et explicando ♃, fiet (10mo) 4♀f:c=aee+bgh, sed ex aequ. 7 pro ☽ ponendo ejus valorem initialem, fit ace+bgh=(11mo) 2♀√f:c. Unde per aeqq. 10 et 11 calculo vulgari et facili nec ultra planum assurgente, habentur e et h per a et b datas et ipsas e, f, g, k (quae etiam latent ex parte in ♀) pro arbitrio assumendas, modo fiat k:f=g:c seu fg=ck. Et hoc modo tribus aequationibus propositis est satisfactum.

Es wäre auch gut, wenn der valor ipsarum e et h ex aeqq. 10 et 11 evolutus dazu kāme. Er ist leicht zu finden. Ich habe nicht wenig mühe gehabt, zumahlen weil ich wegen distraction des gemühtes meinem löblichen gebrauch nach etlichmahl falsch gerechnet, biss ich den clavem, nehmlich fg=ck gefunden, durch dessen herausbringung aber ist alle schwührigkeit gehoben gewesen.

Ich*) hoffe es werde Hrn. Viviani sonderlich wohl gefallen haben, wenn er wird erfahren haben, dass die vulgaris linea Cycloidalis selbst die linea brevissimi descensus sey. Wir haben es alle (die wir nemlich Calculum differentialem gebrauchen) uno consensu gefunden, doch haben Hr. March. Hospitalius und Hr. Prof.

*) 30. September 1697.

Bernoullius zu Basel etwas mehr mühe gehabt als ich, ehe sie dazu gelanget, denn es mir nur etliche stunden gekostet; sie hatten viele Monath gewartet, biss sie endlich dahinter kommen. Doch ist des Hrn. Jacobi Bernoullii methodus, so er in den Actis erkläret, von der meinigen nicht viel entfernet, wiewohl er etwas mehr umbschweiff nimt. Ich schicke M. Hrn. das fragmentum Actorum selbst, weilen es von importanz.

Was die demonstrationes syntheticas betrifft, so bestehet freylich des Vietae weg öffters darinne, dass er per substitutiones und viele Lemmata der sache hilfft; doch ist einige Kunst gleichwohl darinnen, dass man so viel thunlich immer per propositiones elegantes procedire, oder doch deren underschiedene einmische, und das pflegte Vieta zu thun. Schotenius hat etwas de syntheticis demonstrationibus ex Analysi eliciendis, ist aber nicht viel besonders. Unsere Calculos infinitesimales ad demonstrationes rigorosas zu bringen, darff man nur meine Lemmata incomparabilium consideriren, die ich einsmahls in Actis gegeben; bestehet nehmlich in der gemeinen Geometria, nur dass man in unserm calculo auslässet, was in der construction inconsiderabel oder unvergleichlich klein, als dasjenige, so man stehen lässet; denn man kan allezeit weisen, dass solches elidendum minus quovis dato more Archimedeo.

Es soll Hr. la Hire ein buch de Epicycloidibus vel lineis quae describuntur circulo voluto super circulo herausgegeben haben, darinn er einige dinge, so Hr. Hugenius, Hr. Tschirnhaus und ich gefunden, more Veterum demonstriret; ich wil ihm die ehre gern gönnen, und mag wohl leiden, dass jemand die mühe mit unsern inventis nehme, inzwischen so hat Hr. la Hire nicht unrecht einige fehler des Hrn. Tschirnhaus geahndet, welcher bissweilen ein wenig zu geschwind gehet und doch dabey gar hoch spricht; ich möchte ihm aber candorem dabey wündschen, den er zwar offt recommendiret, aber nicht allemahl selbst übet.

Es *) wird gewiss Hrn. Viviani nicht übel gefallen, dass die linea cycloidalis diese schöne proprietät hat, ut sit tam brachisto-

*) 6. Decbr. 1697.

chrona wie hier erwiesen, quam tautochrona, wie von Hugenio erwiesen worden. Vielleicht gefället ihm auch nicht weniger, dass die Cycloidalis zugleich sey linea segmentorum circuli, wie die Quadratrix ist linea sectorum seu arcuum. Das würde Keplero wohl angestanden haben, wenn ers gewust, denn er viel mit dem problemate zu thun gehabt, wie man datae magnitudinis segmentum vom Circkel abschneiden solle und folglich Ellipsis portionem magnitudine datam pro motu planetarum, weilen sich ziemlich findet, supposito motu Elliptico, esse tempora ut areas Ellipticas, dessen rationem physicam ich in Actis ex Circulatione Harmonica illustriret.

Mit dem calculo der 3 aequationum evolvendarum halte sich M. Hr. nicht länger auf, ich habe ihn längst ausgemacht. Der andere (aequationum differentialium) meritirte es vielleicht mehr, weilen dadurch viel aequationes differentiales primi gradus seu Tangentium universae ad quadraturas zu reduciren, und solcher methodus ad altiores zu prosequiren; doch alles bei M. Hrn. guter gelegenheit.

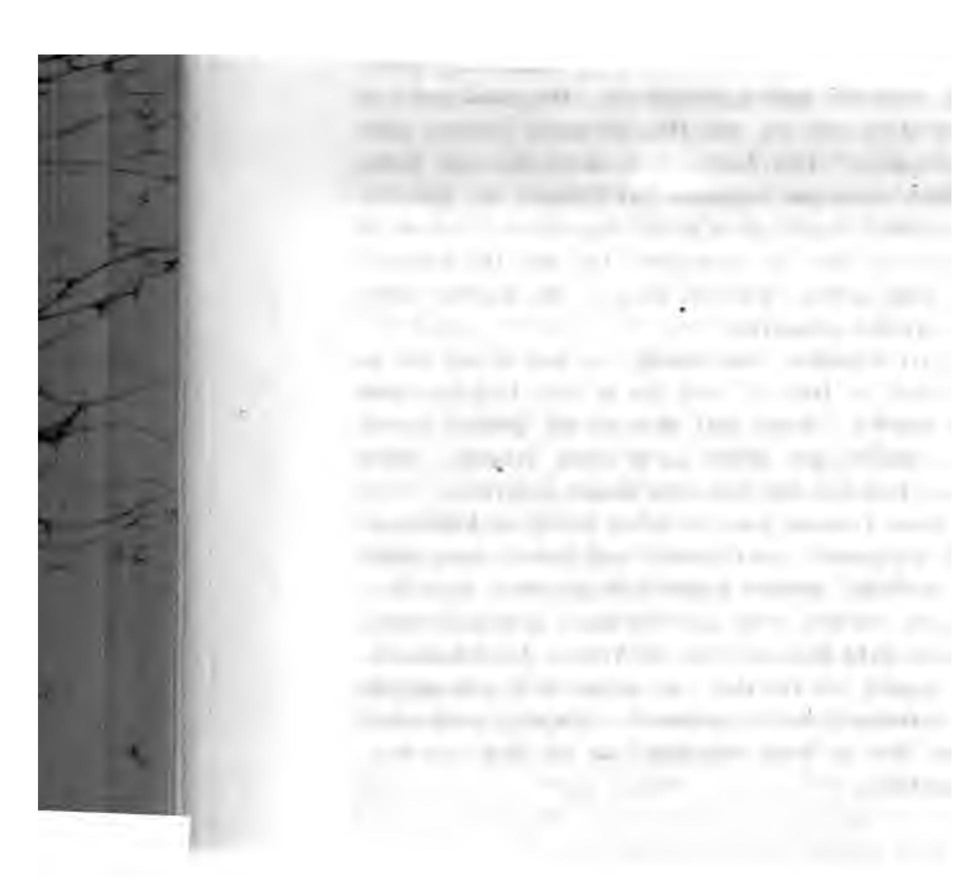
Es ist mir lieb dass des Hrn. Marquis de l'Hospital buch zu handen kommen, und wird es nicht wenig dienen zu erläuterung dessen so in Actis Eruditorum enthalten. Dass er aber de Summis nicht gedacht, ist die ursach, weilen er nur partem primam Calculi nostri, nemlich differentiationem illustriren wollen, wiewohl ex differentiis die summa allein zu finden, eben wie analysis potestatum ex genesi zu deduciren.

Mein buch de Scientia infiniti ist noch zur zeit ein blosses project; ich hätte wohl materi es anzufüllen; es gehet mir aber wie dem Hrn. Viviani. Wenn in der nähe ein wackerer Kopf wäre, der sich zu diesen meditationibus schickte, so wäre viel thunlich, allein ich weiss noch keinen in gantz Teutschland. Hr. Tschirnhaus hat genug mit seinen eigenen erfindungen zu thun, die aber bey ihm gar zu fest sitzen und nicht heraus wollen. Ich weiss von keinem methodo locorum die er mir communiciren zu haben sagt. Als er einsmahls durchreisete, erzählte er mir allerhand theoremata specialiora die er hoch hielte, ich kondte aber deren sonderbaren Nutzen nicht sehen, weniger einen methodum locorum daraus finden. So hat er auch die Curvas a Dn. Joh. Bernoulli propositas gar nicht finden können, die doch Hr. Jac. Bernoulli und andere mit mir gefunden. Meine Methodus ist viel weit aussehender und wichtiger, als die deren die Hrn. Bernoullii sich bedienet,

wie Hr. Joh. Bernoullius selbst bekennet. Entstehet ex consideratione radicum diversarum ejusdem aequationis, und darff ich nur eine curvam finden, deren aequationem secundum x et y conjungendo cum aequatione secundum x et y curvae problematis propositi localis, quae quaesitam in punctis desideratum effectum praestantibus secare debeat, prodeat aequatio unius incognitae talis, ut in ea radices habeant inter se relationem propositam, v. g. ut earum summa sit aequalis datae quantitati etc. Dergestalt gehet es an nicht nur vor 2 puncta, wie mit Hrn. Bernoulli, sondern auch pro punctis quotcunque. Diss Artificium ist mir schon vor vielen Jahren beygefallen occasione cujusdam loci Fermatii in Epistolis Cartesii, da Fermatius aliquid tale zu praestiren gedencket, aber nicht sagt, wie; ich habe es aber nie practiciret, biss mir Hr. Bernoullius gelegenheit dazu geben. Dadurch ist auch die Analysis communis umb ein grosses promoviret.

Was meinen Calculum situs betrifft, so kan er von mir ja nicht ediret werden, so lange er auch nur in Idea bestehet, und nicht appliciret worden. Wolte Gott, dass ich mit jemand coram davon conferiren kônte; per literas ist es etwas schwehr; denn die sach ist allzu weit von den gemeinen weisen entfernet.

Was die Loca Veterum plana et solida betrifft, so haben meines ermessens Fermatius und Cartesius und andere dabey nicht gethan was ich verlange, nemlich haben wohl gewiesen, dass dasjenige, was Pappus erzehlet, wahr und von ihnen zu demonstriren, haben aber ferner nicht gewiesen, wie die Veteres darauf kommen. Denn obschon ingenii vis viel thut, so steckt doch gemeiniglich ein principium inveniendi analyticum darinn, so diejenigen offt selbst nicht observiren, die es doch brauchen, so ich auch vom Hrn. Viviani sagen môchte.



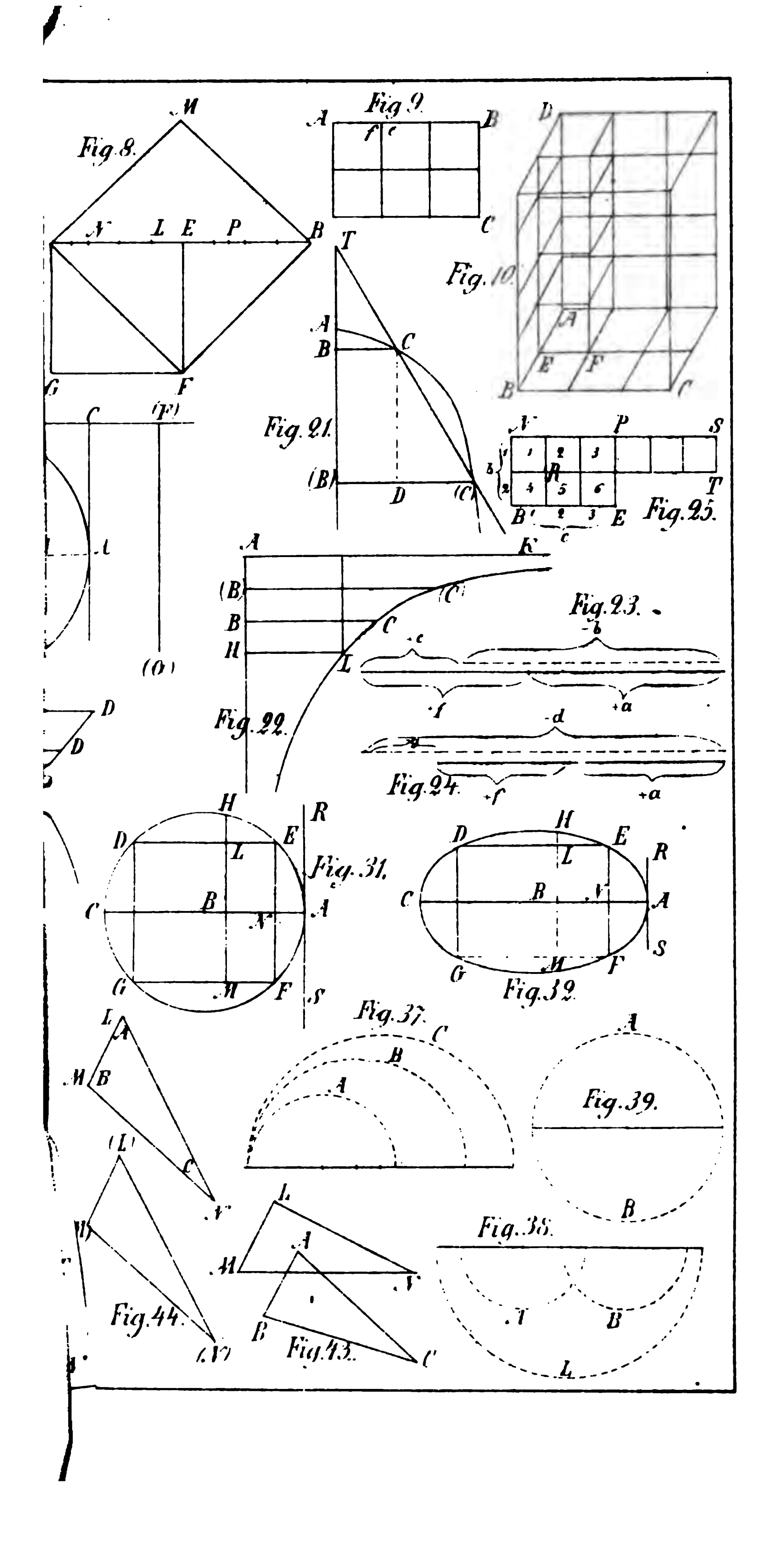
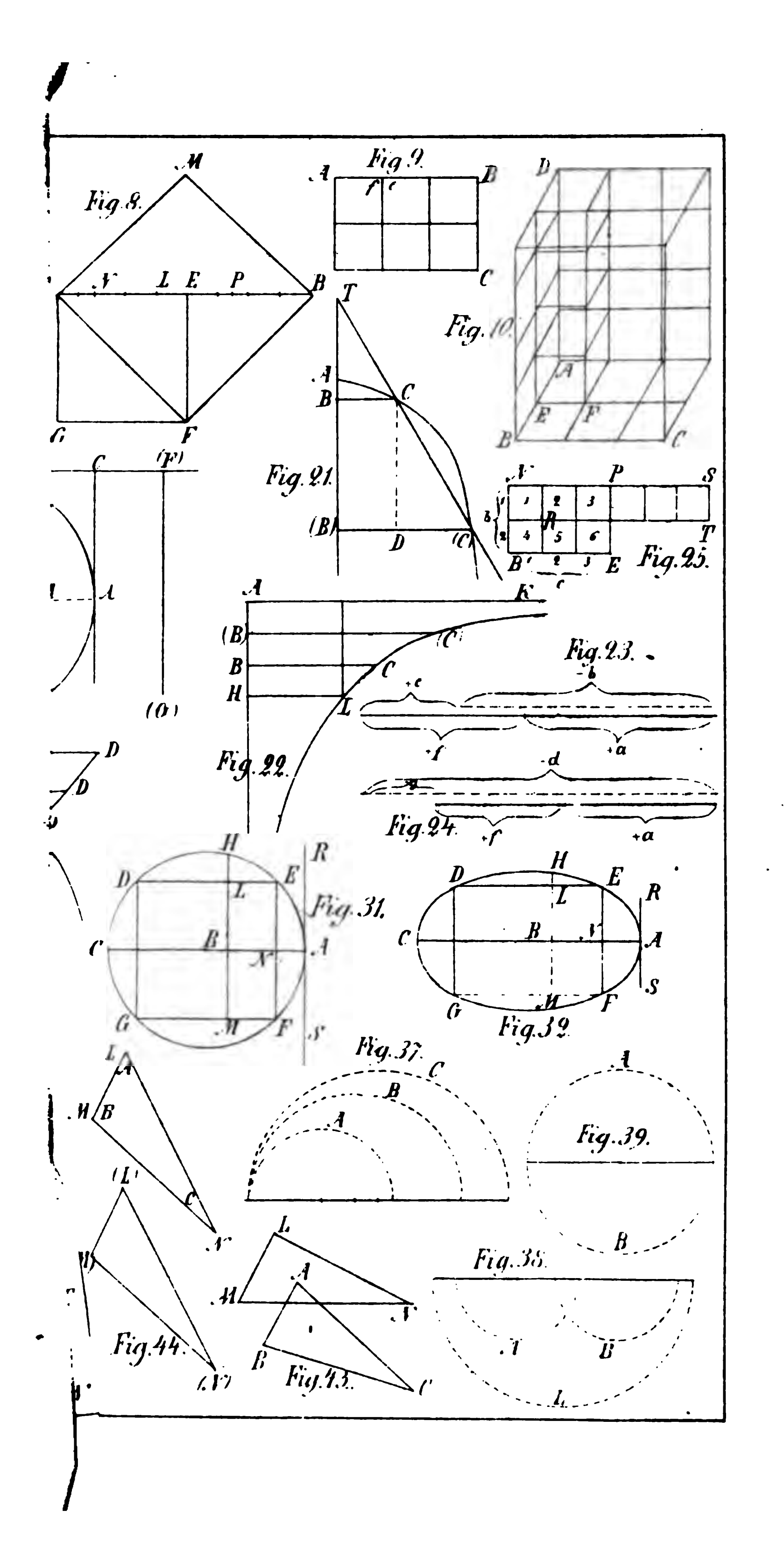


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 43.
Fig. 44.


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 43.
Fig. 44.



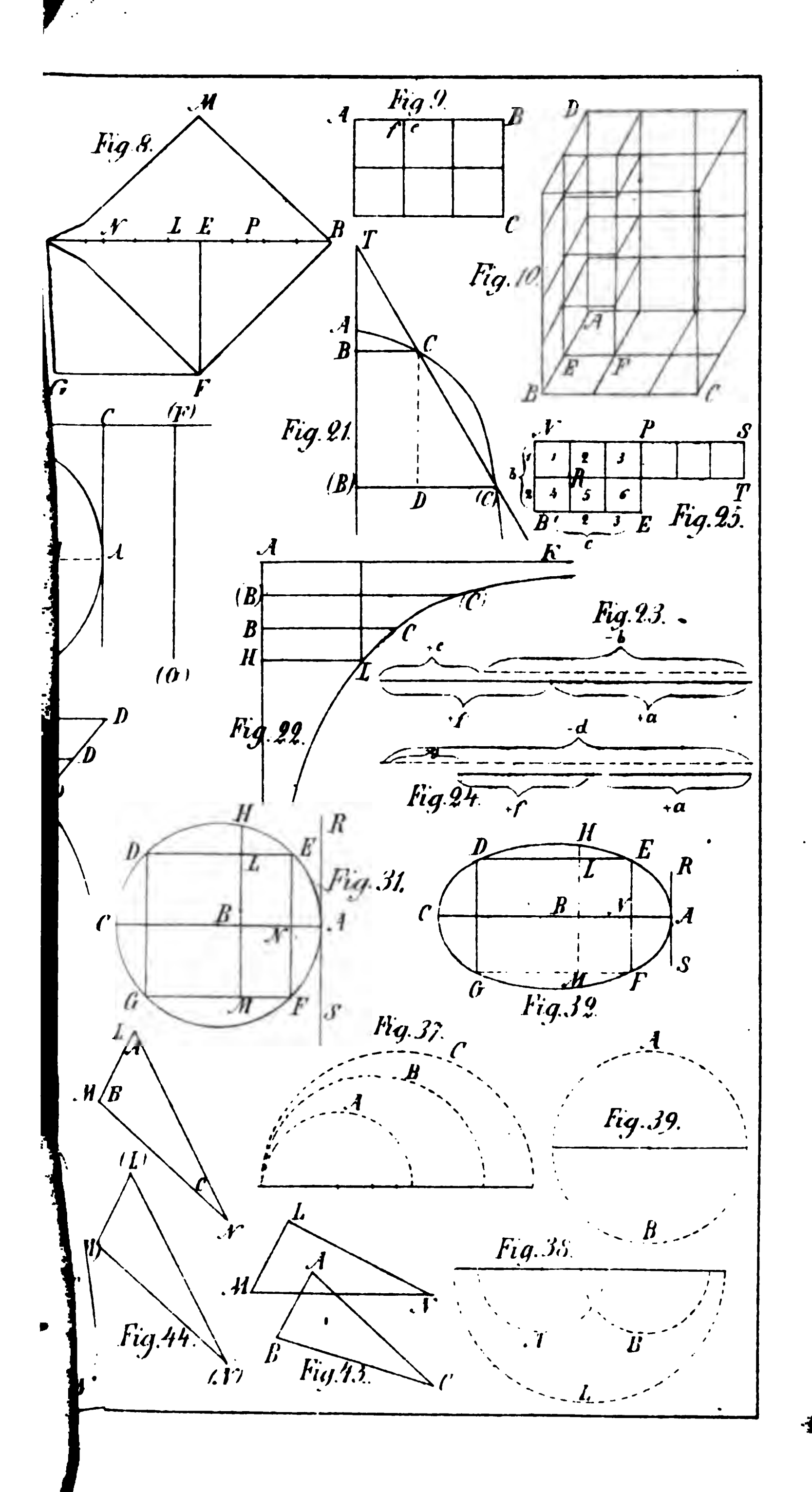
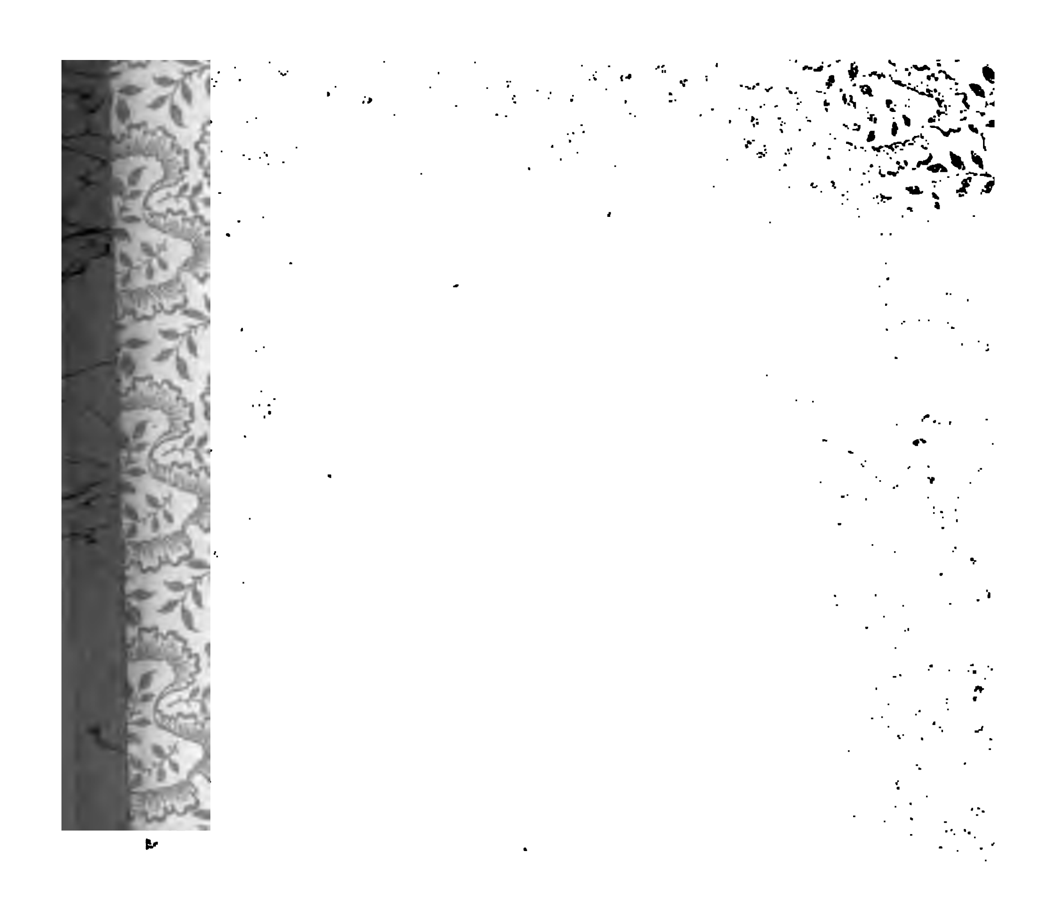


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 43.
Fig. 44.










[redacted]
To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below
20M-2-60-93874
FEB 2 5 1963

